

基于 $l_1 - \alpha l_2$ 最小化的部分支集已知的信号重建

武思琪^{*#}, 宋儒瑛

太原师范学院数学系, 山西 晋中

收稿日期: 2022年7月24日; 录用日期: 2022年8月17日; 发布日期: 2022年8月26日

摘要

压缩感知中测量矩阵的限制等距性在一定条件下可以确保重建稀疏信号。文章在 $l_1 - \alpha l_2$ ($0 < \alpha \leq 1$) 最小化问题模型下, 根据已知信号的先验支撑信息, 利用测量矩阵的限制等距性, 研究了三种噪声(高斯噪声、脉冲噪声、均匀噪声)情形下信号恢复的充分条件。这些条件直观地揭示了测量矩阵的限制等距性和信号恢复之间的密切关系。

关键词

压缩感知, 信号恢复, $l_1 - \alpha l_2$ 最小化, 限制等距性, 部分支集已知

Signal Reconstruction with Known Partial Support Based on $l_1 - \alpha l_2$ Minimization

Siqi Wu^{*#}, Ruying Song

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: Jul. 24th, 2022; accepted: Aug. 17th, 2022; published: Aug. 26th, 2022

Abstract

The restricted isometry property of the measurement matrix in compressed sensing can ensure the reconstruction of sparse signals under certain conditions. In this paper, the sufficient conditions for signal recovery under three kinds of noise (Gaussian noise, impulse noise and uniform

^{*}第一作者。

[#]通讯作者。

noise) are studied according to the known prior support information of the signal and the restricted isometry property of the measurement matrix under $\ell_1 - \alpha\ell_2$ ($0 < \alpha \leq 1$) minimization model. These conditions intuitively reveal the close relationship between the restricted isometry property of the measurement matrix and signal recovery.

Keywords

Compressed Sensing, Signal Recovery, $\ell_1 - \alpha\ell_2$ Minimization, Restricted Isometry Property, Partial Support Is Known

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

压缩感知的目标之一是研究从线性测量值 $y = Ax + e$ 中恢复稀疏或可压缩信号 $x \in \mathbb{R}^n$, 其中 A 是一个 $m \times n$ 测量矩阵 ($m \ll n$), e 是一个噪声向量。已经有许多文章介绍和研究了信号恢复方法。例如: 凸 ℓ_1 最小化[1] [2] [3] [4] [5], 非凸 ℓ_p ($0 < p < 1$) 最小化[6] [7] [8], 非凸 ℓ_{1-2} 最小化[9]-[14]。

为了从 $y = Ax + e$ 中恢复信号 x , 最直观的方法是通过求解 ℓ_0 最小化问题找到最稀疏信号:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_0 \quad \text{s.t.} \quad b - Ax \in B, \quad (1)$$

其中 $\|x\|_0$ 表示 x 中非零项的个数, B 是由误差结构决定的一个有界集。然而问题(1)是NP-难, 因此在高维情形下计算上是不可行的。为了获得式(1)的(近似)解, 因此文献[1]提出了有约束的 ℓ_1 最小化问题作为式(1)的一个凸松弛, 即

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_1 \quad \text{s.t.} \quad b - Ax \in B, \quad (2)$$

近几年, 文献[10] [15]提出了从 $y = Ax + e$ 中恢复 $x \in \mathbb{R}^n$ 的非凸 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ ($0 < \alpha \leq 1$) 最小化方法。

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_1 - \alpha \|x\|_2 \quad \text{s.t.} \quad b - Ax \in B, \quad (3)$$

很明显, 当 $\alpha = 1$ 时, 式(3)可简化为 ℓ_{1-2} 最小化。事实上, 非凸 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ 最小化方法在稀疏信号恢复问题上优于许多现存的压缩感知求解方法[14] [16] [17]。其中, 文献[14]说明了用 $\alpha = 1$ 时的 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ 最小化方法得到基于测量矩阵限制等距性的信号恢复的充分条件要优于许多现存的压缩感知求解方法得到的类似条件; 文献[16] [17]使用了一种分解向量的新方法, 说明了在脉冲噪声、均匀噪声下利用 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ 最小化方法恢复信号的性能优于许多现存的压缩感知求解方法。在实际应用中, 信号恢复通常会利用自身的一些先验信息来提高恢复的效率, 减少测量次数, 文献[18] [19] [20]证明了这类方法可以提高恢复的性能。其中, 文献[18]基于此类方法提出了一种改进的基追踪算法, 证明了该方法能够更好地恢复信号; 文献[19]证明了当信号的先验支撑度至少为50%时, 用标准 ℓ_1 最小化方法得到信号恢复的充分条件要弱于类似条件, 同时证明在附加条件下重建的误差上界更小; 文献[20]证明了当信号的部分支集已知时, 使用 ℓ_p ($0 < p < 1$) 最小化来恢复稀疏和可压缩信号提高了性能, 并且重建信号所需的样本数较少。正如 Blanchard 和 Thompson [21] 指出的, 在某些情况下, 更高阶的高斯随机矩阵可以满足基于高阶限制等距性的充分条件。因此, 获得基于高阶限制等距性的改进的充分条件具有理论和实践意义。

文章感兴趣的是利用 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ 最小化方法对部分支撑已知的信号进行恢复的问题。现考虑如下约束优化问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x_{T^c}\|_1 - \alpha \|x_{T^c}\|_2 \quad \text{s.t. } b - Ax \in B, \quad (4)$$

其中, B 取决于噪声的类型, 如高斯噪声、脉冲噪声、均匀噪声。特别地, 在无噪声情形下 ($B = \{0\}$) 有:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x_{T^c}\|_1 - \alpha \|x_{T^c}\|_2 \quad \text{s.t. } b = Ax, \quad (5)$$

其中, T 为 x 的部分已知支撑, $T^c = [1, 2, \dots, n]/T$ 。

受文献[14] [16] [17]的启发, 文章使用将向量分解为稀疏向量的新方法, 讨论了 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ ($0 < \alpha \leq 1$) 最小化模型下, 关于部分支撑信息已知的信号的恢复问题, 尽可能有效地使用了限制等距性条件。据我们所知, 这是首篇系统研究三种噪声下部分支撑信息已知的信号恢复的文章。

2. 预备知识

首先引入一些定义[16] [22]和引理[13] [14] [16] [17] [23]来为文章的主要结果作铺垫。

定义1 [16]对于 $0 < p \leq 1$ 或 $p = 2$, $s \in \mathbb{Z}_+$, 我们将相对于测量矩阵 A 的 s 阶 (ℓ_2, ℓ_p) 受限等距常数对 $(\delta_s^{lb}, \delta_s^{ub})$ 定义为: 对所有 s -稀疏信号 x , 使得

$$(1 - \delta_s^{lb}) \|x\|_2^p \leq \|Ax\|_p^p \leq (1 + \delta_s^{ub}) \|x\|_2^p \quad (6)$$

