Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(12), 8453-8462
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1112894

Hans汉斯

态与信道相互作用下的相干性和互补性的无限维推广

张慧洁[1]，杨舒媛[2]，贺　衎[1,2,3*]

[1]太原理工大学数学学院，山西　太原
[2]太原理工大学信息与计算机科学学院，山西　太原
[3]太原理工大学软件学院，山西　太原

收稿日期：2022年11月5日；录用日期：2022年11月29日；发布日期：2022年12月7日

摘　要

量子相干性和玻尔互补性是量子力学中两个重要的主题，对其的研究也在不断深入。本文给出了量子相干性和玻尔互补性在无限维态与信道相互作用下的表示。首先基于无限维的信道刻画，证明了无限维中的对称部分，非对称部分以及信道的希尔伯特－施密特范数是有限的，其中对称部分用对称的若尔当积表示，非对称部分用斜对称李积表示。然后证明了无限维情形中的非对称部分仍然满足4个性质，可以作为维格纳－亚纳斯－丹森斜信息的一种表示，最后通过证明无限维态与信道相互作用的非对称部分仍然满足10个性质，得到了无限维态与信道相互作用下的量子相干性和玻尔互补性。

关键词

无限维，态与信道的相互作用，量子相干性，玻尔互补性

Infinite Dimensional Generalization of Coherence and Complementarity in State-Channel Interaction

Huijie Zhang[1], Shuyuan Yang[2], Kan He[1,2,3*]

[1]School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi
[2]School of Information and Computer Science, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi
[3]School of Software, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Nov. 5th, 2022; accepted: Nov. 29th, 2022; published: Dec. 7th, 2022

*通讯作者。

文章引用: 张慧洁, 杨舒媛, 贺衎. 态与信道相互作用下的相干性和互补性的无限维推广[J]. 应用数学进展, 2022, 11(12): 8453-8462. DOI: 10.12677/aam.2022.1112894

Abstract

Quantum coherence and Bohr's complementarity are two significant topics in quantum mechanics. The research on them is deep-going from its very beginning. In this paper, we give the expression of quantum correlation and Bohr's complementarity in state-channel interaction under infinite dimensional case. First, based on the infinite dimensional channel characterization, we proved that the Hilbert Schmidt norm of the asymmetric part, the symmetric part, the channel are finite, even in the infinite dimension. The symmetric part is represented by the symmetric Jordan product, and the asymmetric part is synthesized by the skew-symmetric Lie product. Then it is proved that the asymmetric part still satisfies four properties, thus, it can represent the Wigner Yanase Dyson skew information, in the infinite dimensional case. Finally, by proving that the asymmetric part of state-channel interaction still satisfies 10 properties, we obtain the generalization of quantum coherence and Bohr's complementarity in state-channel interaction, under the infinite dimensional case.

Keywords

Infinite Dimension, State-Channel Interaction, Quantum Correlation, Bohr's Complementarity

1. 引言

量子相干性和玻尔互补性是两个由来已久的量子力学中的重要课题。由于研究者们的努力，量子相干性和玻尔互补性在量子力学中的完备性正在量化方面取得进展。量子相干现象是指电子向右自旋和正电子向左自旋的状态是相关联的现象。事实上，量子相干性是多粒子干涉和纠缠的基础，在量子物理和量子信息科学的应用中起着核心作用[1] [2] [3] [4]。多光子干涉揭示了严格的非经典现象。其中，文献[1]回顾了多光子状态操纵的理论和实验进展研究。文献[2]将单粒子干涉仪扩展为双粒子干涉仪，对贝尔不等式提出了新的反驳。文献[3]介绍了多粒子干涉实验显示的奇妙的新现象。文献[4]表示粒子的高能见度干涉实验的操作技术可以进行贝尔型实验的“事件准备”版本，产生 GHZ 三方粒子等。玻尔互补性指出，物理物体具有不能同时观测到的互补性，或者量子系统在不同的观察中可能显示出相互排斥的性质，可以用波粒二象性来说明。过去几年，研究人员们使用了很多方法研究量子相干性和玻尔互补性的量化[5]-[11]。其中，文献[5]说明了量子性质的关联，介绍了广义海森堡不等式。文献[6]提出通过区分可言和不可言的概念量化相干性。文献[7]定义了相干离域的定量度量。文献[8]建立了任意热操作下量子相干演化的一般上限和下限，其适用于任何温度。文献[9]介绍了一个测量有限维系统中量子相干的框架，并定义了一个满足量子资源理论的可靠性标准的理论度量，提出了可实现的实验方案。文献[10]说明维格纳－亚纳斯斜信息被公认为是合适的量子相干度的信息理论量，并建立了维格纳－亚纳斯斜信息的几何下界。文献[11]发现了相干和路径信息之间的两种关系，其中一种是相干度量是基于相对熵的。这些量化相干性的方法与研究对称和不对称问题相关[12] [13]。文献[12]注意到，经典点粒子打破了平移对称性，而振幅均匀的波则没有。这为将粒子性质与不对称性以及波动性质与对称性联系起来提供了基础。文献[13]证明并利用了一个态的不对称性也可以用信息论概念来理解，例如，

