Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(6), 3871-3882**
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.116414

Hans汉斯

模糊厌恶下含相关索赔的最优投资再保险问题

崔　璨*，王　伟

天津师范大学数学科学学院，天津

收稿日期：2022年5月27日；录用日期：2022年6月19日；发布日期：2022年6月28日

摘　要

本文考虑了当保险公司在考虑相关索赔的基础上以破产概率最小化为目标时的最优投资及再保险问题。假设保险公司是模糊厌恶的，并且被允许购买比例再保险来分散部分风险以及投资一种风险资产来实现公司的盈余保值，其中风险资产的价格过程符合几何布朗运动。由此得到了**Hamilton-Jacobi-Bellman**方程，并在此基础上通过对方程的求解得到了保险公司的最优投资和再保险策略及值函数的表达式。最后本文给出了数值例子用以描述不同模型参数对保险公司的最优策略的影响。

关键词

相关索赔，模糊厌恶，**Hamilton-Jacobi-Bellman**方程，几何布朗运动

Optimal Reinsurance and Investment Problem with Correlated Claims under Ambiguity Aversion

Can Cui*, Wei Wang

College of Mathematical Science, Tianjin Normal University, Tianjin

Received: May 27th, 2022; accepted: Jun. 19th, 2022; published: Jun. 28th, 2022

Abstract

This paper considers the optimal investment and reinsurance problem when an insurance company aims to minimize the probability of ruin while considering correlated claims. It is assumed that the insurer is ambiguity aversion and allowed to purchase proportional reinsurance to spread some risk and invest a risk asset is used to realize the company's surplus preservation, and the price

*通讯作者。

文章引用: 崔璨, 王伟. 模糊厌恶下含相关索赔的最优投资再保险问题[J]. 应用数学进展, 2022, 11(6): 3871-3882.
DOI: 10.12677/aam.2022.116414

process of the risk asset follows the geometric Brownian motion. From this, the Hamilton-Jacobi-Bellman equation is obtained, and on this basis, the optimal investment and reinsurance strategy and the expression of value function of the insurance company is obtained by solving the equation. Finally, numerical examples are given to describe the trend of the insurance company's optimal strategy on the basis of different model parameters.

Keywords

Correlated Claims, Ambiguity Aversion, Hamilton-Jacobi-Bellman Equation, Geometric Brownian Motion

1. 引言

在保险金融领域的研究中，以期望值准则来设定保险公司的保费往往与实际情况存在着一定的偏差。并且对于保险公司的管理者来说，投保人在未来一段时间内的索赔变化与当前时刻的索赔变化是相同的，即预期索赔通常与历史索赔存在着一定的相关关系，故保险公司可利用相关索赔来参考投保人的历史索赔情况并对预期索赔进行预测。其中相关索赔是保险公司通过外推偏差即历史索赔的指数权重均值来预测投保人的预期索赔额，故当索赔发生变化时，相关索赔的值也会对应发生变化。近些年，越来越多的学者将相关索赔纳入到模型参考因素中。例如，文献[1]在参考相关索赔的基础上，分别以终值财富的指数效用和均值方差效用最大化为目标，研究了保险公司的最优再保险问题。文献[2]以期望效用最大化为目标，参考相关索赔定义保险公司的保费计算准则，并在此基础上考虑了保险公司的最优投资及再保险问题。上述文章均以期望效用的最大化为目标，而除此目标外，破产概率最小化也是保险公司用来考虑最优投资及再保险策略所选取的常见目标之一。例如，文献[3]描述了一种索赔过程符合布朗运动的最优投资及再保险问题，文献[4]在文献[3]的基础上，考虑了当保险公司以破产概率最小化为目标时的最优投资及再保险问题，其中保险公司可通过购买比例再保险来分散自身风险，并且可将其盈余投资风险资产和无风险资产。文献[5]研究了风险投资的价格过程分别为符合 Henston 模型和几何布朗运动模型时的最优投资及再保险问题。文献[6]在纯扩散模型下研究了当保险公司被允许购买比例再保险、投资无风险资产和 Black-Scholes 风险资产时的最优策略问题。文献[7]在扩散渐近模型下研究了保险公司的最优投资及再保险问题。文献[8] [9]均以最小化绝对破产概率为目标，分别研究了均值方差保费准则下模糊厌恶型保险公司和模糊中立型保险公司两种情况下的最优投资及再保险问题。文献[10]研究了保险公司可购买比例再保险以及投资两种无风险资产的最优投资及再保险问题。文献[11]则是以破产概率的贴现值最小化为目标，在此基础上考虑了模糊厌恶型保险公司的最优再保险问题。文献[12]考虑了在非线性扩散模型下保险公司的最优投资及保费控制问题，并分别得到了以期望效用最大化和破产概率最小化为目标时保险公司的最优策略及值函数。文献[13]和[14]分别考虑了模型存在模糊性时保险公司分别以破产概率最小化和 drawdown 破产概率最小化为目标时的最优投资及再保险问题。