成立的最小数 δ_s^{lb} 和 δ_s^{ub} 。若对于相当大的 s , 式(6)中 δ_s^{lb} 和 δ_s^{ub} 是最小的, 则称 A 满足 (ℓ_2, ℓ_p) -RIP(简称: 限制等距性)。

定义2 [16]若对所有 s -稀疏向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 即 $\|x\|_0 \leq s$ (s 是一个整数), 使得

$$(1 - \delta_s) \|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|x\|_2^2 \quad (7)$$

成立 ($\delta_s \in [0, 1)$), 则称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满足 s 阶 (ℓ_2, ℓ_2) -RIP。最小常数 δ_s 被称为限制等距常数。

定义3 [22]矩阵 A 的相干性 $\mu(A)$ 是 A 各列之间相互关联的最大绝对值, 即

$$\mu(A) := \max_{i \neq j} \frac{|\langle A_i, A_j \rangle|}{\|A_i\|_2 \|A_j\|_2}.$$

下面引理1是从文献([13], 定理3.3)的证明中引出的一个引理, 它是 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ ($0 < \alpha \leq 1$) 在信号的部分支撑已知的假设下的一个修正的锥约束不等式。

为叙述方便, 在这里对符号进行说明: 向量 $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$, 其中 x 是原始信号, \hat{x} 是式(4)的解。令 $h = \hat{x} - x$, T 是信号 x 的已知支撑 ($|T| = r$), T_0 是 h 中 $s \in \mathbb{Z}_+$ 个最大绝对值项组成的指标集, T_1 是 $h_{T_0^c}$ 中 $k \in \mathbb{Z}_+$ 个最大绝对值项组成的指标集, $T_{01} = T \cup T_0 \cup T_1$, $T_{01}^c \subseteq [n]$ 是 T_{01} 的补集。

引理1对任意向量 $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$, 令 $h = \hat{x} - x$ 。假设 $\|\hat{x}\|_{\alpha, 1-2} \leq \|x\|_{\alpha, 1-2}$, 则

$$\|h_{T_0^c}\|_1 \leq \|h_{T_0}\|_1 + 2 \|x_{T_0^c}\|_1 + \alpha \|h\|_2, \quad (8)$$

$$\|h_{T_0^c}\|_1 - \alpha \|h_{T_0^c}\|_2 \leq \|h_{T_0}\|_1 + 2 \|x_{T_0^c}\|_1 + \alpha \|h_{T_0}\|_2, \quad (9)$$

特别地, 当 x 是 s -稀疏时, 得到

$$\|h_{T_0^c}\|_1 \leq \|h_{T_0}\|_1 + \alpha \|h\|_2, \tag{10}$$

$$\|h_{T_0^c}\|_1 - \alpha \|h_{T_0^c}\|_2 \leq \|h_{T_0}\|_1 + \alpha \|h_{T_0}\|_2, \tag{11}$$

引理2是 $\|x\|_1 - \alpha \|x\|_2$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) 的基本性质。

引理2 [23]对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 以下陈述成立:

1) 对 $0 \leq \alpha \leq 1$, 令 $T = \text{supp}(x)$ 且 $\|x\|_0 = s$, 则

$$(s - \alpha\sqrt{s}) \min_{j \in T} |x_j| \leq \|x\|_1 - \alpha \|x\|_2 \leq (\sqrt{s} - \alpha) \|x\|_2. \tag{12}$$

2) 令 $S, S_1, S_2 \subseteq [n]$ 满足 $S = S_1 \cup S_2$ 和 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, 则

$$\|x_{S_1}\|_1 - \alpha \|x_{S_1}\|_2 + \|x_{S_2}\|_1 - \alpha \|x_{S_2}\|_2 \leq \|x_S\|_1 - \alpha \|x_S\|_2. \tag{13}$$

在信号的部分支集已知的假设下, 文献([17], 引理3)、文献([16], 引理2.6)容易修正为如下引理3和引理4。

引理3 假设 $\|\hat{x}\|_{\alpha,1-2} \leq \|x\|_{\alpha,1-2}$ 。令 $h = \hat{x} - x$, $T_{01} = T \cup T_0 \cup T_1$, 其中 T 是信号 x 的已知支集 ($|T| = r$), T_0 是 h 中 $s \in \mathbb{Z}_+$ 个最大绝对值项组成的指标集, T_1 是 $h_{T_0^c}$ 中 $k \in \mathbb{Z}_+$ 个最大绝对值项组成的指标集。那么

$$\|h_{T_0^c}\|_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(\|h_{T_{01}}\|_2 + \frac{2\|x_{T_0^c}\|_1 + \alpha \|h\|_2}{\sqrt{r+s}} \right), \tag{14}$$

且

$$\|h\|_2 \leq \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) \|h_{T_{01}}\|_2 + \frac{\|x_{T_0^c}\|_1}{\sqrt{t(r+s)}} + \frac{\alpha \|h\|_2}{2\sqrt{t(r+s)}}, \tag{15}$$

其中 $t = \frac{k}{r+s}$ 且 $T_{01}^c \subseteq [n]$ 是 T_{01} 的补集。

引理4 假设 $\|\hat{x}\|_{\alpha,1-2} \leq \|x\|_{\alpha,1-2}$ 。令 $h = \hat{x} - x$, $T_{01} = T \cup T_0 \cup T_1$, 其中 T 是信号 x 的已知支集 ($|T| = r$), T_0 是 h 中 $s \in \mathbb{Z}_+$ 个最大绝对值项组成的指标集, T_1 是 $h_{T_0^c}$ 中 $k \in \mathbb{Z}_+$ 个最大绝对值项组成的指标集, 矩阵 A 满足 $r+s+k$ 阶 (ℓ_2, ℓ_1) -RIP条件。那么

$$\|Ah\|_1 \geq \rho_k \|h_{T_{01}}\|_2 - \frac{2(1 + \delta_k^{ub}) \|x_{T_0^c}\|_1}{\sqrt{k} - \alpha}, \tag{16}$$

其中

$$\rho_k = 1 - \delta_{r+s+k}^{lb} - \frac{1 + \delta_k^{ub}}{a(r+s, k; \alpha)}$$

且 $a(r+s, k; \alpha) = \frac{\sqrt{k} - \alpha}{\sqrt{r+s} + \alpha}$ 。

引理5 [14]描述了基于 $\|x\|_1 - \|x\|_2$ 的任意稀疏向量的一个凸组合。

引理5 令向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|v\|_\infty \leq \theta$, 其中 θ 是一个正常数。假设 $\|v\|_{1-2} \leq (s - \sqrt{s})\theta$ (s 是一个正整数且 $s \leq |\text{supp}(v)|$)。那么 v 能被表达为 s -稀疏向量 $u^{(i)}$ 的一个凸组合, 即

$$v = \sum_{i=1}^N \lambda_i u^{(i)},$$

其中 N 是一个正整数,

$$0 < \lambda_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \quad (17)$$

$$\text{supp}(u^{(i)}) \subseteq \text{supp}(v), \quad \|u^{(i)}\|_0 \leq s, \quad \|u^{(i)}\|_\infty \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\theta,$$

