Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(8), 5750-5759
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.118607

凸约束优化问题的杂交三阶投影HS-PRP方法

周姣利

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2022年7月15日；录用日期：2022年8月9日；发布日期：2022年8月18日

摘 要

本文提出了一种杂交三阶投影HS-PRP共轭梯度法求解凸约束优化问题并证明了该算法的全局收敛性，该方法是求解无约束优化问题的三阶HS共轭梯度法的推广。数值实验结果表明，该算法是有效的。

关键词

投影，共轭梯度法，线搜索，全局收敛

A Hybrid Three-Term Projected HS-PRP Method for Optimization with Convex Constraint

Jiaoli Zhou

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Jul. 15th, 2022; accepted: Aug. 9th, 2022; published: Aug. 18th, 2022

Abstract

In this paper, we propose a hybrid third-term projected HS-PRP conjugate gradient method for solving convex constrained optimization problems and establish its global convergence, which is a generalization of the third-term HS conjugate gradient method for unconstrained optimization. Numerical experimental results show that the algorithm is effective.

Keywords

Projected, Conjugate Gradient Method, Line Search, Global Convergence

文章引用: 周姣利. 凸约束优化问题的杂交三阶投影 HS-PRP 方法[J]. 应用数学进展, 2022, 11(8): 5750-5759.
DOI: 10.12677/aam.2022.118607

1. 引言

自共轭梯度法被提出以来，因其具有良好的收敛性质，且所需存储量小，因此被广泛用于求解大规模无约束优化问题。

共轭梯度法的基本迭代格式如下：

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & k = 0 \\ -g_k + \beta_k d_k, & k > 0 \end{cases},$$

其中 α_k 为步长因子，由某种线搜索确定； d_k 为搜索方向， β_k 为共轭参数， $g_k = \nabla f(x_k)$。

共轭参数 β_k 的经典选取方式有 Fletcher-Reeves [1]，Polak-Ribière-Polyak [2]，Hestenes-Stiefel [3]，Dai-Yuan [4]，Conjugate Descent [5]，Liu-Storey [6]六种，其具体表达式如下：

$$\beta_k^{FR} = \frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2}, \quad \beta_k^{PRR} = \frac{g_k^{\mathrm{T}}(g_k - g_{k-1})}{\|g_{k-1}\|^2}, \quad \beta_k^{HS} = \frac{g_k^{\mathrm{T}}(g_k - g_{k-1})}{d_{k-1}^{\mathrm{T}}(g_k - g_{k-1})},$$

$$\beta_k^{DY} = \frac{\|g_k\|^2}{d_{k-1}^{\mathrm{T}}(g_k - g_{k-1})}, \quad \beta_k^{CD} = -\frac{\|g_k\|^2}{g_{k-1}^{\mathrm{T}} d_{k-1}}, \quad \beta_k^{LS} = -\frac{g_k^{\mathrm{T}}(g_k - g_{k-1})}{g_{k-1}^{\mathrm{T}} d_{k-1}}.$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 Euclidean 范数， $y_{k-1} = g_k - g_{k-1}$。由于分子不同，可将这六种经典的共轭梯度法分为两类。第一类如 FR、CD 和 DY 方法，其共轭参数 β_k 有共同的分子 $\|g_k\|^2$，虽然它们具有良好的全局收敛性，但数值表现一般；第二类如 PRP、HS 和 LS 方法，其共轭参数 β_k 有共同的分子 $g_k^{\mathrm{T}}(g_k - g_{k-1})$，虽然它们拥有良好的数值表现，但对全局收敛的条件要求较强。为得到数值实验和理论结果都较好的共轭梯度法，许多学者对这些经典方法做了修正[7] [8] [9] [10]。

2007 年，Zhang 等人在[11] [12] [13]的基础上，提出了三阶 HS 共轭梯度法[14]，即 TTHS 方法，搜索方向 d_k 的取法如下：

$$d_k = -g_k + \beta_k^{HS} d_{k-1} + \theta_k y_{k-1}, \quad \theta_k = \frac{g_k^{\mathrm{T}} d_{k-1}}{d_{k-1}^{\mathrm{T}} y_{k-1}}.$$