用态对关于一个元素的信息进行编码的能力。

文献[14] [15] [16] [17] [18]介绍了对易子与反对易子的特性及应用，文献[14]表明在广义相对论的框架下，利用这些传播子，可以构造各种自由场的交换子和反交换子。文献[15]将先前对对易子型格林函数的研究扩展到了反对易子类型，且研究了零频率极点，长时间相关问题。文献[16]研究了关于泡利矩阵的对易子和反对易子，及其相关应用。文献[17]基于由对易子和反对易子组成的算子代数，精确地处理 n-费米子粒子之间的泡利阻塞。文献[18]研究了由随机酉(或正交) Haar 分布矩阵相互独立旋转的两个厄米特(或实对称)矩阵的对易子和反对易子的归一化特征值计数测度。

最近，[19] [20]中利用对易子与反对易子的特性在态与信道的相互作用下，证明了广义维格纳－亚纳斯－丹森斜信息可以在有限维情形中表示为 $I(\rho,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}\left\|\left[\sqrt{\rho},k_i\right]\right\|$，其中 k_i 是任意有界的算子(不一定是厄密的)，其与 $\sqrt{\rho}$ 的反对易子的有限和可以量化有限维情况下 $\sqrt{\rho}$ 和 ε 之间的非对称性。且进一步探讨了在有限维态与信道相互作用下的量子相干性也可以用 $I(\rho,\varepsilon)$ 来表示，玻尔互补性可以用守恒 $I(\rho,\varepsilon)+J(\rho,\varepsilon)$ 来表示，其中 $J(\rho,\varepsilon)$ 是量化 ρ 和 ε 之间对称性的度量，它有一个很好的特点，即它是一个等式，优于不等式。

本文基于有限维态与信道的相互作用下的量子相干性和玻尔互补性，首先考虑无限维下的信道表示，通过证明一些算子的希尔伯特－施密特范数是有限的，以及有限维中成立的性质仍然可以被满足，将其推广到无限维态与信道的相互作用下的量子相干性和玻尔互补性。

2. 无限维情形中态与信道相互作用下的对称和非对称表示

每个介于两个无限维系统(分别表示为 H 和 K 的希尔伯特空间)的量子信道(操作)可以表示为

$$\varepsilon(\rho)=\sum_{i=1}^{\infty}M_i\rho M_i^{\dagger}, \tag{1}$$

$\{M_i\}\subset B(H,K)$ 且满足 $\sum_{i=1}^{\infty}M_i^{\dagger}M_i=I_H\left(\sum_{i=1}^{\infty}M_i^{\dagger}M_i\le I_H\right)$ [21]。

当 $\sum_{i=1}^{\infty}M_i^{\dagger}M_i=I_H$ 时，信道是保迹的。则有

$$\varepsilon(\rho)=\sum_{i=1}^{\infty}M_i\rho M_i^{\dagger}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(M_i\sqrt{\rho}\right)\left(M_i\sqrt{\rho}\right)^{\dagger}。 \tag{2}$$

及对偶信道 $\varepsilon^{\dagger}(\rho)$：

$$\varepsilon^{\dagger}(\rho)=\sum_{i=1}^{\infty}M_i^{\dagger}\rho M_i=\sum_{i=1}^{\infty}\left(M_i^{\dagger}\sqrt{\rho}\right)\left(M_i^{\dagger}\sqrt{\rho}\right)^{\dagger}。 \tag{3}$$

首先需要证明 $\varepsilon(\rho)$ 在无限维情况下为 C_2 类算子，有希尔伯特－施密特范数[22]：

$$tr\left[\varepsilon(\rho)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\left\|M_i\sqrt{\rho}\right\|^2<\infty。$$