在文献[2]和[5]的启发下，本文考虑了保险公司以破产概率最小化为目标并且参考相关索赔来设定保费时的最优投资及再保险策略问题。本文在经典风险模型的基础上，由动态规划原理得到了 HJB 方程，并通过对方程的求解得到了保险公司值函数表达式及最优策略。

2. 模型建立

2.1. 模型假设

设$\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0},P\right)$为完备的概率空间，$P$为概率测度。首先，建立一个经典的 Cramér-Lundberg 模型来描述保险公司的盈余过程$X(t)$，即

$$X(t)=x+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i, \tag{1}$$

其中$c>0$为经典模型下保险公司的保费利率，$x>0$为保险公司的初始盈余，$\{N(t),t\ge0\}$是一个强度为λ的齐次泊松过程描述了截止t时刻的累计索赔数量，$\{Y_i,i=1,2,\cdots\}$是恒为正的独立同分布的随机变量且描述了索赔大小，其中$\{N(t),t\ge0\}$和$\{Y_i,i=1,2,\cdots\}$相互独立，$E(Y_i)=\mu_1,E(Y_i^2)=\mu_2$分别为保险公司索赔额的一阶矩和二阶矩，且$\{Y_i,i=1,2,\cdots\}$具有相同的分布函数$F_Y(y)$和密度函数$f_Y(y)$。为了符号简便性，不妨取$L(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$为保险公司的累计索赔过程，且$Y(0)=0$。

由文献[2]可得通过布朗运动逼近所得到的保险公司的累计索赔过程，即

$$\mathrm{d}L(t)=\lambda\mu_1\mathrm{d}t-\sqrt{\lambda\mu_2}\,\mathrm{d}W_0(t), \tag{2}$$

其中$\{W_0(t),t\ge0\}$为概率测度P下的一个标准布朗运动。

保险公司在制定新的保险合约时往往会参考顾客的历史索赔情况，即通过顾客的历史索赔记录来预测未来一年时间里的索赔金额，并由此来设定新的保险合约中规定的投保人需缴纳的保费额。参考文献[2]来定义相关索赔，即

$$\upsilon(t)=\int_0^t\delta\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}L(s-\mathrm{d}s),\ 0<\delta<1, \tag{3}$$

且$\upsilon(0)=0$，δ为外推强度，利用历史索赔的指数权重均值来描述预期索赔，其中历史索赔的总权重为$\int_0^t\delta\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s=1-\mathrm{e}^{-\delta t}$，预期索赔的权重为$\mathrm{e}^{-\delta t}$。设保险公司的保费率为

$$c_1(t)=(1+\eta_1)\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon(t)\right), \tag{4}$$

其中$\eta_1>0$为保险公司的安全负载。

假设保险公司可以利用比例再保险来分摊自身风险。对$\forall t>0$，不妨设保险公司对风险暴露的自留比例为$a(t)$，保险公司分摊给再保险公司的风险暴露比例为$1-a(t)$。假设投保人的索赔情况对于再保险公司来说是已知的信息，即再保险公司也会参考相关索赔来制定再保险保费，故再保险公司的保费率为

$$c_2(t)=(1+\eta_2)\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon(t)\right), \tag{5}$$

其中$\eta_2>0$为再保险公司的安全负载，且$\eta_2>\eta_1$。

则由(1)式，保险公司的盈余过程为

$$\mathrm{d}X^a(t)=\left[c_1-(1-a(t))c_2\right]\mathrm{d}t-a(t)\mathrm{d}L(t). \tag{6}$$

假设保险公司还可以利用公司盈余来投资风险资产来获取收益，且风险资产的价格过程服从几何布朗运动，则风险资产的价格过程为

$$\mathrm{d}P_1(t)=P_1(t)\left[\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_1(t)\right], \tag{7}$$

其中 $\mu,\sigma>0$ 为常数。则由(6)式，可得保险公司的财富过程为

$$\mathrm{d}X^u(t)=\pi(t)\frac{\mathrm{d}P_1(t)}{P_1(t)}+\mathrm{d}X^a(t). \tag{8}$$

其中 $\pi(t)$ 刻画了 t 时刻保险公司在风险资金上投入的金额。

为了确保保险公司的相关索赔是有限的，由文献[2]给出如下引理

引理 1 对 $\forall t>0$，有

$$|\upsilon(t)|\le M,$$

其中 M 为一非负常数。

在引理 1 的条件下，对(3)式求微分，可得

$$\mathrm{d}\upsilon(t)=-\delta\upsilon(t)\mathrm{d}t+\delta\mathrm{d}L(t). \tag{9}$$

在经典 C-L 模型的基础上加入相关索赔后，(2)式变为

$$\mathrm{d}L(t)=\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon(t)\right)\mathrm{d}t-\sqrt{\lambda\mu_2}\mathrm{d}W_0(t), \tag{10}$$

通过(4)~(8)，(10)式，可以得到保险公司的财富过程为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X^u(t)&=\pi(t)\frac{\mathrm{d}P_1(t)}{P_1(t)}+\mathrm{d}X^a(t)\\&=\pi(t)\left[\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_1(t)\right]+\left[c_1(t)-(1-a(t))c_2(t)\right]\mathrm{d}t-a(t)\mathrm{d}L(t)\\&=\left[\mu\pi(t)+(\eta_1-\eta_2+a(t)\eta_2)\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon(t)\right)\right]\mathrm{d}t+a(t)\sqrt{\lambda\mu_2}\mathrm{d}W_0(t)+\pi(t)\sigma\mathrm{d}W_1(t).\end{aligned} \tag{11}$$