该方法的优点在于：生成的搜索方向 d_k 总满足 $g_k^{\mathrm{T}} d_k = -\|g_k\|^2$，即不依赖任何线搜索而具有充分下降性。为了得到 TTHS 方法在标准 Wolf 线搜索下的全局收敛性，Zhang 等人提出了以下两种算法。一种是截断 TTHS 方法(CTTHS 方法)：

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & \text{if } s_k^{\mathrm{T}} y_k \ge \varepsilon_1 \|g_k\|^r s_k^{\mathrm{T}} s_k, \\ -g_k + \beta_k^{HS} d_{k-1} + \theta_k y_{k-1}, & \text{if } s_k^{\mathrm{T}} y_k \ge \varepsilon_1 \|g_k\|^r s_k^{\mathrm{T}} s_k, \end{cases}$$

其中 ε_1 和 γ 是任意正常数。另一种是改进的 TTHS 方法(MTTHS 方法)：

$$d_k = \begin{cases} -g_k & \text{if } k = 0, \\ -g_k + \beta_k^{MHS} d_{k-1} - \theta_k^M z_{k-1} & \text{if } k > 0, \end{cases}$$

其中

$$\beta_k^{MHS}=\frac{g_k^{\mathrm{T}}z_{k-1}}{d_{k-1}^{\mathrm{T}}z_{k-1}},\quad \theta_k^{M}=\frac{g_k^{\mathrm{T}}d_{k-1}}{d_{k-1}^{\mathrm{T}}z_{k-1}},\quad z_{k-1}=y_{k-1}+t\left\|g_k\right\|^{\gamma}s_{k-1}.$$

t 和 γ 为任意正常数，$y_{k-1}=g_k-g_{k-1}$，$s_{k-1}=x_k-x_{k-1}$。

为保证 MTTHS 方法在修改的 Armijo 线搜索下的全局收敛性，考虑做如下修改：

$$d_k=\begin{cases}-g_k & \text{if } k=0,\\ -g_k+\beta_k^{MHS}d_{k-1}-\theta_k^{M}z_{k-1} & \text{if } k>0,\end{cases}$$

其中

$$\beta_k^{MHS}=\frac{g_k^{\mathrm{T}}z_{k-1}}{d_{k-1}^{\mathrm{T}}z_{k-1}},\quad \theta_k^{M}=\frac{g_k^{\mathrm{T}}d_{k-1}}{d_{k-1}^{\mathrm{T}}z_{k-1}},\quad z_k=y_k+t_ks_k,$$

其中

$$y_k=g_{k+1}-g_k,\quad s_k=x_{k+1}-x_k,\quad r\ge 0,\quad t_k=1+\max\left\{\frac{-y_k^{\mathrm{T}}s_k}{\left\|s_k\right\|^2},0\right\}.$$

1990 年，Touati-Ahmed 和 Storey 首次引入了杂交共轭梯度法[15]，其共轭参数 β_k 的取法为：$\beta_k^{TS}=\max\left\{0,\min\left\{\beta_k^{FR},\beta_k^{PRP}\right\}\right\}$，杂交共轭梯度法的提出，使得共轭梯度法的理论性质和数值试验都表现得更佳。随后，许多学者对杂交共轭梯度法做了进一步研究，见文献[16] [17]。

在杂交共轭梯度法的启发下，本文考虑杂交三项 HS-PRP 共轭梯度法：

$$d_k=\begin{cases}-g_k & \text{if } k=0,\\ -g_k+\beta_ks_{k-1}-\theta_kz_{k-1} & \text{if } k>0,\end{cases}$$

其中

$$\beta_k=\frac{g_k^{\mathrm{T}}z_{k-1}}{\max\left\{s_{k-1}^{\mathrm{T}}z_{k-1},\mu\left\|g_{k-1}\right\|^2\right\}},\quad \theta_k=\frac{g_k^{\mathrm{T}}s_{k-1}}{\max\left\{s_{k-1}^{\mathrm{T}}z_{k-1},\mu\left\|g_{k-1}\right\|^2\right\}},\quad z_k=y_k+t_ks_k.$$

其中

$$y_k=g_{k+1}-g_k,\quad s_k=x_{k+1}-x_k,\quad t_k=1+\max\left\{\frac{-y_k^{\mathrm{T}}s_k}{\left\|s_k\right\|^2},0\right\}>0,\quad \mu\ \text{为任意正常数。}$$