设 $\{e_n\}$ 是可分无限希尔伯特空间上的一组正交基，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|M_i\sqrt{\rho}e_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle M_i\sqrt{\rho}e_n,M_i\sqrt{\rho}e_n\right\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle\sqrt{\rho}M_i^{\dagger}M_i\sqrt{\rho}e_n,e_n\right\rangle。 \tag{4}$$

由于(4)式和 $\sum_{i=1}^{\infty}M_i^{\dagger}M_i\le I_H$ 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle\sqrt{\rho}M_i^{\dagger}M_i\sqrt{\rho}e_n,e_n\right\rangle\le\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle\rho e_n,e_n\right\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sqrt{\rho}e_n\right\|^2=1<\infty\text{。}$$

说明 $M_i\sqrt{\rho}$ 是 C_2 类算子，有希尔伯特－施密特范数。

进而证明其希尔伯特－施密特范数和 $\sum_{i=1}^{\infty}\left\|M_i\sqrt{\rho}\right\|^2$ 是有限的。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\left\|M_i\sqrt{\rho}\right\|^2&=\sum_{i=1}^{\infty}tr\left[\left(M_i\sqrt{\rho}\right)\left(M_i\sqrt{\rho}\right)^{\dagger}\right]=\sum_{i=1}^{\infty}tr\left[\left(M_i\sqrt{\rho}\right)^{\dagger}\left(M_i\sqrt{\rho}\right)\right]\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}tr\left[e_n^{\dagger}\left(M_i\sqrt{\rho}\right)^{\dagger}\left(M_i\sqrt{\rho}\right)e_n\right]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle M_i\sqrt{\rho}e_n,M_i\sqrt{\rho}e_n\right\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle\sqrt{\rho}M_i^{\dagger}M_i\sqrt{\rho}e_n,e_n\right\rangle\end{aligned}\text{。}\tag{5}$$

又由于(5)式和 $\sum_{i=1}^{\infty}M_i^{\dagger}M_i\le I_H$，可以得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\|M_i\sqrt{\rho}\right\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\rho}M_i^{\dagger}M_i\sqrt{\rho}e_n,e_n\right\rangle\le\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle\rho e_n,e_n\right\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sqrt{\rho}e_n\right\|^2=1<\infty\text{。}\tag{6}$$

表明 $\varepsilon(\rho)$ 在无限维情况下为 C_2 类算子，有如下希尔伯特－施密特范数：

$$tr\left[\varepsilon(\rho)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\left\|M_i\sqrt{\rho}\right\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}tr\left[\left(M_i\sqrt{\rho}\right)\left(M_i\sqrt{\rho}\right)^{\dagger}\right]\text{。}\tag{7}$$

类似地，我们可以得到 $\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\sqrt{\rho}M_i\right\|^2<\infty$，对偶信道也是 C_2 类算子，有如下希尔伯特－施密特范数：

$$tr\left[\varepsilon^{\dagger}(\rho)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\left\|M_i^{\dagger}\sqrt{\rho}\right\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}tr\left[\left(M_i^{\dagger}\sqrt{\rho}\right)\left(M_i^{\dagger}\sqrt{\rho}\right)^{\dagger}\right]\text{。}\tag{8}$$

上述讨论表明，即使在无限维态与信道的相互作用下，$\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}\right\|^2$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\left[\sqrt{\rho},M_i\right]\right\|^2$ 的表示是成立的。

根据有限维 $I(\rho,\varepsilon)<\infty$ 表示有限维态与信道相互作用的非对称部分，$J(\rho,\varepsilon)<\infty$ 有限维态与信道相互作用的对称部分，其中

$$I(\rho,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\left[\sqrt{\rho},M_i\right]\right\|^2,\quad\left[\sqrt{\rho},M_i\right]=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\rho}M_i-M_i\sqrt{\rho}\right),$$

$$J(\rho,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}\right\|^2,\quad\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\rho}M_j+M_j\sqrt{\rho}\right)\text{。}$$

接下来考虑无限维态与信道相互作用下，$J(\rho,\varepsilon)$ 分别能否表示态与信道相互作用的非对称部分，对称部分，需 $I(\rho,\varepsilon)$ 要分别证明它们的希尔伯特－施密特范数 $\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\left[\sqrt{\rho},M_i\right]\right\|^2$，$\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}\right\|^2$ 是有限的。