设 $\alpha=(\pi(t),a(t))$ 为可行策略，且保险公司以最小化破产概率为目标，首先对保险公司的破产概率做出定义

$$\psi_\alpha(x)=P\left(\tau_\alpha<\infty\middle|X(0)=x\right).$$

其中 $\tau_\alpha=\inf\limits_{t\ge0}\{t:X(t)<c\}$ 为保险公司在策略 α 下资金首次低于阈值 c 的时刻。

2.2. 模型模糊性及目标函数

为求得最优策略，对模型的目标函数做出如下定义

$$\psi(x)=\inf_{\alpha\in A}\psi_\alpha(x),$$

要想求得问题的最优解，需要保险公司在概率测度 P 上建立的参考模型足够精确，而参考模型往往是由保险公司通过各种渠道所获得信息建立的，与现实情况往往具有差异，为了规避模型模糊性所带来的风险，保险公司通常会采用替代模型来进行计算。假设保险公司是模糊厌恶的且并不信任参考模型 P，并选用了与参考模型 P 等价的替代模型 Q 来进行计算。

设替代模型集为 $\mathrm{Q}=\{Q\,|\,Q\sim P\}$。由 Girsanov 定理可知对任意替代概率测度 $Q\in\mathrm{Q}$ 均存在一个循序可测的过程

$$\left\{\theta^Q(t)=(m(t),n(t))\,|\,t\in[0,T]\right\},$$

并且满足 Novikov 条件

$$E\left\{\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^T\|\theta(s)\|^2\,\mathrm{d}s\right]\right\}<\infty,$$

其中

$$\left\|\theta(t)\right\|^2 = m^2(t)+n^2(t).$$

使得

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\Lambda^{\theta}(t)=\exp\left\{\int_0^t\left[m(s)\mathrm{d}W_0(s)+n(s)\mathrm{d}W_1(s)\right]-\frac{1}{2}\int_0^t\left[m^2(s)+n^2(s)\right]\mathrm{d}s\right\}. \tag{12}$$

根据 Girsanov 定理，可得

$$\begin{cases}\mathrm{d}W_0(t)=m(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_0^Q(t),\\ \mathrm{d}W_1(t)=n(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_1^Q(t),\end{cases} \tag{13}$$

其中 $\left\{W_0^Q(t),W_1^Q(t)\right\}$ 为概率测度 Q 下的标准布朗运动，则由(9)~(11)，(13)式可以得到概率测度 Q 下的财富过程与相关索赔为

$$\begin{cases}\mathrm{d}X^Q(t)=\Big[\mu\pi(t)+\big(\eta_1-\eta_2+a(t)\eta_2\big)\big(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon(t)\big)+a(t)\sqrt{\lambda\mu_2}m(t)\\ \qquad\qquad +\sigma\pi(t)n(t)\Big]\mathrm{d}t+a(t)\sqrt{\lambda\mu_2}\mathrm{d}W_0^Q(t)+\sigma\pi(t)\mathrm{d}W_1^Q(t),\\ \mathrm{d}\upsilon^Q(t)=\big(\delta\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1-\delta\sqrt{\lambda\mu_2}m(t)\big)\mathrm{d}t-\delta\sqrt{\lambda\mu_2}\mathrm{d}W_0^Q(t).\end{cases} \tag{14}$$

再将(13)式代入(12)式，可得相对熵为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\Lambda^{\theta}(t)=\exp\left\{\int_0^t\left[m(s)\mathrm{d}W_0^Q(s)+n(s)\mathrm{d}W_1^Q(s)\right]+\frac{1}{2}\int_0^t\left[m^2(s)+n^2(s)\right]\mathrm{d}s\right\}. \tag{15}$$

由于模型存在模糊性，引入(15)式来刻画模型的罚函数

$$h(Q_t\mid P_t)=E^Q\left(\ln\frac{\mathrm{d}Q_t}{\mathrm{d}P_t}\right)=E^Q\left\{\frac{1}{2}\int_0^t\left[m^2(s)+n^2(s)\right]\mathrm{d}s\right\}. \tag{16}$$

由上式可以看到(16)式的大小与模型的偏差大小有关，即偏差越大，惩罚越大。

同理可以得到，保险公司在概率测度 Q 下的破产时刻为

$$\tau_\alpha^Q=\inf_{t\ge 0}\left\{t:X^Q(t)<c\right\},$$

破产概率为

$$\psi_\alpha^Q(x,\upsilon)=P\left(\tau_\alpha^Q<\infty\middle|X^Q(0)=x\right).$$