我们注意到，上述共轭梯度法旨在求解无约束优化问题，该方法并不适合直接用于求解约束优化问题。2021 年，Zhou 提出了一种求解凸约束优化问题的投影 PRP 方法[18]，利用投影的性质证明了该算法在修改的 Armijo 线搜索下具有全局收敛性。本文的目的是推广杂交三阶 HS-PRP 共轭梯度法求解凸约束优化问题，并证明该算法在修改的 Armijo 线搜索下的全局收敛性。

本文其余部分组织如下：第二部分详细介绍了求解凸约束优化问题的杂交三阶投影 HS-PRP 共轭梯度法；第三部分证明该算法的全局收敛性；第四部分给出数值实验结果。

2. 杂交三阶投影 HS-PRP 共轭梯度法

本文的目的是推广求解无约束优化问题的杂交三阶 HS-PRP 共轭梯度法用于求解以下凸约束优化问题：

$$\min_{x\in\Omega} f(x). \tag{1}$$

其中 $\Omega \subseteq R^n$ 是闭凸集，$f(x)$ 为 $R^n \to R$ 的光滑函数。显然，若 x^* 是问题(1)的局部极小点，那么 x^* 一定是满足定义 2.1 的稳定点。

定义 2.1. $x^* \in \Omega$ 是问题(1)的稳定点当且仅当：$g(x^*)^{\mathrm{T}}(x-x^*) \ge 0$，$\forall x \in \Omega$。

定义 2.2. 从 R^n 到闭凸集 Ω 的投影算子为：

$$P_\Omega = \arg\min_{y\in\Omega}\|y-x\|. \tag{2}$$

令

$$r_k = P_\Omega(x_k - g_k) - x_k. \tag{3}$$

显然，x_k 是问题(1)的稳定点当且仅当 $r_k = 0$。

算法 1. (杂交三阶投影 HS-PRP 方法)

步 0. 取初始点 $x_0 \in \Omega$，$\delta > 0$，$\mu > 0$，$\rho \in (0,1)$，$0 < \lambda_{\min} < \lambda_{\max} < \infty$。选取一个正序列 $\{\eta_k\}$ 满足：$\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k \le \eta < \infty$。令

$$d_0 = -g_0,\ k := 0. \tag{4}$$

步 1. 若 $r_k = 0$，则停止计算；否则，转步 2。

步 2. 按如下公式计算 d_k

$$d_k = \begin{cases} -g_k & \text{if } k = 0, \\ -g_k + \beta_k s_{k-1} - \theta_k z_{k-1} & \text{if } k > 0, \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$\beta_k = \frac{g_k^{\mathrm{T}} z_{k-1}}{\max\left\{s_{k-1}^{\mathrm{T}} z_{k-1}, \mu\|g_{k-1}\|^2\right\}},\quad \theta_k = \frac{g_k^{\mathrm{T}} s_{k-1}}{\max\left\{s_{k-1}^{\mathrm{T}} z_{k-1}, \mu\|g_{k-1}\|^2\right\}},\quad z_k = y_k + t_k s_k. \tag{6}$$

其中

$$y_k = g_{k+1} - g_k,\quad s_k = x_{k+1} - x_k,\quad t_k = 1 + \max\left\{\frac{-y_k^{\mathrm{T}} s_k}{\|s_k\|^2}, 0\right\} > 0. \tag{7}$$

步 3. 计算 $\alpha_k = \max\{\sigma_k \rho^j, j = 0,1,2,\cdots\}$ 满足：

$$f\left(P_\Omega(x_k + \alpha_k d_k)\right) \le f(x_k) - \delta\|\alpha_k d_k\|^2 + \eta_k, \tag{8}$$

其中 $\sigma_k \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$。

步 4. 令 $x_{k+1} := P_\Omega(x_k + \alpha_k d_k)$，$k := k+1$，$s_k = x_{k+1} - x_k = P_\Omega(x_k + \alpha_k d_k) - x_k$，转步 1。

注 2.2.