且

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \|u^{(i)}\|_2^2 \leq \left(\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (s - \sqrt{s}) + 1 \right) \theta^2. \quad (18)$$

在信号的部分支集已知的假设下, 文献([17], 引理6)很容易修正为下面的引理6。

引理6 假设 $\|\hat{x}\|_{\alpha,1-2} \leq \|x\|_{\alpha,1-2}$ 。令 $h = \hat{x} - x$ 且

$$\chi = \frac{\sqrt{r+s+\alpha} \|h_{\overline{T_0}}\|_2}{\sqrt{r+s-1} \sqrt{r+s}} + \frac{2}{r+s-\sqrt{r+s}} \|x_{\overline{T_0^c}}\|_1, \quad (19)$$

其中 $s \geq 2$ 是一个正整数。并且定义两个指标集

$$W_1 = \left\{ i : \left| h_{\overline{T_0^c}}(i) \right| > \frac{\chi}{t-1} \right\}, \quad (20)$$

和

$$W_2 = \left\{ i : \left| h_{\overline{T_0^c}}(i) \right| \leq \frac{\chi}{t-1} \right\}, \quad (21)$$

其中 $t = 2$ 或 $t \geq 3$ 。然后 h_{W_2} 能被表达为 $(t(r+s) - (r+s) - |W_1|)$ -稀疏向量 $u^{(i)}$ 的一个凸组合, 即

$$h_{W_2} = \sum_{i=1}^N \lambda_i u^{(i)}, \quad (22)$$

其中 N 是一个正整数且对所有 i , λ_i 满足式(17)。且

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \|u^{(i)}\|_2^2 \leq \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (t(r+s) - (r+s) - \sqrt{t(r+s) - (r+s)}) + 1}{(t-1)^2} \chi^2. \quad (23)$$

3. 主要结论

信号会被各种噪声污染, 常见的噪声类型有: 高斯噪声、脉冲噪声、均匀噪声等。人们在恢复信号时, 需要消除噪声所带来的影响。 $\|A^T e\|_\infty$ 衡量噪声向量 $e = Ax - b$ 和 A 的列之间的相关性, 其中 e 可以是高斯、脉冲和均匀噪声。 ℓ_2 范数 $\|Ax - b\|_2$ 仅对处理高斯噪声有效, ℓ_1 范数 $\|Ax - b\|_1$ 仅对处理脉冲

噪声有效, ℓ_∞ 范数 $\|Ax - b\|_\infty$ 仅对处理均匀噪声有效。假设信号 x 不是稀疏向量, 现考虑以下三种噪声情形:

$$\textcircled{1} \quad B^{\ell^2}(\varepsilon) = \{e: \|e\|_2 \leq \varepsilon_1\}; \tag{24}$$

$$\textcircled{2} \quad B^{\ell^1}(\varepsilon) = \{e: \|e\|_1 \leq \varepsilon_1\}; \tag{25}$$

$$\textcircled{3} \quad B^{DS}(\varepsilon) = \{e: \|A^T e\|_\infty \leq \varepsilon_1\}. \tag{26}$$

定理1 考虑 $y = Ax + e$, 其中 $\|e\|_2 \leq \varepsilon_2$ ($\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$)。假设信号 x 的部分已知支撑是 T ($|T| = r$), 对于 $t \geq 3$ 、 $s \geq 2$, 若矩阵 A 满足:

$$\delta_{t(r+s)} < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\sqrt{r+s} + \alpha)^2 \left(\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (t(r+s) - (r+s) - \sqrt{t(r+s) - (r+s)}) + 1 \right)}{(r+s)(t-1)^2 (\sqrt{r+s} - 1)^2}}}, \tag{27}$$

则式(4)的解 \hat{x}^{ℓ^2} 满足:

$$\begin{aligned} \|\hat{x}^{\ell^2} - x\|_2 &\leq \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4(r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{r+s}}{\sqrt{r+s}}} + \frac{\alpha + \sqrt{2}}{2\sqrt{r+s}}\right) \frac{(1-\mu)\mu\sqrt{1+\delta_{t(r+s)}}}{\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ &\quad + \left(\left(\sqrt{r+s} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha\sqrt{r+s} + (r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{2}}{2}\right)\right) \left(\frac{2\delta_{t(r+s)}(1-2\mu)}{(\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)})(\sqrt{r+s} + \alpha)}\right) \\ &\quad + \sqrt{\frac{2(1-2\mu)\delta_{t(r+s)}}{(\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)})(\sqrt{r+s} + \alpha)^2}} + \frac{\sqrt{2(r+s)}}{2} \left)\frac{\|x_{T_0^c}\|_1}{\sqrt{r+s}}, \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\sqrt{r+s} + \alpha)^2 \left(\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (t(r+s) - (r+s) - \sqrt{t(r+s) - (r+s)}) + 1 \right)}{(r+s)(t-1)^2 (\sqrt{r+s} - 1)^2}} + 1}$ 。

证明 证明受文献[14]启发。定义 $h = \hat{x}^{\ell^2} - x$, 其中 \hat{x}^{ℓ^2} 是满足式(24)的式(4)的最小值, 这意味着 $\|y - A\hat{x}^{\ell^2}\|_2 \leq \varepsilon_1$, 又 $\|y - Ax\|_2 \leq \varepsilon_2$, 得到

$$\|Ah\|_2 \leq \|A\hat{x}^{\ell^2} - y\|_2 + \|y - Ax\|_2 \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \tag{29}$$

利用 $\|\hat{x}^{\ell^2}\|_{\alpha,1-2} \leq \|x\|_{\alpha,1-2}$ 和引理5, 得到

$$h_{w_2} = \sum_{i=1}^N \lambda_i u^{(i)}, \tag{30}$$

和

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \|u^{(i)}\|_2^2 \leq \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(t(r+s) - (r+s) - \sqrt{t(r+s) - (r+s)}\right) + 1}{(t-1)^2} \chi^2, \quad (31)$$

其中 $0 < \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$, 对所有 i , $u^{(i)}$ 是 $(t(r+s) - (r+s) - |W_1|)$ -稀疏向量且 W_1, W_2, χ 分别由式(20), 式(21), 式(19)定义。由式(19)中 χ 的定义, 可以推出