最优鲁棒投资再保险的破产概率函数为

$$\psi^Q(x,\upsilon)=\inf_{\alpha\in A}\sup_{Q\in\mathrm{Q}}\left\{\psi_\alpha^Q(x,\upsilon)-E^Q\left[\int_0^{\tau_\alpha^Q}\phi\left(\psi^Q\left(X^Q(s)\right)\right)\xi Z(s)\mathrm{d}s\right]\right\}. \tag{17}$$

定义 1 (可容许策略)：对 $\forall t\in[0,T]$，保险公司的投资再保险策略 $\beta(t)=\big(\pi(t),a(t)\big)$ 为可容许策略，则需

1) $a(t),\pi(t)$ 是关于 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ 循序可测的；
2) $a(t)\in[0,+\infty)$；
3) $E^Q\left\{\int_0^T\left[\pi^2(s)+a^2(s)\right]\mathrm{d}s\mid X_t^Q=x,\upsilon(t)=\upsilon\right\}<\infty$；

4) $\exists\alpha^{*}(t)=\left(\pi^{*}(t),a^{*}(t)\right)$为满足(17)式的唯一最优解。

注 1 (17)式中$\xi=(\xi_1,\xi_2)$，$Z(t)=\left(m^2(t),n^2(t)\right)^{\mathrm{T}}$，$\phi(x)$为一标准化函数，对惩罚进行刻画。

注 2 $\xi_i(i=1,2)$是用来衡量保险公司的模糊厌恶程度的参数。当$\xi_i\to\infty$时，则保险公司对于替代模型充分信任。

注 3 所有满足可采纳策略的策略集为$B=\left\{\left(\pi(t),a(t)\right)\mid\forall t\in[0,T]\right\}$。

3. 值函数及最优策略

为了求得在最小化破产概率目标下保险公司的最优投资、再保险策略及最优值函数，对于$\forall t\in[0,T]$，不妨设存在函数$V(x,\upsilon)\in\mathbb{C}^{2\times2}\left([\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+]\right)$，参考文献[15]，可得 HJB 方程为

$$\begin{aligned}\inf_{\alpha\in A}\sup_{Q\in\mathrm{Q}}\Big\{&\left[\mu\pi+(\eta_1-\eta_2+a\eta_2)\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)+a\sqrt{\lambda\mu_2}m+\sigma\pi n\right]V_x\\&+\frac{1}{2}\left(\lambda\mu_2a^2+\sigma^2\pi^2\right)V_{xx}+\left(\delta\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1-\delta\sqrt{\lambda\mu_2}m\right)V_\upsilon\\&+\frac{1}{2}\lambda\mu_2\delta^2V_{\upsilon\upsilon}-\lambda\mu_2\delta aV_{x\upsilon}-\frac{1}{2}\left(\xi_1m^2+\xi_2n^2\right)V\Big\}=0.\end{aligned}\tag{18}$$

通过求解(18)式，可得保险公司的最优投资及再保险策略及其最优值函数。

定理 1 设$V(x,\upsilon)\in\mathbb{C}^{2\times2}\left([\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+]\right)$，$f\in C^2\left([0,\upsilon]\right)$，则保险公司的最优投资及再保险策略为

$$\begin{cases}a^{*}=\dfrac{\lambda\mu_2\delta\left[\left(1+\dfrac{1}{\xi_1}\right)(x-c)ff_\upsilon-f_\upsilon\right]+\eta_2\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)f}{\lambda\mu_2\left(1+\dfrac{1}{\xi_1}\right)f^2},\\[2ex]\pi^{*}=\dfrac{\mu}{\sigma^2\left(1+\dfrac{1}{\xi_2}\right)f}.\end{cases}\tag{19}$$

最优值函数为

$$V(x,\upsilon)=\mathrm{e}^{-f(\upsilon)(x-c)},\tag{20}$$

其中c为一阈值，且

$$f(\upsilon)=\left[-C_2-C_1\int_0^\upsilon\exp\left\{-\left[\frac{2\mu_1(1+\eta_2)\mathrm{e}^{-\delta t}}{\mu_2\delta}s+\frac{\eta_2}{\lambda\mu_2\delta}s^2\right]\right\}\mathrm{d}s\right]^{-1}.\tag{21}$$

其中

$$\begin{cases}C_1=\dfrac{4(\eta_2-\eta_1)\eta_2\lambda\mu_1^2\mathrm{e}^{-2\delta t}}{\dfrac{\delta\mu_2\mu^2}{\sigma^2\left(1+\dfrac{1}{\xi_2}\right)}+\dfrac{\delta\lambda^2\mu_1^2\eta_2^2\mathrm{e}^{-2\delta t}}{\lambda\left(1+\dfrac{1}{\xi_1}\right)}},\\[3ex]C_2=\dfrac{2(\eta_1-\eta_2)\lambda\mu_1\mathrm{e}^{-\delta t}}{\dfrac{\mu^2}{\sigma^2\left(1+\dfrac{1}{\xi_2}\right)}+\dfrac{\lambda^2\mu_1^2\eta_2^2\mathrm{e}^{-2\delta t}}{\lambda\mu_2\left(1+\dfrac{1}{\xi_1}\right)}}.\end{cases}\tag{22}$$