1) 由(3)可知，若 $g_k = 0$，则 $r_k = 0$，则 x_k 是问题(1)的稳定点；

2) 若 $\max\left\{s_{k-1}^{\mathrm{T}} z_{k-1}, \mu\|g_{k-1}\|^2\right\} = 0$，则 $\|g_{k-1}\| = 0$，这也就意味着 x_{k-1} 是问题(1)的稳定点；

3) 由 d_k 的定义可知：

$$d_k^{\mathrm{T}} g_k = -\|g_k\|^2; \tag{9}$$

4) 由投影算子的连续性和 $\eta_k > 0$ 可知线搜索(8)对任意充分小的 $\alpha > 0$ 都成立。线搜索(8)来自文献[19]。

接下来我们将介绍投影算子的一些重要性质，这些性质对我们后面证明该算法的全局收敛性非常有用。引理 2.3 和引理 2.4 来自文献[20]。

引理 2.3. 若 $z\in\Omega$，则有：

$$\left(P_\Omega(x)-x\right)^{\mathrm{T}}\left(z-P_\Omega(x)\right)\ge 0,\quad \forall x\in R^n, \tag{10}$$

$$\left\|P_\Omega(x)-P_\Omega(y)\right\|\le\|x-y\|,\quad \forall x,y\in R^n, \tag{11}$$

引理 2.4. 对任意 $x\in\Omega$，$\dfrac{\left\|P_\Omega\left(x-\alpha g(x)\right)-x\right\|}{\alpha}$ 在 $\alpha>0$ 上非增。

引理 2.5. 对任意 $x_k\in\Omega$。有：

$$g_k^{\mathrm{T}}\left(x_k-P_\Omega\left(x_k-\alpha g_k\right)\right)\ge\frac{\left\|P_\Omega\left(x_k-\alpha g_k\right)-x_k\right\|^2}{\alpha},\quad \forall\alpha>0, \tag{12}$$

证明：由(10)和 $x_k\in\Omega$ 可知：

$$\begin{aligned}
&g_k^{\mathrm{T}}\left(x_k-P_\Omega\left(x_k-\alpha g_k\right)\right)\\
&=\frac{1}{\alpha}\left(x_k-P_\Omega\left(x_k-\alpha g_k\right)+P_\Omega\left(x_k-\alpha g_k\right)-\left(x_k-\alpha g_k\right)\right)^{\mathrm{T}}\left(x_k-P_\Omega\left(x_k-\alpha g_k\right)\right)\\
&=\frac{\left\|P_\Omega\left(x_k-\alpha g_k\right)-x_k\right\|^2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\left(P_\Omega\left(x_k-\alpha g_k\right)-\left(x_k-\alpha g_k\right)\right)^{\mathrm{T}}\left(x_k-P_\Omega\left(x_k-\alpha g_k\right)\right)\\
&\ge\frac{\left\|P_\Omega\left(x_k-\alpha g_k\right)-x_k\right\|^2}{\alpha}
\end{aligned}$$

证毕。

3. 全局收敛性

在这一部分，我们将讨论算法 1 在以下假设条件下的全局收敛性。首先，我们定义水平集：

$$\Omega_1=\left\{x\,\middle|\,f(x)\le f(x_0)+\eta\right\}\cap\Omega, \tag{13}$$

其中 η 满足(4)。显然 $x_k\in\Omega_1$ 对任意 $k\ge 0$ 都成立。

假设 A.

1) 由(13)定义的水平集 Ω_1 是有界的；

2) 存在 Ω_1 的某些凸邻域 N，使得梯度函数 $g(x)$ 在 $N\cap\Omega$ 上 Lipschitz 连续，即存在常数 $L>0$，使得：

$$\left\|g(x)-g(y)\right\|\le L\|x-y\|,\quad \forall x,y\in N\cap\Omega \tag{14}$$