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \lambda_i \|u^{(i)}\|_2^2 &\leq \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(t(r+s) - (r+s) - \sqrt{t(r+s) - (r+s)}\right) + 1}{(t-1)^2} \\ &\times \left(\frac{(\sqrt{r+s} + \alpha)^2}{(r+s)(\sqrt{r+s} - 1)^2} \|h_{T_0}\|_2^2 + \frac{4(\sqrt{r+s} + \alpha)}{(r+s)(\sqrt{r+s} - 1)^2} \|h_{T_0}\|_2 \|x_{T_0^c}\|_1 + \frac{4}{(r+s)(\sqrt{r+s} - 1)^2} \|x_{T_0^c}\|_1^2 \right) \\ &= \frac{1 - 2\mu}{\mu^2} \left(\|h_{T_0}\|_2^2 + \frac{4\|h_{T_0}\|_2 \|x_{T_0^c}\|_1}{\sqrt{r+s} + \alpha} + \frac{4\|x_{T_0^c}\|_1^2}{(\sqrt{r+s} + \alpha)^2} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\text{其中 } \mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(t(r+s) - (r+s) - \sqrt{t(r+s) - (r+s)}\right) + 1}{(r+s)(t-1)^2 (\sqrt{r+s} - 1)^2}}}. \quad (33)$$

接下来, 由下式来估计 $\|h_{T_0} + h_{W_1}\|_2$ 的一个上界,

$$\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{4} \left\| A(h_{T_0} + h_{W_1} + \mu u^{(i)}) \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i \left\| A\left(\left(\frac{1}{2} - \mu\right)(h_{T_0} + h_{W_1}) - \frac{1}{2}\mu u^{(i)} + \mu h\right) \right\|_2^2. \quad (34)$$

由于 $h_{T_0} + h_{W_1} + \mu u^{(i)}$ 是 $t(r+s)$ -稀疏, $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$, $\text{supp}(u^{(i)}) \subseteq \text{supp}(h_{W_2}) \subseteq \text{supp}(h_{T_0})$ 且 $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, 不难检验

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{4} \left\| A(h_{T_0} + h_{W_1} + \mu u^{(i)}) \right\|_2^2 &\geq (1 - \delta_{t(r+s)}) \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{4} \|h_{T_0} + h_{W_1} + \mu u^{(i)}\|_2^2 \\ &= \frac{1 - \delta_{t(r+s)}}{4} \left(\|h_{T_0} + h_{W_1}\|_2^2 + \mu^2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \|u^{(i)}\|_2^2 \right), \end{aligned} \quad (35)$$

从文献([17], 引理6)的证明中可以得到 $|W_1| < (r+s)(t-1)$, 因此 $|\text{supp}(h_{T_0} + h_{W_1})| = (r+s) + |W_1|$, 又 $\sum_{i=1}^N \lambda_i u^{(i)} = h_{W_2} = h - h_{T_0} - h_{W_1}$, $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$, $\text{supp}(u^{(i)}) \subseteq \text{supp}(h_{W_2}) \subseteq \text{supp}(h_{T_0})$, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, 矩阵 A 满足 $t(r+s)$ 阶限制等距性, $\left(\frac{1}{2} - \mu\right)(h_{T_0} + h_{W_1}) - \frac{1}{2}\mu u^{(i)}$ 是 $t(r+s)$ -稀疏。综上, 推导出

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \lambda_i \left\| A \left(\left(\frac{1}{2} - \mu \right) (h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}) - \frac{1}{2} \mu u^{(i)} + \mu h \right) \right\|_2^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N \lambda_i \left\| A \left(\left(\frac{1}{2} - \mu \right) (h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}) - \frac{1}{2} \mu u^{(i)} \right) \right\|_2^2 + 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \left\langle A \left(\left(\frac{1}{2} - \mu \right) (h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}) - \frac{1}{2} \mu u^{(i)} \right), \mu A h \right\rangle + \mu^2 \|A h\|_2^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N \lambda_i \left\| A \left(\left(\frac{1}{2} - \mu \right) (h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}) - \frac{1}{2} \mu u^{(i)} \right) \right\|_2^2 + (1 - \mu) \mu \left\langle A (h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}), A h \right\rangle \tag{36} \\
 &\leq (1 + \delta_{t(r+s)}) \sum_{i=1}^N \lambda_i \left\| \left(\frac{1}{2} - \mu \right) (h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}) - \frac{1}{2} \mu u^{(i)} \right\|_2^2 + (1 - \mu) \mu \|A (h_{\bar{T}_0} + h_{W_1})\|_2 \|A h\|_2 \\
 &\leq (1 + \delta_{t(r+s)}) \left(\left(\frac{1}{2} - \mu \right)^2 \|h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}\|_2^2 + \frac{\mu^2}{4} \sum_{i=1}^N \lambda_i \|u^{(i)}\|_2^2 \right) + (1 - \mu) \mu \sqrt{1 + \delta_{t(r+s)}} \|h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}\|_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).
 \end{aligned}$$

应用式(34), 式(35)和式(36), 得到

$$\begin{aligned}
 & \left((1 + \delta_{t(r+s)}) \left(\frac{1}{2} - \mu \right)^2 - \frac{1 - \delta_{t(r+s)}}{4} \right) \|h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}\|_2^2 + \frac{\mu^2 \delta_{t(r+s)}}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i \|u^{(i)}\|_2^2 \\
 & + (1 - \mu) \mu \sqrt{1 + \delta_{t(r+s)}} \|h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}\|_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \geq 0.
 \end{aligned}$$

将式(32)代入上式, 且 $\|h_{\bar{T}_0}\|_2 \leq \|h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}\|_2$, 可以推导出

$$\begin{aligned}
 & (\mu^2 - \mu + (\mu - 1)^2 \delta_{t(r+s)}) \|h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}\|_2^2 + \left((1 - \mu) \mu \sqrt{1 + \delta_{t(r+s)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{2 \delta_{t(r+s)} (1 - 2\mu)}{\sqrt{r+s+\alpha}} \|x_{\bar{T}_0^c}\|_1 \right) \|h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}\|_2 \\
 & + \frac{2(1-2\mu)\delta_{t(r+s)}}{(\sqrt{r+s+\alpha})^2} \|x_{\bar{T}_0^c}\|_1^2 \geq 0. \tag{37}
 \end{aligned}$$

要使上式中的 $\|h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}\|_2$ 有解, 只需要保证 $\mu^2 - \mu + (\mu - 1)^2 \delta_{t(r+s)} < 0$ 成立, 即

$$\delta_{t(r+s)} < \frac{\mu}{1 - \mu} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\sqrt{r+s+\alpha})^2 \left(\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 (t(r+s) - (r+s) - \sqrt{t(r+s) - (r+s)}) + 1 \right)}{(r+s)(t-1)^2 (\sqrt{r+s-1})^2}}}.$$