证明

由一阶条件，可通过(18)式得到最大偏差

$$\begin{cases} m^* = \dfrac{\sqrt{\lambda\mu_2}\,a}{\xi_1}\dfrac{V_x}{V} - \dfrac{\sqrt{\lambda\mu_2}\,\delta}{\xi_1}\dfrac{V_\upsilon}{V}, \\ n^* = \dfrac{\sigma\pi}{\xi_2}\dfrac{V_x}{V}. \end{cases} \tag{23}$$

由(18)、(23)化简可得 HJB 方程

$$\begin{aligned} \inf_{\alpha\in A}\Big\{&\Big[\mu\pi + (\eta_1 - \eta_2 + a\eta_2)\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1 + \upsilon\right)\Big]V_x + \frac{1}{2}\left(\lambda\mu_2 a^2 + \sigma^2\pi^2\right)V_{xx} \\ &+ \delta\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1 V_\upsilon + \frac{1}{2}\lambda\mu_2\delta^2 V_{\upsilon\upsilon} - \lambda\mu_2\delta a V_{x\upsilon} + \frac{\sigma^2\pi^2}{2\xi_2}\frac{V_x^2}{V} \\ &+ \frac{\lambda\mu_2 a^2}{2\xi_1}\frac{V_x^2}{V} + \frac{\lambda\mu_2\delta^2}{2\xi_1}\frac{V_\upsilon^2}{V} - \frac{\lambda\mu_2 a\delta}{\xi_1}\frac{V_x V_\upsilon}{V}\Big\} = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

由一阶条件可得保险公司的最优策略 $\alpha^* = \left(\pi^*, a^*\right)$

$$\begin{cases} a^* = \dfrac{\lambda\mu_2\delta\left(V_{x\upsilon} + \dfrac{V_x V_\upsilon}{\xi_1 V}\right) - \eta_2\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1 + \upsilon\right)V_x}{\lambda\mu_2\left(V_{xx} + \dfrac{V_x^2}{\xi_1 V}\right)}, \\ \pi^* = -\dfrac{\mu V_x}{\sigma^2\left(V_{xx} + \dfrac{V_x^2}{\xi_2 V}\right)}. \end{cases} \tag{25}$$

将上式代入(24)式并化简可以得到

$$\begin{aligned} &(\eta_1 - \eta_2)\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1 + \upsilon\right)V_x + \delta\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1 V_\upsilon + \frac{1}{2}\lambda\mu_2\delta^2 V_{\upsilon\upsilon} - \frac{\lambda\mu_2\delta^2}{2\xi_1}\frac{V_\upsilon^2}{V} \\ &-\frac{1}{2}\frac{\left[\lambda\mu_2\delta\left(V_{x\upsilon} + \dfrac{V_x V_\upsilon}{\xi_1 V}\right) - \eta_2\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1 + \upsilon\right)V_x\right]^2}{\lambda\mu_2\left(V_{xx} + \dfrac{V_x^2}{\xi_1 V}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\mu^2 V_x^2}{\sigma^2\left(V_{xx} + \dfrac{V_x^2}{\xi_2 V}\right)} = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

为了对(26)式进行求解，不妨猜解为

$$V(x,\upsilon) = \mathrm{e}^{-f(\upsilon)(x-c)},$$

其中 $f(\upsilon) > 0$，且满足边界条件 $V(c,\upsilon) = 1, V(\infty,\upsilon) = 0$。

由(20)式可以得到

$$\begin{cases} V_x = -fV, V_{xx} = f^2 V, V_{x\upsilon} = (x-c)ff_\upsilon V - f_\upsilon V, \\ V_\upsilon = -(x-c)f_\upsilon V, V_{\upsilon\upsilon} = \left[-(x-c)f_{\upsilon\upsilon} + (x-c)^2 f_\upsilon^2\right]V, \\ V_{xx} + \dfrac{V_x^2}{\xi_i V} = \left(1 + \dfrac{1}{\xi_i}\right)f^2 V, (i = 1,2) \\ V_{x\upsilon} + \dfrac{V_x V_\upsilon}{\xi_1 V} = \left(1 + \dfrac{1}{\xi_1}\right)(x-c)ff_\upsilon V - f_\upsilon V, \end{cases} \tag{27}$$

将(27)式带回(25)式，可得最优策略为(19)式。

将(27)式带回(26)式，可得

$$\begin{aligned}&\left(\eta_2-\eta_1\right)\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)f-\delta\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1\left(x-c\right)f_\upsilon-\frac{1}{2}\lambda\mu_2\delta^2\left(x-c\right)f_{\upsilon\upsilon}\\&-\frac{\mu^2}{2\sigma^2\left(1+\frac{1}{\xi_2}\right)}-\frac{1}{2}\lambda\mu_2\delta^2\frac{f_\upsilon^2}{\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)f^2}-\frac{\eta_2^2\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)^2}{2\lambda\mu_2\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}+\lambda\mu_2\delta^2\left(x-c\right)\frac{f_\upsilon^2}{f}\\&-\delta\eta_2\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)\left(x-c\right)f_\upsilon+\frac{\delta\eta_2}{\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)\frac{f_\upsilon}{f}=0.\end{aligned}\tag{28}$$