由假设 A 可知存在常数 $M>0$，使得：

$$g(x)\le M,\quad \forall x\in N\cap\Omega \tag{15}$$

显然，由线搜索(8)和(4)我们可以得到：

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k d_k=0 \tag{16}$$

引理 3.1. 设 $\{x_k\}$ 是由算法 1 产生的序列且假设 A 成立，则对任意的 $k\ge 0$，有：

$$\|z_k\| \le \|y_k\| + t_k\|s_k\| \le (L+t_k)\|s_k\|. \tag{17}$$

$$\begin{aligned} s_k^{\mathrm{T}} z_k &= s_k^{\mathrm{T}} y_k + t_k\|s_k\|^2 \\ &= \begin{cases} s_k^{\mathrm{T}} y_k + \|s_k\|^2 \ge \|s_k\|^2, & s_k^{\mathrm{T}} y_k \ge 0 \\ s_k^{\mathrm{T}} y_k + \|s_k\|^2 - s_k^{\mathrm{T}} y_k = \|s_k\|^2, & s_k^{\mathrm{T}} y_k < 0 \end{cases}. \end{aligned} \tag{18}$$

由(18)可知：$s_k^{\mathrm{T}} z_k \ge \|s_k\|^2$。

引理 3.2. 若假设 A 成立，则存在常数 $C>0$ 使得：

$$\|d_k\| \le C, \quad \forall k \ge 0. \tag{19}$$

证明：由(5)、(6)、(15)、(17)、(18)可知：

$$\begin{aligned} \|d_k\| &\le \|g_k\| + \frac{2\|g_k\|\|z_{k-1}\|}{\max\left\{s_{k-1}^{\mathrm{T}} z_{k-1}, \mu\|g_{k-1}\|^2\right\}}\|s_{k-1}\| \\ &\le \|g_k\| + \frac{2\|g_k\|\|z_{k-1}\|}{s_{k-1}^{\mathrm{T}} z_{k-1}}\|s_{k-1}\| \\ &\le M + \frac{2M(L+t_{k-1})\|s_{k-1}\|}{\|s_{k-1}\|^2}\|s_{k-1}\| \\ &= M + 2M(L+t_{k-1}) \end{aligned}$$

令 $C = M + 2M(L+t_{k-1})$ 即得(19)，证毕。

定理 3.3. 设 $\{x_k\}$ 是由算法 1 产生的序列且假设 A 成立，则有：

$$\liminf_{k\to\infty}\|r_k\| = 0. \tag{20}$$

证明：反证法，假设结论不成立，则存在常数 $\tau>0$ 使得：

$$\|r_k\| \ge \tau, \quad \forall k \ge 0. \tag{21}$$

由(21)可知存在常数 $\varepsilon>0$，使得：

$$\|g_k\| \ge \varepsilon, \quad \forall k \ge 0. \tag{22}$$

否则存在无限子集 $K \subseteq \{0,1,2,\cdots\}$ 使得：

$$\lim_{k\in K, k\to\infty}\|r_k\| = \lim_{k\in K, k\to\infty}\|P_\Omega(x_k - g_k) - x_k\| \le \lim_{k\in K, k\to\infty}\|g_k\| = 0. \tag{23}$$

最后一个不等式由(11)和 $P_\Omega(x_k) = x_k$ 可得，因此上式与(21)矛盾，即(22)成立。

1) 若 $\limsup_{k\to\infty}\alpha_k > 0$，由(9)和(16)可得：$\liminf_{k\to\infty}\|g_k\| = 0$。这与(22)式矛盾。

2) 若 $\limsup_{k\to\infty}\alpha_k = 0$，则存在 $\alpha_k' = \dfrac{\alpha_k}{\rho}$ 不满足不等式(8)，即：

$$f\left(P_\Omega(x_k + \alpha_k' d_k)\right) - f(x_k) > -\delta\|\alpha_k' d_k\|^2 + \eta_k > -\delta\|\alpha_k' d_k\|^2. \tag{24}$$