证明：设 $\{e_n\}$ 是可分无限希尔伯特空间上的一组标准正交基，通过范数的次可加性(三角不等式)，得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}e_n\right\|^2\le\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sqrt{\rho}M_je_n\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|M_j\sqrt{\rho}e_n\right\|^2<\infty$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\left[\sqrt{\rho},M_i\right]e_n\right\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\langle\left[\sqrt{\rho},M_i\right]e_n,\left[\sqrt{\rho},M_i\right]e_n\right\rangle \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|M_i\sqrt{\rho}e_n\right\|^2+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sqrt{\rho}M_ie_n\right\|^2 \\ &\quad -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle M_i^{\dagger}\sqrt{\rho}M_i\sqrt{\rho}e_n,e_n\right\rangle-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle\sqrt{\rho}M_i^{\dagger}\sqrt{\rho}M_ie_n,e_n\right\rangle \\ &\le \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|M_i\sqrt{\rho}e_n\right\|^2+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sqrt{\rho}M_ie_n\right\|^2<\infty\end{aligned}。$$

表明$\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}$和$\left[\sqrt{\rho},M_i\right]$是$C_2$类算子，有如下希尔伯特－施密特范数：

$$\left\|\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}\right\|^2=tr\left(\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}^{\dagger}\right), \tag{9}$$

$$\left\|\left[\sqrt{\rho},M_i\right]\right\|^2=tr\left(\left[\sqrt{\rho},M_i\right]\left[\sqrt{\rho},M_i\right]^{\dagger}\right)。 \tag{10}$$

进而证明$\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}\right\|^2$和$\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\left[\sqrt{\rho},M_i\right]\right\|^2$是有限的。

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}\right\|^2\le\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sqrt{\rho}M_j\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|M_j\sqrt{\rho}\right\|^2<\infty。$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\left[\sqrt{\rho},M_i\right]\right\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\langle\left[\sqrt{\rho},M_i\right],\left[\sqrt{\rho},M_i\right]\right\rangle \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\left\|M_i\sqrt{\rho}\right\|^2+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\sqrt{\rho}M_i\right\|^2 \\ &\quad -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle M_i\sqrt{\rho},\sqrt{\rho}M_i\right\rangle-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle\sqrt{\rho}M_i,M_i\sqrt{\rho}\right\rangle \\ &\le \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\left\|M_i\sqrt{\rho}\right\|^2+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\sqrt{\rho}M_i\right\|^2<\infty\end{aligned}。$$

这意味着在无限维情况下，$\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\left[\sqrt{\rho},M_i\right]\right\|^2$可以代表态与信道相互作用的非对称部分，$\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}\right\|^2$可以代表对称部分。

形式如下：

$$J(\rho,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}\right\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}tr\left(\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}\left\{\sqrt{\rho},M_j\right\}^{\dagger}\right)<\infty, \tag{11}$$

$$I(\rho,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\left[\sqrt{\rho},M_i\right]\right\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}tr\left(\left[\sqrt{\rho},M_i\right]\left[\sqrt{\rho},M_i\right]^{\dagger}\right)<\infty。 \tag{12}$$

3. 无限维情形中通过态与信道相互作用表示维格纳－亚纳斯－丹森斜信息

在[19] [20]中研究了有限维情况下的维格纳－亚纳斯－丹森斜信息，并表示为：

$$I(\rho,K)=tr\left(\left[\sqrt{\rho},K\right]\left[\sqrt{\rho},K\right]^{\dagger}\right)=\left\|\left[\sqrt{\rho},K\right]\right\|^2, \tag{13}$$

其中K是任何有界算子(不一定是厄密的)。$I(\rho,K)$是非负的，并且具有以下理想性质：

i) 如果K是厄密的，那么它就简化为原始的斜信息。

ii) $I(\rho,K)=I\left(\rho,K^{\dagger}\right)$。

iii) 从如下意义讲，$I(\rho,K)$在ρ中是凸的：

$$I\left(\sum_{i=1}^{\infty}c_i\rho_i,K\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}c_iI\left(\rho_i,K\right) \tag{14}$$

对于任意 ρ_i 和满足 $c_i\ge 0,\sum_{i=1}^{\infty}c_i=1$ 的 c_i。

iv) $I(\rho,K)=I(\rho,Re\,K)+I(\rho,Im\,K)$，其中 $Re\,K=\frac{1}{2}\left(K+K^{\dagger}\right),Im\,K=\frac{1}{2i}\left(K-K^{\dagger}\right)$ 分别是 K 的实部和虚部。