为了对(28)式进行求解，取 $(x-c)$,1 的系数为 0，并对其进行划分

$$-\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1f_\upsilon-\frac{1}{2}\lambda\mu_2\delta f_{\upsilon\upsilon}+\lambda\mu_2\delta\frac{f_\upsilon^2}{f}-\eta_2\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)f_\upsilon=0,\tag{29}$$

$$\begin{aligned}&\left(\eta_2-\eta_1\right)\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)f-\frac{\mu^2}{2\sigma^2\left(1+\frac{1}{\xi_2}\right)}-\frac{1}{2}\lambda\mu_2\delta^2\frac{f_\upsilon^2}{\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)f^2}\\&-\frac{\eta_2^2\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)^2}{2\lambda\mu_2\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}+\frac{\delta\eta_2}{\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)\frac{f_\upsilon}{f}=0.\end{aligned}\tag{30}$$

首先，对(29)式求解，不妨在等式两边同时除以 f_υ，可以得到

$$-\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1-\eta_2\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)-\frac{1}{2}\lambda\mu_2\delta\frac{f_{\upsilon\upsilon}}{f_\upsilon}+\lambda\mu_2\delta\frac{f_\upsilon}{f}=0,$$

再化简，可得

$$\frac{f_{\upsilon\upsilon}}{f_\upsilon}-2\frac{f_\upsilon}{f}=-\frac{2\lambda\mu_1\left(1+\eta_2\right)\mathrm{e}^{-\delta t}+2\eta_2\upsilon}{\lambda\mu_2\delta},$$

再对等式两边同时求积分

$$\ln\frac{f_\upsilon}{f^2}=C_0-\frac{2\lambda\mu_1\left(1+\eta_2\right)\mathrm{e}^{-\delta t}\upsilon+\eta_2\upsilon^2}{\lambda\mu_2\delta},$$

再变形，可得到

$$\frac{f_\upsilon}{f^2}=C_1\exp\left\{-\left[\frac{2\mu_1\left(1+\eta_2\right)\mathrm{e}^{-\delta t}}{\mu_2\delta}\upsilon+\frac{\eta_2}{\lambda\mu_2\delta}\upsilon^2\right]\right\}.\tag{31}$$

其中 $C_1=\mathrm{e}^{C_0}$。对(31)式再次积分，可得

$$-\frac{1}{f}=C_2+C_1\int_0^\upsilon\exp\left\{-\left[\frac{2\mu_1\left(1+\eta_2\right)\mathrm{e}^{-\delta t}}{\mu_2\delta}s+\frac{\eta_2}{\lambda\mu_2\delta}s^2\right]\right\}\mathrm{d}s,\tag{32}$$

其中 $C_2\neq0$，并且对(32)式再次整理可得(21)式。

接下来对(30)式进行求解，化简可得

$$\begin{aligned}&(\eta_2-\eta_1)\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)-\left[\frac{\mu^2}{2\sigma^2\left(1+\frac{1}{\xi_2}\right)}+\frac{\eta_2^2\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)^2}{2\lambda\mu_2\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}\right]\frac{1}{f}\\&-\frac{1}{2}\lambda\mu_2\delta^2\frac{f_\upsilon^2}{\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)f^3}+\frac{\delta\eta_2}{\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}\left(\mathrm{e}^{-\delta t}\lambda\mu_1+\upsilon\right)\frac{f_\upsilon}{f^2}=0.\end{aligned}\tag{33}$$

由于 $f\in C^2([0,\upsilon])$，不妨取 $\upsilon=0$，由(31) (32)式可得

$$\begin{aligned}&(\eta_2-\eta_1)\lambda\mu_1\mathrm{e}^{-\delta t}C_2+\left[\frac{\mu^2}{2\sigma^2\left(1+\frac{1}{\xi_2}\right)}+\frac{\eta_2^2\lambda^2\mu_1^2\mathrm{e}^{-2\delta t}}{2\lambda\mu_2\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}\right]C_2^2\\&+\frac{\lambda\mu_2\delta^2}{2\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}C_1^2+\frac{\lambda\mu_1\delta\eta_2\mathrm{e}^{-\delta t}}{\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}C_1C_2=0.\end{aligned}\tag{34}$$

不难看出(34)式中各项系数均为正，则可得

$$\begin{aligned}&\left\{(\eta_2-\eta_1)\lambda\mu_1\mathrm{e}^{-\delta t}+\left[\frac{\mu^2}{2\sigma^2\left(1+\frac{1}{\xi_2}\right)}+\frac{\eta_2^2\lambda^2\mu_1^2\mathrm{e}^{-2\delta t}}{2\lambda\mu_2\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}\right]C_2\right\}C_2\\&+\left[\frac{\lambda\mu_2\delta^2}{2\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}C_1+\frac{\lambda\mu_1\delta\eta_2\mathrm{e}^{-\delta t}}{\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}C_2\right]C_1=0.\end{aligned}$$