由拉格朗日中值定理和引理 2.5 可得：

$$
\begin{aligned}
&\frac{f\left(P_\Omega\left(x_k+\alpha_k' d_k\right)\right)-f\left(x_k\right)}{\alpha_k'} \\
&=\frac{g\left(\xi_k\right)^{\mathrm{T}}\left(P_\Omega\left(x_k+\alpha_k' d_k\right)-x_k\right)}{\alpha_k'} \\
&=\frac{g_k^{\mathrm{T}}\left(P_\Omega\left(x_k-\alpha_k' g_k\right)-x_k\right)}{\alpha_k'}+\frac{\left(g\left(\xi_k\right)-g_k\right)^{\mathrm{T}}\left(P_\Omega\left(x_k+\alpha_k' d_k\right)-x_k\right)}{\alpha_k'} \\
&\quad+\frac{g_k^{\mathrm{T}}\left(P_\Omega\left(x_k+\alpha_k' d_k\right)-P_\Omega\left(x_k-\alpha_k' g_k\right)\right)}{\alpha_k'} \\
&=\frac{g_k^{\mathrm{T}}\left(P_\Omega\left(x_k-\alpha_k' g_k\right)-x_k\right)}{\alpha_k'}+\Delta_k \\
&\leq-\frac{\left\|P_\Omega\left(x_k-\alpha_k' g_k\right)-x_k\right\|^2}{\alpha_k'^2}+\Delta_k,
\end{aligned}
$$

其中 ξ_k 介于 x_k 和 $P_\Omega\left(x_k+\alpha_k' d_k\right)$ 之间。上述不等式结合(24)可得：

$$
\frac{\left\|P_\Omega\left(x_k-\alpha_k' g_k\right)-x_k\right\|^2}{\alpha_k'^2} \leq\left|\Delta_k\right|+\delta \alpha_k'\left\|d_k\right\|^2 . \tag{25}
$$

由(11)和(15)可得：

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta_k\right| &\leq\left\|g\left(\xi_k\right)-g_k\right\|\left\|\frac{P_\Omega\left(x_k+\alpha_k' d_k\right)-x_k}{\alpha_k'}\right\|+\left\|g_k\right\|\left\|\frac{P_\Omega\left(x_k+\alpha_k' d_k\right)-P_\Omega\left(x_k-\alpha_k' g_k\right)}{\alpha_k'}\right\| \\
&\leq\left\|g\left(\xi_k\right)-g_k\right\|\left\|d_k\right\|+M\left\|d_k+g_k\right\| \\
&\leq C\left\|g\left(\xi_k\right)-g_k\right\|+M\left\|d_k+g_k\right\|,
\end{aligned}
$$

由(5)、(6)、(11)、(15)、(17)、(22)以及 $\alpha_k \rightarrow 0$ 可得：

$$
\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty}\left\|d_k+g_k\right\| &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2\left\|g_k\right\|\left\|z_{k-1}\right\|}{\max \left\{s_{k-1}^T z_{k-1}, \mu\left\|g_{k-1}\right\|^2\right\}}\left\|s_{k-1}\right\| \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2M\left(L+t_{k-1}\right)\left\|s_{k-1}\right\|}{\mu\left\|g_{k-1}\right\|^2}\left\|s_{k-1}\right\| \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2M\left(L+t_{k-1}\right)\left\|\alpha_{k-1} d_{k-1}\right\|^2}{\mu \varepsilon^2} \\
&=0
\end{aligned} \tag{26}
$$

因此，由 $g(x)$ 的连续性和 $\alpha_k' \rightarrow 0$ 以及(26)可知：$\Delta_k \rightarrow 0$。

由(3)、(19)、(25)，引理 2.4 以及 $\alpha_k' \rightarrow 0$，我们可以得到：

$$
\left\|r_k\right\|^2=\left\|P_\Omega\left(x_k-g_k\right)-x_k\right\|^2 \leq \frac{\left\|P_\Omega\left(x_k-\alpha_k' g_k\right)-x_k\right\|^2}{\alpha_k'^2} \leq\left|\Delta_k\right|+\delta \alpha_k'\left\|d_k\right\|^2 \rightarrow 0 .
$$

这与(21)矛盾，证毕。

4. 数值实验

在这一部分我们将通过数值实验来验证本文所提出算法的有效性。实验测试在 PC 机上完成，PC 机

配置：联想，Intel(R) Core(TM) i7-8700 CPU @ 3.20GHz 3.19GHz，8Gb 内存，Windows10 操作系统，所有代码用 Matlab R2016b 编写并运行。

测试对象：函数来自文献[18]，表达式如下：

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i-1})^2+\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i(x_i-x_{i-1})^4+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}x.$$

约束集 $\Omega=\{x\,|-10\le x_i\le 10, i=1,2,\cdots,n\}$，其中 $\gamma_i\ge 0\,(i=1,2,\cdots,n-1)$ 为任意常数。