因此，希望证明在无限维情况下，维格纳－亚纳斯－丹森斜信息仍然可以表示为这样的形式，并满足以上四条理想的性质。

证明： 因为在无限维中，有

$$I(\rho,K)=\left\|\left[\sqrt{\rho},K\right]\right\|^2=tr\left(\left[\sqrt{\rho},K\right]\left[\sqrt{\rho},K\right]^{\dagger}\right)=\frac{1}{4}tr\rho KK^{\dagger}+\frac{1}{4}tr\rho K^{\dagger}K-\frac{1}{2}tr\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}K^{\dagger}<\infty,$$

即对于任何有界算子 K (不一定是厄密的)，$I(\rho,K)<\infty$。

因此，在无限维情况下，我们有维格纳－亚纳斯－丹森斜信息也有类似的表示：

$$I(\rho,K)=tr\left(\left[\sqrt{\rho},K\right]\left[\sqrt{\rho},K\right]^{\dagger}\right)=\left\|\left[\sqrt{\rho},K\right]\right\|^2$$

其中 K 是任何有界算子(不一定是厄密的)。$I(\rho,K)$ 是非负的，而且我们认为它在无穷维中也具有上述理想性质。

性质 i)，ii)，iv)在无限维情况下是显然的。证明的关键是性质 iii)在无限维情况下也成立。

因为 $I(\rho,K)=\left\|\left[\sqrt{\rho},K\right]\right\|^2=tr\left(\left[\sqrt{\rho},K\right]\left[\sqrt{\rho},K\right]^{\dagger}\right)=\frac{1}{4}tr\rho KK^{\dagger}+\frac{1}{4}tr\rho K^{\dagger}K-\frac{1}{2}tr\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}K^{\dagger}<\infty$ 需要证明 $\frac{1}{4}tr\rho KK^{\dagger}+\frac{1}{4}tr\rho K^{\dagger}K$，$-\frac{1}{2}tr\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}K^{\dagger}$ 是凸的，进而证明 $I(\rho,K)$ 在 ρ 中是凸的。

首先利用[23]及[24]中的定理 1 来证明 $-\frac{1}{2}tr\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}K^{\dagger}$ 是凸的。

定理： 令 K 是有限维希尔伯特空间 H 上的线性算子(不必要是有界的)。令 $A,B\in B^{\dagger}(H)$，且 $\lambda,0<\lambda<1$ 是给定的。对于凸组合 $C=\lambda A+(1-\lambda)B$。令 p,r 是给定的正实数，且满足 $p+r\equiv s\le 1$。如果 $M=C^{\frac{p}{2}}KC^{\frac{r}{2}}$ 扩展到 $C_2(H)$，则：

1) $A^{\frac{p}{2}}KA^{\frac{r}{2}}$ 和 $B^{\frac{p}{2}}KB^{\frac{r}{2}}$ 扩展到 $C_2(H)$。

2) $\lambda trA^{\frac{r}{2}}K^{\dagger}A^{p}KA^{\frac{r}{2}}+(1-\lambda)trB^{\frac{r}{2}}K^{\dagger}B^{p}KB^{\frac{r}{2}}\le trC^{\frac{r}{2}}K^{\dagger}C^{p}KC^{\frac{r}{2}}$，

$$A\in B^{\dagger}(H)\to trA^{\frac{r}{2}}K^{\dagger}A^{p}KA^{\frac{r}{2}}$$

是凹的。也将该定理被推广到了无限维的情形[24]。

$-\frac{1}{2}tr\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}K^{\dagger}$ 对于 ρ 是非线性的，可以应用上述定理来证明其是凸的[23] [24]。

令 $p=\frac{1}{2}$，$r=\frac{1}{2}$，$C=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}c_i\rho_i}{1+c_m}$，$\lambda=\frac{c_m}{1+c_m}$，$1-\lambda=\frac{1}{1+c_m}$，$A=\rho_m$，$B=\sum_{i\ne m}^{\infty}c_i\rho_i$，且满足 $A,B,C\in B^{\dagger}(H)$，$\rho=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\rho_i$，$c_i=1$，$0<c_i<1$。