又由于 $C_1,C_2\neq 0$，不妨取系数为 0，则可得方程组为

$$\begin{cases}(\eta_2-\eta_1)\lambda\mu_1\mathrm{e}^{-\delta t}+\left[\frac{\mu^2}{2\sigma^2\left(1+\frac{1}{\xi_2}\right)}+\frac{\eta_2^2\lambda^2\mu_1^2\mathrm{e}^{-2\delta t}}{2\lambda\mu_2\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}\right]C_2=0,\\\frac{\lambda\mu_2\delta^2}{2\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}C_1+\frac{\lambda\mu_1\delta\eta_2\mathrm{e}^{-\delta t}}{\left(1+\frac{1}{\xi_1}\right)}C_2=0.\end{cases}$$

对上述方程组求解，可以得到(22)式。

再将(21) (22)代入(20)式可得保险公司在破产概率最小化目标下的值函数表达式。

4. 数值例子

不妨取定参数为 $\lambda=1$，$\mu_1=0.5$，$\mu_2=0.25$，$\eta_1=0.2$，$\eta_2=0.5$，$\mu=0.1$，$\sigma=0.05$，$\xi_1=0.25$，$\xi_2=0.3$。由于不同大小的 x 表示保险公司具有不同大小的初始盈余，而不同大小的 υ 会使保险公司产生不同的保费率，

从而影响保险公司的最优再保险、投资策略。为了考虑不同的 x 及 υ 对保险公司的最优策略产生的影响，本节利用定量分析法来分别考虑不同模型参数发生变化时对保险公司的最优策略的影响。故分别取定不同的模型参数条件，利用 Matlab 判断不同的初始盈余 x 和相关索赔 υ 分别对最优投资及再保险策略的影响。

为了判断不同 υ 对 $a^*(t)$ 的影响，不妨取定 $\delta = 0.25$， $x = 2$， $c = 0.5$。在不同时刻随着相关索赔 υ 的增加，最优再保险比例 $a^*(t)$ 会随之降低，见图 1。即当相关索赔越大时，保险公司收取的保费也会随之提高，从而使部分投保人去寻求更加符合其预期的保险合约。又由于模型假设投保人的索赔情况对于保险公司和再保险公司都是已知的信息，即当相关索赔增加时，再保险公司向保险公司收取的保费也会随之增加，而再保险保费的增加也会使保险公司选择降低再保险比例，改变其再保险策略。

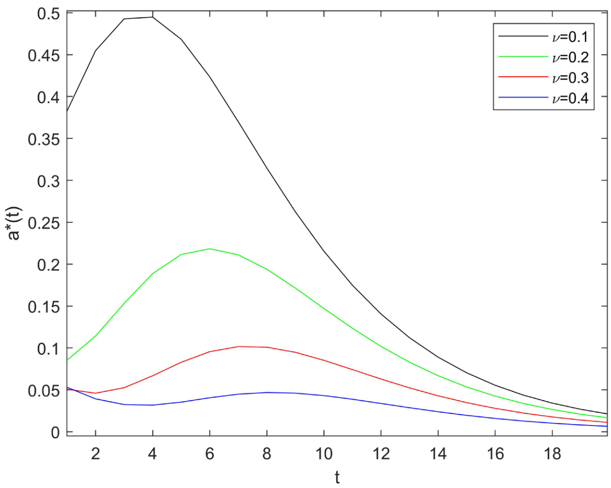

Figure 1. The influence of correlated claims on optimal reinsurance strategy
图 1. 相关索赔对最优再保险策略的影响

为了判断不同的 x 对 $a^*(t)$ 的影响，不妨取 $\upsilon = 0.15$， $\delta = 0.25$， $c = 0.5$。在不同时刻，随着初始盈余 x 的增加，最优再保险比例 $a^*(t)$ 也会随之增加，见图 2。即保险公司的初始资金越大，保险公司能够负担转移自身风险暴露的资金就越高，从而保险公司就会倾向于参考自身资金情况来增加再保险比例，从而降低自身风险暴露。

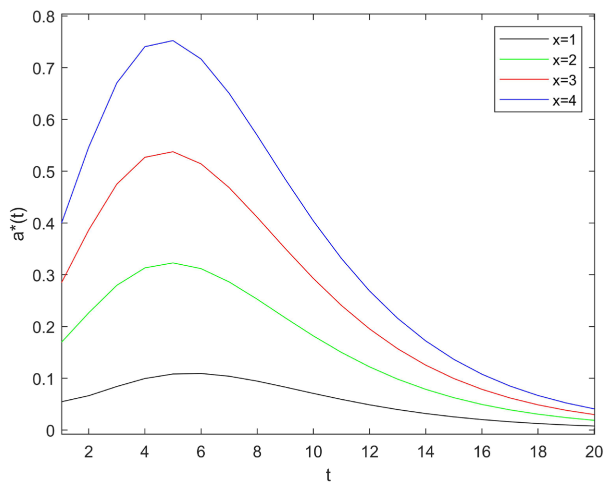

Figure 2. The influence of initial surplus on optimal reinsurance strategy
图 2. 初始盈余对最优再保险策略的影响