令 $\gamma=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-1}]^{\mathrm{T}}$。

测试参数：$\delta=0.1$，$\rho=0.1$，$\mu=1$，$\lambda_{\max}=\lambda_{\min}=1$，$\eta_k=0.5^k$。

初始点：$x_0=(-1.2,1,-1.2,1\cdots,-1.2,1)^{\mathrm{T}}$。

终止条件：迭代次数 $k\ge 500$ 或 $\|r_k\|_\infty\le 10^{-5}$，其中 $\|r_k\|_\infty$ 表示迭代终止时 r_k 的无穷范数。

采用本文提出的算法与 Zhou 在文献[18]中提出的投影 PRP 算法求解上述测试问题，分别记为算法 1 和算法 2，测试结果见表 1 和表 2。

Table 1. Test function with $\gamma=(1,2,\cdots,n-1)^{\mathrm{T}}$

表 1. 测试函数中 $\gamma=(1,2,\cdots,n-1)^{\mathrm{T}}$

	算法 1			算法 2		
n	迭代次数	$\|r_k\|_\infty$	运行时间	迭代次数	$\|r_k\|_\infty$	运行时间
100	59	4.8442e−06	0.012253	61	5.6059e−06	0.012401
500	60	5.9954e−06	0.034103	61	5.8328e−06	0.037267
1000	61	5.7462e−06	0.060199	66	5.5730e−06	0.068930
1500	61	5.6193e−06	0.086749	65	4.9437e−06	0.093655
2000	62	5.7995e−06	0.113949	67	5.7311e−06	0.135631
2500	62	5.6215e−06	0.143358	69	3.3973e−06	0.164831
3000	68	5.4984e−06	0.211251	67	5.3184e−06	0.235544
3500	64	5.0719e−06	0.226145	72	5.8803e−06	0.278549
4000	65	5.5317e−06	0.254342	64	4.8939e−06	0.279823
5000	63	5.4201e−06	0.323782	76	5.0309e−06	0.410873
8000	66	5.5433e−06	0.590516	78	5.9169e−06	0.690034
10,000	65	5.2372e−06	0.718816	78	5.0175e−06	0.866920

Table 2. Test function with $\gamma=\frac{1}{n}\left(1^2,2^2,\cdots,(n-1)^2\right)^{\mathrm{T}}$

表 2. 测试函数中 $\gamma=\frac{1}{n}\left(1^2,2^2,\cdots,(n-1)^2\right)^{\mathrm{T}}$

	算法 1			算法 2		
n	迭代次数	$\|r_k\|_\infty$	运行时间	迭代次数	$\|r_k\|_\infty$	运行时间
100	59	5.4539e−06	0.011914	63	5.3978e−06	0.012365

Continued

500	61	5.9797e−06	0.034167	68	5.8648e−06	0.040849
1000	61	6.0657e−06	0.061715	71	5.0363e−06	0.076477
1500	62	6.0061e−06	0.087842	70	5.5089e−06	0.102981
2000	61	5.9748e−06	0.111671	70	5.2283e−06	0.133247
2500	70	5.9399e−06	0.169478	73	5.2351e−06	0.186600
3000	66	5.8496e−06	0.208617	77	5.7209e−06	0.236102
3500	71	6.0309e−06	0.278274	76	5.2187e−06	0.30158
4000	72	5.8991e−06	0.326091	74	5.5217e−06	0.309192
5000	63	5.9061e−06	0.339857	73	4.3854e−06	0.405272
8000	65	5.1095e−06	0.541414	83	4.9824e−06	0.75573
10,000	67	5.2209e−06	0.708486	86	5.4213e−06	0.959144

由表 1 和表 2 的数据我们可以知道，在迭代次数和运行时间两个方面，本文提出的算法优于[18]提出的投影 PRP 方法。

5. 结束语

本文提出了一种求解凸约束优化问题的杂交三阶投影 HS-PRP 共轭梯度法，它是求解无约束优化问题的共轭梯度法的推广。利用投影的相关性质，我们证明了该算法在修改的 Armijo 线搜索下的全局收敛性。数值结果表明，本文所提出的算法较投影 PRP 算法更优。