考虑 $z \leq \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \leq \frac{b + \sqrt{ac}}{a}$ 满足二阶不等式 $az^2 - bz - c \leq 0$, 其中 $a, b, c > 0$. 现求解二阶不等式

(37), 得到

$$\begin{aligned}
 & \|h_{\bar{T}_0} + h_{W_1}\|_2 \\
 & (1 - \mu) \mu \sqrt{1 + \delta_{t(r+s)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \left(\frac{2 \delta_{t(r+s)} (1 - 2\mu)}{\sqrt{r+s+\alpha}} + \sqrt{\frac{2(1-2\mu)\delta_{t(r+s)}}{(\sqrt{r+s+\alpha})^2} (\mu - \mu^2 - (\mu - 1)^2 \delta_{t(r+s)})} \right) \|x_{\bar{T}_0^c}\|_1 \tag{38} \\
 & \leq \frac{\mu - \mu^2 - (\mu - 1)^2 \delta_{t(r+s)}}{\mu - \mu^2 - (\mu - 1)^2 \delta_{t(r+s)}}.
 \end{aligned}$$

由式(9)可以推导出 $\|h_{\bar{T}_0^c}\|_1 - \alpha \|h_{\bar{T}_0^c}\|_2 \leq \|h_{\bar{T}_0}\|_1 + 2 \|x_{\bar{T}_0^c}\|_1 + \alpha \|h_{\bar{T}_0}\|_2 \leq (\sqrt{r+s+\alpha}) \|h_{\bar{T}_0}\|_2 + 2 \|x_{\bar{T}_0^c}\|_1$, 且

$\|h_{T_0^c}^-\|_\infty \leq \frac{\|h_{T_0}^-\|_1}{s+r} \leq \frac{\|h_{T_0}^-\|_2}{\sqrt{r+s}}$ 。因此, 可以得到

$$\begin{aligned} \|h_{T_0^c}^-\|_2^2 &\leq \|h_{T_0^c}^-\|_1 \|h_{T_0^c}^-\|_\infty \\ &\leq \left(\alpha \|h_{T_0^c}^-\|_2 + (\sqrt{r+s} + \alpha) \|h_{T_0}^-\|_2 + 2 \|x_{T_0^c}^-\|_1 \right) \frac{\|h_{T_0}^-\|_2}{\sqrt{r+s}} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{r+s}} \|h_{T_0}^-\|_2 \|h_{T_0^c}^-\|_2 + \frac{\sqrt{r+s} + \alpha}{\sqrt{r+s}} \|h_{T_0}^-\|_2^2 + \frac{2 \|x_{T_0^c}^-\|_1 \|h_{T_0}^-\|_2}{\sqrt{r+s}}. \end{aligned}$$

进一步,

$$\left(\|h_{T_0^c}^-\|_2 - \frac{\alpha \|h_{T_0}^-\|_2}{2\sqrt{r+s}} \right)^2 \leq \left(\frac{\alpha^2}{4(r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{r+s}}{\sqrt{r+s}} \right) \|h_{T_0}^-\|_2^2 + \frac{2 \|x_{T_0^c}^-\|_1 \|h_{T_0}^-\|_2}{\sqrt{r+s}}.$$

由 $2|a||b| \leq \frac{(|a|+|b|)^2}{2}$, 可以得到

$$\begin{aligned} \|h_{T_0^c}^-\|_2 &\leq \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4(r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{r+s}}{\sqrt{r+s}}} + \frac{\alpha}{2\sqrt{r+s}} \right) \|h_{T_0}^-\|_2 + \sqrt{\frac{2 \|x_{T_0^c}^-\|_1 \|h_{T_0}^-\|_2}{\sqrt{r+s}}} \\ &\leq \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4(r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{r+s}}{\sqrt{r+s}}} + \frac{\alpha + \sqrt{2}}{2\sqrt{r+s}} \right) \|h_{T_0}^-\|_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \|x_{T_0^c}^-\|_1. \end{aligned} \tag{39}$$

综上, 利用 $\|h\|_2 = \sqrt{\|h_{T_0}^-\|_2^2 + \|h_{T_0^c}^-\|_2^2} \leq \|h_{T_0}^-\|_2 + \|h_{T_0^c}^-\|_2$ 和 $\|h_{T_0}^-\|_2 \leq \|h_{T_0}^- + h_{W_1}\|_2$, 得到

$$\begin{aligned} \|h\|_2 &\leq \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4(r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{r+s}}{\sqrt{r+s}}} + \frac{\alpha + \sqrt{2}}{2\sqrt{r+s}} \right) \|h_{T_0}^-\|_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \|x_{T_0^c}^-\|_1 \\ &\leq \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4(r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{r+s}}{\sqrt{r+s}}} + \frac{\alpha + \sqrt{2}}{2\sqrt{r+s}} \right) \frac{(1-\mu)\mu\sqrt{1+\delta_{t(r+s)}}}{\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ &\quad + \left(\left(\sqrt{r+s} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha\sqrt{r+s} + (r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{2\delta_{t(r+s)}(1-2\mu)}{(\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)}) (\sqrt{r+s} + \alpha)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{2(1-2\mu)\delta_{t(r+s)}}{(\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)}) (\sqrt{r+s} + \alpha)^2}} + \frac{\sqrt{2}(r+s)}{2} \right) \frac{\|x_{T_0^c}^-\|_1}{\sqrt{r+s}}, \end{aligned}$$

这就完成了证明。

注1 若 x 是精确 $r+s$ -稀疏, 即 $x_{T_0^c} = 0$, 由定理1得

$$\|\hat{x}^{\ell_2} - x\|_2 \leq \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4(r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{r+s}}{\sqrt{r+s}}} + \frac{\alpha + \sqrt{2}}{2\sqrt{r+s}} \right) \frac{(1-\mu)\mu\sqrt{1+\delta_{t(r+s)}}}{\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

特别地, 在无噪声情形下, $\hat{x}^{\ell_2} = x$, 其中 \hat{x}^{ℓ_2} 是满足 $B = \{0\}$ 的式(4)的最小值。

定理2 考虑 $y = Ax + e$, 其中 $\|e\|_1 \leq \varepsilon_2$ ($\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$)。假设信号 x 的部分已知支撑是 T ($|T| = r$), 对于 $t \geq 3$ 、 $s \geq 2$, 若矩阵 A 满足:

$$\delta_{t(r+s)}^{ub} + a(r+s, k; \alpha) \delta_{r+s+k}^{lb} < a(r+s, k; \alpha) - 1 \tag{40}$$