为了判断不同υ对$\pi^*(t)$的影响，不妨取$\delta = 0.5$。不难看出，随着相关索赔υ的增加，风险投资金额$\pi^*(t)$会随之降低，见图3。保险公司参考历史索赔的外推权重越大时，保险公司对预期索赔的预测值就越大，保险公司会倾向于保留更多的盈余来面对可能的风险暴露，因此保险公司投资风险资产的资金就会随之降低。

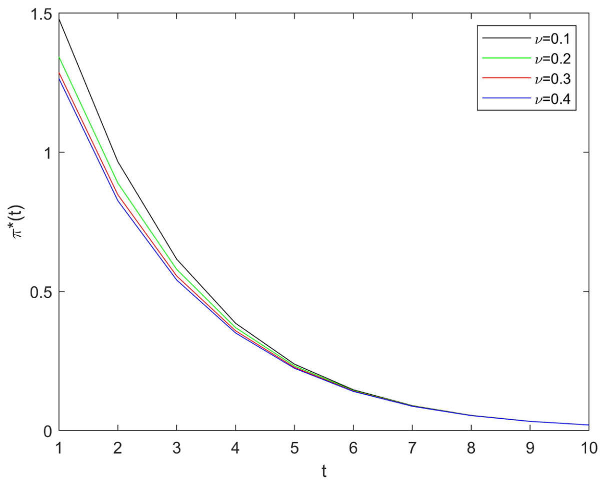

Figure 3. The influence of correlated claims on optimal investment strategy
图3. 相关索赔对最优投资策略的影响

5. 结论

本文考虑了保险公司在模型存在模糊性时以破产概率最小化为目标并参考相关索赔时的最优投资再保险问题。假设保险公司会参考历史索赔情况来对预期索赔进行预测，并依据预期索赔来制定保费。则在此背景下，本文考虑了保险公司的相关索赔以及初始盈余对最优投资再保险策略的影响，并得到了相应的最优策略以及值函数的表达式。

致　谢

衷心感谢审稿人提出的意见和建议。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11401436)；天津市高等学校科技发展计划项目(JW1714)。

参考文献

[1] Shou, C., Hu, D. and Wang, H. (2017) Optimal Reinsurance Problems with Extrapolative Claim Expectation. *Optimal Control Applications & Methods*, **39**, 1-15. https://doi.org/10.1002/oca.2335

[2] Chen, Z. and Yang, P. (2020) Robust Optimal Reinsurance-Investment Strategy with Price Jumps and Correlated Claims. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **92**, 27-46. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.03.001

[3] David Promislow, S. and Young, V.R. (2005) Minimizing the Probability of Ruin When Claims Follow Brownian Motion with Drift. *North American Actuarial Journal*, **9**, 110-128. https://doi.org/10.1080/10920277.2005.10596214

[4] Cao, Y. and Zeng, X. (2012) Optimal Proportional Reinsurance and Investment with Minimum Probability of Ruin. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 5433-5438. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.031

[5] 王雨薇，荣喜民. 最小化破产概率的保险人鲁棒投资再保险策略研究[J]. 经济数学, 2020, 37(4): 1-10.

[6] 陈龙，王秀莲. 一类扩散模型下绝对破产概率的最小化[J]. 天津师范大学学报：自然科学版, 2021, 41(3): 11-16.

[7] 曹琪，王秀莲. 投资-超额索赔再保险下破产概率的最小化[J]. 天津师范大学学报：自然科学版，2021(2): 15-18.

https://doi.org/10.31193/SSAP.J.ISSN.2096-6695.2020.03.07

[8] Han, X., Liang, Z. and Yuen, K.C. (2021) Minimizing the Probability of Absolute Ruin under the Mean-Variance Premium Principle. *Optimal Control Applications and Methods*, **42**, 786-806. https://doi.org/10.1002/oca.2702

[9] Han, X., Liang, Z., Yuen, K.C., *et al*. (2020) Minimizing the Probability of Absolute Ruin under Ambiguity Aversion. *Applied Mathematics & Optimization*, **84**, 2495-2525. https://doi.org/10.1007/s00245-020-09714-y

[10] Liang, X. and Young, V.R. (2018) Minimizing the Probability of Ruin: Two Riskless Assets with Transaction Costs and Proportional Reinsurance. *Statistics & Probability Letters*, **140**, 167-175. https://doi.org/10.1016/j.spl.2018.05.005

[11] Li, D. and Young, V.R. (2019) Optimal Reinsurance to Minimize the Discounted Probability of Ruin under Ambiguity. *Insurance Mathematics and Economics*, **87**, 143-152. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2019.04.009

[12] Zhou, M., Yuen, K.C. and Yin, C.C. (2017) Optimal Investment and Premium Control in a Nonlinear Diffusion Model. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **33**, 945-958. https://doi.org/10.1007/s10255-017-0709-7

[13] 赵玉莹. 模糊厌恶下危险和安全区域的最优投资和再保险策略[D]: [硕士学位论文]. 济宁: 曲阜师范大学, 2021.

[14] 郑梦佳. 多维风险资产及模糊厌恶下最小化破产概率的最优投资再保险策略[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京师范大学, 2019.

[15] Fleming, W.H. and Soner, H.M. (2006) Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Springer, New York.