参考文献

[1] Fletcher. R. and Reeves, C.M. (1964) Function Minimization by Conjugate Gradients. *The Computer Journal*, **7**, 149-154. https://doi.org/10.1093/comjnl/7.2.149

[2] Polyak, B.T. (1969) The Conjugate Gradient Method in Extreme problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **9**, 94-112. https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90035-4

[3] Hestenes, M.R. and Stiefel, E. (1952) Method of Conjugate Gradient for Solving Linear System. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **49**, 409-436. https://doi.org/10.6028/jres.049.044

[4] Dai, Y.H. and Yuan, Y. (1999) A Nonlinear Conjugate Gradient Method with a Strong Global Convergence Property. *SIAM Journal on Optimization*, **10**, 177-182. https://doi.org/10.1137/S1052623497318992

[5] Fletcher, R. (1987) Practical Methods of Optimization, Vol. 1: Unconstrained Optimization. Wiley & Sons, New York.

[6] Liu, Y. and Storey, C. (1991) Efficient Generalized Conjugate Gradient Algorithms, Part 1: Theory. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **69**, 129-137. https://doi.org/10.1007/BF00940464

[7] Zhou, W. and Li, D. (2014) On the Convergence Properties of the Unmodified PRP Method with a Non-Descent Line Search. Optimization *Methods Software*, **29**, 484-496. https://doi.org/10.1080/10556788.2013.811241

[8] Hager, W.W. and Zhang, H. (2005) A New Conjugate Gradient Method with Guaranteed Descent and an Efficient Line Search. *SIAM Journal on Optimization*, **16**, 170-192. https://doi.org/10.1137/030601880

[9] Gilbert, J.C. (1994) Convergence Properties of Conjugate Descent Method for Optimization. *SIAM Journal on Optimization*, **2**, 24-32.

[10] 杨萌, 王祥玲. 修正 HS 共轭梯度法的全局收敛性[J]. 桂林电子科技大学学报, 2009, 29(4): 300-302.

[11] Zhang, L., Zhou, W. and Li, D. (2006) A Descent Modified Polak-Ribière-Polyak Conjugate Gradient Method and Its Global Convergence. *IMA J Numerical Analysis*, **26**, 629-640. https://doi.org/10.1093/imanum/drl016

[12] Zhang, L., Zhou, W. and Li, D. (2006) Global Convergence of a Modified Fletcher Reeves Conjugate Gradient Method with Armijo-Type Line Search. *Numerische Mathematik*, **104**, 561-572. https://doi.org/10.1007/s00211-006-0028-z

[13] Li, D.H. and Fukushima, M. (2001) A Modified BFGS Method and Its Global Convergence in Nonconvex Minimiza-

tion. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **129**, 15-35. https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00540-9

[14] Zhang, L., Zhou, W. and Li, D. (2007) Some Descent Three-Term Conjugate Gradient Methods and Their Global Convergence. *Optimization Methods and Software*, **22**, 697-711. https://doi.org/10.1080/10556780701223293

[15] Touati-Ahmed, D. and Story, C. (1990) Global Convergent Hybrid Conjugate Gradient Method. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **64**, 379-397. https://doi.org/10.1007/BF00939455

[16] Dai, Y.H. and Yuan, Y. (2001) An Efficient Hybrid Conjugate Method for Unconstrained Optimization. *Annals of Operations Research*, **103**, 33-47. https://doi.org/10.1023/A:1012930416777

[17] Dai, Z.F. and Wen, F.H. (2015) Comments on Another Hybrid Conjugate Gradient Algorithm for Unconstrained Optimization by Andrei. *Numerical Algorithms*, **69**, 337-341. https://doi.org/10.1007/s11075-014-9899-8

[18] Zhou, W. (2021) A Projected PRP Method for Optimization with Convex Constraint. *Pacilici Journal of Optimization*, **17**, 47-55.

[19] Zhou W. (2013) A Short Note on the Global Convergence of the Unmodified PRP Method. *Optimization Letters*, **7**, 1367-1372. https://doi.org/10.1007/s11590-012-0511-7

[20] Calamai, P.H. and Moré, J.J. (1987) Projected Gradient Methods for Linearly Constrained Problems. *Mathematical Programming*, **39**, 93-116. https://doi.org/10.1007/BF02592073