则式(4)的解 \hat{x}^{ℓ_1} 满足:

$$\begin{aligned} \|x - \hat{x}\|_2 &\leq \frac{(2\sqrt{t}+1)\sqrt{r+s}}{2\sqrt{t(r+s)}-\alpha} \left(\frac{1}{\rho_{t(r+s)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{2(1+\delta_{t(r+s)}^{ub})\|x_{T_0^c}\|_1}{\rho_{t(r+s)}(\sqrt{t(r+s)}-\alpha)} \right) + \frac{2}{2\sqrt{t(r+s)}-\alpha} \|x_{T_0^c}\|_1 \\ &= \frac{2}{2\sqrt{k}-\alpha} \left(1 + \frac{(2\sqrt{t}+1)(1+\delta_{t(r+s)}^{ub})\sqrt{r+s}}{\rho_{t(r+s)}(\sqrt{k}-\alpha)} \right) \|x_{T_0^c}\|_1 + \frac{(2\sqrt{t}+1)\sqrt{r+s}}{(2\sqrt{k}-\alpha)\rho_{t(r+s)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \end{aligned} \tag{41}$$

其中 $\rho_{t(r+s)} = 1 - \delta_{r+s+k}^{lb} - \frac{1 + \delta_{t(r+s)}^{ub}}{a(r+s, k; \alpha)}$, $a(r+s, k; \alpha) = \frac{\sqrt{k} - \alpha}{\sqrt{r+s} + \alpha}$ 。

证明 令 $h = \hat{x}^{\ell_1} - x$ 。由于 \hat{x}^{ℓ_1} 是满足式(25)的式(4)的最小值, 则 $\|b - A\hat{x}^{\ell_1}\|_1 \leq \varepsilon_1$ 且 $\|\hat{x}^{\ell_1}\|_{\alpha, 1-2} \leq \|x\|_{\alpha, 1-2}$ 。通过引理1中的式(8), 有

$$\|h_{T_0^c}\|_1 \leq \|h_{T_0}\|_1 + 2\|x_{T_0^c}\|_1 + \alpha \|h\|_2. \tag{42}$$

由 $\|e\|_1 = \|b - Ax\|_1 \leq \varepsilon_2$ 和 $\|b - A\hat{x}^{\ell_1}\|_1 \leq \varepsilon_1$, 可以得到

$$\|Ah\|_1 = \|A\hat{x}^{\ell_1} - Ax\|_1 \leq \|A\hat{x}^{\ell_1} - b\|_1 + \|b - Ax\|_1 \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \tag{43}$$

令 T_0 是 h 中 $s \in \mathbb{Z}_+$ 个最大绝对值项组成的指标集, T_1 是 $h_{T_0^c}$ 中 $k = t(r+s) \in \mathbb{Z}_+$ 个最大绝对值项组成的指标集且 $T_{01} = T \cup T_0 \cup T_1$ 。然后, 通过引理4的式(16)和式(43), 得到

$$\left(1 - \delta_{r+s+k}^{lb} - \frac{1 + \delta_{t(r+s)}^{ub}}{a(r+s, k; \alpha)} \right) \|h_{T_{01}}\|_2 - (1 + \delta_{t(r+s)}^{ub}) \frac{2\|x_{T_0^c}\|_1}{\sqrt{k} - \alpha} \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \tag{44}$$

其中 $a(r+s, k; \alpha) = \frac{\sqrt{k} - \alpha}{\sqrt{r+s} + \alpha} > 1$ 。进一步, 条件式(40)意味着

$$\rho_{t(r+s)} = 1 - \delta_{r+s+k}^{lb} - \frac{1 + \delta_{t(r+s)}^{ub}}{a(r+s, k; \alpha)} > 0.$$

那么, 由式(44)可以得到

$$\|h_{T_{01}}\|_2 \leq \frac{1}{\rho_{t(r+s)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{(1 + \delta_{t(r+s)}^{ub})\sqrt{r+s}}{\rho_{t(r+s)}(\sqrt{k} - \alpha)} \frac{2\|x_{T_0^c}\|_1}{\sqrt{r+s}}. \tag{45}$$

因为 $\|h\|_2 = \sqrt{\|h_{T_{01}}\|_2^2 + \|h_{T_{01}^c}\|_2^2}$, 所以现在需要估计 $\|h_{T_{01}}\|_2$ 的一个上界。假设 $|h_1| \geq \dots \geq |h_r| \geq \dots \geq |h_s| \geq \dots \geq |h_{s+k}| \geq \dots \geq |h_n|$, 其中 $k = t(r+s) \in \mathbb{Z}_+$ 。那么,

$$\begin{aligned}
\|h_{T_0^c}^-\|_2 &\leq \sqrt{\|h_{T_0^c}^-\|_1 \|h_{T_0^c}^-\|_\infty} \leq \sqrt{\left(\|h_{T_0^c}^-\|_1 - \sum_{j \in T_1} |h_j|\right) |h_{r+s+k}|} \\
&\leq \sqrt{\left(\|h_{T_0^c}^-\|_1 - k|h_{r+s+k}|\right) |h_{r+s+k}|} = \sqrt{-k \left(|h_{r+s+k}| - \frac{\|h_{T_0^c}^-\|_1}{2k} \right)^2 + \frac{\|h_{T_0^c}^-\|_1^2}{4k}} \leq \frac{\|h_{T_0^c}^-\|_1}{2\sqrt{k}}.
\end{aligned} \tag{46}$$

进一步, 由式(42)以及 $\|h_{T_0^c}^-\|_1 \leq \sqrt{r+s} \|h_{T_0^c}^-\|_2$ ($T_0^c = T \cup T_0 \cup T_1$) 得到

$$\begin{aligned}
\frac{\|h_{T_0^c}^-\|_1}{2\sqrt{k}} &\leq \frac{\|h_{T_0^c}^-\|_1 + 2\|x_{T_0^c}^-\|_1 + \alpha \|h\|_2}{2\sqrt{k}} \\
&\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r+s}{k}} \left(\|h_{T_0^c}^-\|_2 + \frac{2\|x_{T_0^c}^-\|_1 + \alpha \|h\|_2}{\sqrt{r+s}} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(\|h_{T_0^c}^-\|_2 + \frac{2\|x_{T_0^c}^-\|_1 + \alpha \|h\|_2}{\sqrt{r+s}} \right).
\end{aligned} \tag{47}$$

现将式(46)和式(47)代入 $\|h\|_2 = \sqrt{\|h_{T_0^c}^-\|_2^2 + \|h_{T_0^c}^-\|_1^2}$, 得到

$$\begin{aligned}
\|h\|_2 &\leq \sqrt{\|h_{T_0^c}^-\|_2^2 + \frac{1}{4t} \left(\|h_{T_0^c}^-\|_2 + \frac{2\|x_{T_0^c}^-\|_1 + \alpha \|h\|_2}{\sqrt{r+s}} \right)^2} \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) \|h_{T_0^c}^-\|_2 + \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{2\|x_{T_0^c}^-\|_1}{\sqrt{r+s}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{\alpha \|h\|_2}{\sqrt{r+s}},
\end{aligned} \tag{48}$$

由于 $0 \leq \alpha \leq 1$, $1 - \frac{\alpha}{2\sqrt{t}(r+s)} > 0$, 因此式(48)可化简为

$$\|h\|_2 \leq \frac{(2\sqrt{t}+1)\sqrt{r+s}}{2\sqrt{t}(r+s)-\alpha} \|h_{T_0^c}^-\|_2 + \frac{2}{2\sqrt{t}(r+s)-\alpha} \|x_{T_0^c}^-\|_1. \tag{49}$$

接下来, 将式(45)代入式(49)得到

$$\begin{aligned}
\|h\|_2 &\leq \frac{(2\sqrt{t}+1)\sqrt{r+s}}{2\sqrt{t}(r+s)-\alpha} \left(\frac{1}{\rho_{t(r+s)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{2(1+\delta_{t(r+s)}^{ub})\|x_{T_0^c}^-\|_1}{\rho_{t(r+s)}(\sqrt{t}(r+s)-\alpha)} \right) + \frac{2}{2\sqrt{t}(r+s)-\alpha} \|x_{T_0^c}^-\|_1 \\
&= \frac{2}{2\sqrt{t}(r+s)-\alpha} \left(1 + \frac{(2\sqrt{t}+1)(1+\delta_{t(r+s)}^{ub})\sqrt{r+s}}{\rho_{t(r+s)}(\sqrt{t}(r+s)-\alpha)} \right) \|x_{T_0^c}^-\|_1 + \frac{(2\sqrt{t}+1)\sqrt{r+s}}{(2\sqrt{t}(r+s)-\alpha)\rho_{t(r+s)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).
\end{aligned}$$

注2 若 x 是精确 $r+s$ -稀疏, 即 $x_{T_0^c}^- = 0$, 由定理2得

$$\|\hat{x}^{\ell_1} - x\|_2 \leq \frac{(2\sqrt{t+1})\sqrt{r+s}}{(2\sqrt{t(r+s)} - \alpha)\rho_{t(r+s)}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

特别地, 在无噪声情形下, $\hat{x}^{\ell_1} = x$, 其中 \hat{x}^{ℓ_1} 是满足 $B = \{0\}$ 的式(4)的最小值。

定理3 考虑 $y = Ax + e$, 其中 $\|A^T e\|_\infty \leq \varepsilon_2$ ($\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$)。假设信号 x 的部分已知支撑是 T ($|T| = r$), 对于 $t \geq 3$ 、 $s \geq 2$, 若矩阵 A 满足:

$$\delta_{t(r+s)} < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\sqrt{r+s} + \alpha)^2 \left(\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (t(r+s) - (r+s) - \sqrt{t(r+s) - (r+s)}) + 1 \right)}{(r+s)(t-1)^2 (\sqrt{r+s} - 1)^2}}}, \quad (50)$$

则式(4)的解 \hat{x}^{DS} 满足:

$$\begin{aligned} \|\hat{x}^{DS} - x\|_2 \leq & \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4(r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{r+s}}{\sqrt{r+s}}} + \frac{\alpha + \sqrt{2}}{2\sqrt{r+s}} \right) \frac{(1-\mu)\mu\sqrt{t(r+s)}}{\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ & + \left(\left(\sqrt{r+s} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha\sqrt{r+s} + (r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{2\delta_{t(r+s)}(1-2\mu)}{(\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)}) (\sqrt{r+s} + \alpha)} \right) \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{2(1-2\mu)\delta_{t(r+s)}}{(\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)}) (\sqrt{r+s} + \alpha)^2}} + \frac{\sqrt{2(r+s)}}{2} \right) \frac{\|x_{T_0^c}\|_1}{\sqrt{r+s}}. \end{aligned} \quad (51)$$

其中 $\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\sqrt{r+s} + \alpha)^2 \left(\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (t(r+s) - (r+s) - \sqrt{t(r+s) - (r+s)}) + 1 \right)}{(r+s)(t-1)^2 (\sqrt{r+s} - 1)^2}} + 1}$ 。

证明 定理3的证明和定理1的证明类似。定义 $h = \hat{x}^{DS} - x$, 其中 \hat{x}^{DS} 是满足式(26)的式(4)的最小值, 这意味着 $\|A^T (y - A\hat{x}^{DS})\|_\infty \leq \varepsilon_1$, 又 $\|A^T (y - Ax)\|_\infty \leq \varepsilon_2$, 得到

$$\|A^T Ah\|_\infty \leq \|A^T (A\hat{x}^{DS} - y)\|_\infty + \|A^T (y - Ax)\|_\infty \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (52)$$

来代替式(29)。因此,

$$\langle A(h_{T_0} + h_{W_1}), Ah \rangle = \langle h_{T_0} + h_{W_1}, A^T Ah \rangle \leq \|h_{T_0} + h_{W_1}\|_1 \|A^T Ah\|_\infty \leq \sqrt{t(r+s)} \|h_{T_0} + h_{W_1}\|_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (53)$$

将式(53)代入式(36)可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \lambda_i \left\| A \left(\left(\frac{1}{2} - \mu \right) (h_{T_0} + h_{W_1}) - \frac{1}{2} \mu u^{(i)} + \mu h \right) \right\|_2^2 \\ & \leq (1 + \delta_{t(r+s)}) \left(\left(\frac{1}{2} - \mu \right)^2 \|h_{T_0} + h_{W_1}\|_2^2 + \frac{\mu^2}{4} \sum_{i=1}^N \lambda_i \|u^{(i)}\|_2^2 \right) + (1-\mu)\mu\sqrt{t(r+s)} \|h_{T_0} + h_{W_1}\|_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \end{aligned}$$

证明的其余步骤几乎和定理1的证明相同, 这就得到结果

$$\begin{aligned} \|h\|_2 \leq & \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4(r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{r+s}}{\sqrt{r+s}} + \frac{\alpha + \sqrt{2}}{2\sqrt{r+s}}} \right) \frac{(1-\mu)\mu\sqrt{t(r+s)}}{\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ & + \left(\left(\sqrt{r+s} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha\sqrt{r+s} + (r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{2\delta_{t(r+s)}(1-2\mu)}{(\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)}) (\sqrt{r+s} + \alpha)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\frac{2(1-2\mu)\delta_{t(r+s)}}{(\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)}) (\sqrt{r+s} + \alpha)^2}} + \frac{\sqrt{2(r+s)}}{2} \right) \right) \frac{\|x_{T_0^c}\|_1}{\sqrt{r+s}}. \end{aligned}$$

注3 若 x 是精确 $r+s$ -稀疏, 即 $x_{T_0^c} = 0$, 由定理3得

$$\|\hat{x}^{DS} - x\|_2 \leq \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4(r+s)} + \frac{\alpha + \sqrt{r+s}}{\sqrt{r+s}} + \frac{\alpha + \sqrt{2}}{2\sqrt{r+s}}} \right) \frac{(1-\mu)\mu\sqrt{t(r+s)}}{\mu - \mu^2 - (\mu-1)^2 \delta_{t(r+s)}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

特别地, 在无噪声情形下, $\hat{x}^{DS} = x$, 其中 \hat{x}^{DS} 是满足 $B = \{0\}$ 的式(4)的最小值。

4. 结论

文章基于 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ ($0 < \alpha \leq 1$) 最小化模型, 使用分解向量的方法, 得到了三种不同噪声(高斯噪声、脉冲噪声、均匀噪声)情形下部分支撑信息已知的信号恢复的充分条件。文章的创新之处在于: 这些条件在推广了文献[14] [17]结果的同时, 还讨论了高斯噪声下的结果, 是目前第一篇在三种不同噪声情形下将分解向量方法和信号的先验支撑信息相结合的信号恢复的文章。文章的结果是对 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ ($0 < \alpha \leq 1$) 最小化模型下信号恢复的相关理论知识的补充, 使得研究者在信号恢复实践中有更多的选择。文章的不足之处在于仅围绕测量矩阵的限制等距性展开研究。未来的研究工作集中于利用 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ ($0 < \alpha \leq 1$) 最小化模型得到基于测量矩阵相干性的信号恢复的充分条件。

参考文献

- [1] Candès, E.J., Romberg, J.K. and Tao, T. (2006) Stable Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **59**, 1207-1223. <https://doi.org/10.1002/cpa.20124>
- [2] Donoho, D.L. (2006) Compressed Sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 1289-1306. <https://doi.org/10.1109/TIT.2006.871582>
- [3] Donoho, D.L., Elad, M. and Temlyakov, V.N. (2006) Stable Recovery of Sparse over Complete Representations in the Presence of Noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 6-18. <https://doi.org/10.1109/TIT.2005.860430>
- [4] Cai, T.T. and Zhang, A. (2014) Sparse Representation of a Polytope and Recovery of Sparse Signals and Low-Rank Matrices. *IEEE Transactions on Information Theory*, **60**, 122-132. <https://doi.org/10.1109/TIT.2013.2288639>
- [5] Zhang, R. and Li, S. (2018) A Proof of Conjecture on Restricted Isometry Property Constants $\delta_k \left(0 < t < \frac{4}{3} \right)$. *IEEE Transactions on Information Theory*, **64**, 1699-1705. <https://doi.org/10.1109/TIT.2017.2705741>
- [6] Chartrand, R. (2007) Exact Reconstruction of Sparse Signals via Nonconvex Minimization. *IEEE Signal Processing Letters*, **14**, 707-710. <https://doi.org/10.1109/LSP.2007.898300>
- [7] Chartrand, R. and Staneva, V. (2008) Restricted isometry Properties and Nonconvex Compressive Sensing. *Inverse Problems*, **24**, Article ID: 035020. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/24/3/035020>
- [8] Zhang, R. and Li, S. (2019) Optimal RIP Bounds for Sparse Signals Recovery via ℓ_p Minimization. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **47**, 566-584. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2017.10.004>
- [9] Ge, H.M., Wen, J.M. and Chen, W.G. (2018) The Null Space Property of the Truncated ℓ_{1-2} -Minimization. *IEEE Signal Processing Letters*, **25**, 1261-1265. <https://doi.org/10.1109/LSP.2018.2852138>

-
- [10] Lou, Y. and Yan, M. (2016) Fast $L_1 - L_2$ Minimization via a Proximal Operator. *Journal of Scientific Computing*, **74**, 767-785. <https://doi.org/10.1007/s10915-017-0463-2>
- [11] Wang, W.D. and Wang, J.J. (2019) An Improved Sufficient Condition of ℓ_{1-2} Minimisation for Robust Signal Recovery. *Electronics Letters*, **55**, 1199-1201. <https://doi.org/10.1049/el.2019.2205>
- [12] Wen, J., Weng, J., Tong, C., Ren, C. and Zhou, Z. (2019) Sparse Signal Recovery with Minimization of 1-Norm Minus 2-Norm. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **68**, 6847-6854. <https://doi.org/10.1109/TVT.2019.2919612>
- [13] Yan, L., Shin, Y. and Xiu, D. (2017) Sparse Approximation Using $\ell_1 - \ell_2$ Minimization and Its Application to Stochastic Collocation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **39**, A299-A254. <https://doi.org/10.1137/15M103947X>
- [14] Ge, H., Chen, W. and Ng, M.K. (2021) New Rip Analysis for $\ell_1 - \ell_2$ Minimization Methods. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **14**, 530-557. <https://doi.org/10.1137/20M136517X>
- [15] Lai, M.J., Xu, Y. and Yin, W. (2013) Improved Iteratively Reweighted Least Squares for Unconstrained Smoothed ℓ_q Minimization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **51**, 927-957. <https://doi.org/10.1137/110840364>
- [16] Li, P., Chen, W., Ge, H. and Ng, M.K. (2020) $\ell_1 - \alpha\ell_2$ Minimization Methods for Signal and Image Reconstruction with Impulsive Noise Removal. *Inverse Problems*, **36**, Article ID: 055009. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab750c>
- [17] Ge, H. and Li, P. (2022) The Dantzig Selector: Recovery of Signal via $\ell_1 - \alpha\ell_2$ Minimization. *Inverse Problems*, **38**, Article ID: 015006. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/ac39f8>
- [18] Jacques, L. (2010) A Short Note on Compressed Sensing with Partially Known Signal Support. *Signal Processing*, **90**, 3308-3312. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2010.05.025>
- [19] Chen, W.G. and Li, Y.L. (2019) Recovery of Signals under the Condition on RIC and ROC via Prior Support Information. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **46**, 417-430. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2018.02.003>
- [20] Ince, T., Nacaroglu, A. and Watsuji, N. (2013) Nonconvex Compressed Sensing with Partially Known Signal Support. *Signal Processing*, **93**, 338-344. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2012.07.011>
- [21] Blanchard, J.D. and Thompson, A. (2010) On Support Sizes of Restricted Isometry Constants. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **29**, 382-390. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2010.05.001>
- [22] Donoho, D.L. and Huo, X. (2001) Uncertainty Principles and Ideal Atomic Decomposition. *IEEE Transactions on Information Theory*, **47**, 2845-2862. <https://doi.org/10.1109/18.959265>
- [23] Yin, P., Lou, Y., He, Q. and Xin, J. (2015) Minimization of ℓ_{1-2} for Compressed Sensing. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **37**, A536-A563. <https://doi.org/10.1137/140952363>