由于 $\left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty}c_i\rho_i\right)^{\frac{1}{4}}K\left(\sum_{i=1}^{\infty}c_i\rho_i\right)^{\frac{1}{4}}\right\|^2=\left\|\rho^{\frac{1}{4}}K\rho^{\frac{1}{4}}\right\|^2=tr\left[\left(\rho^{\frac{1}{4}}K\rho^{\frac{1}{4}}\right)\left(\rho^{\frac{1}{4}}K\rho^{\frac{1}{4}}\right)^{?}\right]=tr\left(\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}K^{\dagger}\right)<\infty$ 其中任意 K 是有界算子(不必要是厄密的)。

这意味着 $M=\left(\sum_{i=1}^{\infty}c_i\rho_i\right)^{\frac{1}{4}}K\left(\sum_{i=1}^{\infty}c_i\rho_i\right)^{\frac{1}{4}}$ 可以拓展到 $C_2(H)$。将这些带入上述定理，则有：

$$\begin{aligned}&\frac{c_m}{1+c_m}tr\rho_m^{\frac{1}{2}}K^{\dagger}\rho_m^{\frac{1}{2}}K+\frac{1}{1+c_m}tr\left(\sum_{i\neq m}^{\infty}c_i\rho_i\right)^{\frac{1}{2}}K^{\dagger}\left(\sum_{i\neq m}^{\infty}c_i\rho_i\right)^{\frac{1}{2}}K\\&\le\frac{1}{1+c_m}tr\left(\sum_{i=1}^{\infty}c_i\rho_i\right)^{\frac{1}{2}}K^{\dagger}\left(\sum_{i=1}^{\infty}c_i\rho_i\right)^{\frac{1}{2}}K\\&\le tr\left(\sum_{i=1}^{\infty}c_i\rho_i\right)^{\frac{1}{2}}K^{\dagger}\left(\sum_{i=1}^{\infty}c_i\rho_i\right)^{\frac{1}{2}}K\end{aligned}$$

。

这表明 $tr\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}K^{\dagger}$ 是凹的，则 $-\frac{1}{2}tr\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}K^{\dagger}$ 在无限维情形中是凸的。$\frac{1}{4}tr\rho KK^{\dagger}+\frac{1}{4}tr\rho K^{\dagger}K$ 是线性的，则其是凸的[25] [26]。因此，$I(\rho,K)$ 在 ρ 中是凸的。

通过上述证明，以上四个性质(i)~iv))在无限维情形中仍然成立。这表明 $I(\rho,K)$ 在无限维情形中仍然是维格纳－亚纳斯－丹森斜信息的一种表示。

相似的，可以得到：

$$J(\rho,K)=tr\left(\left\{\sqrt{\rho},K\right\}\left\{\sqrt{\rho},K\right\}^{\dagger}\right)=\left\|\left\{\sqrt{\rho},K\right\}\right\|^2 \tag{15}$$

可以作为无限维情形中，是 $I(\rho,K)$ 的对偶，也是 ρ 和 K 对称部分的量化度量。

基于对维格纳－亚纳斯－丹森斜信息在无限维情形中的讨论，我们可以得到：

$$I(\rho,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{\infty}I(\rho,K_i), \tag{16}$$

$$J(\rho,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{\infty}J(\rho,K_i), \tag{17}$$

其中 $\varepsilon(\rho)=\sum_{i=1}^{\infty}K_i\rho K_i^{\dagger}$。

4. 无限维情形中态与信道相互作用下的量子相干性，玻尔互补性

在无限维情形中，量化相干性和将玻尔互补性转化为态－信道相互作用的对称-及其对偶不对称，我们还需要具备一些准备条件。

在有限维情形中，基于 $I(\rho,\varepsilon)$ 的 10 条好的性质，使得 $I(\rho,\varepsilon)$ 不仅成为 ρ 相对于 ε 的相干性的真正度量，也可以作为量化相干性的理想度量，量化相干性，也可以和 $J(\rho,\varepsilon)$ 将玻尔互补性表示为在态与信道相互作用下对称和非对称的守恒。

i) (非负性) $I(\rho,\varepsilon)\ge 0$，当且仅当 $\varepsilon^{\dagger}\left(\sqrt{\rho}\right)=\sqrt{\rho},\varepsilon^{\dagger}(\rho)=\rho$ 取等号。

ii) (凸性) $I(\rho,\varepsilon)$ 对于 ρ 而言是凸的。

iii) (线性性) ρ 在信道 ε 中是正实线性的。

iv) (酉协变性) $I\left(U\rho U^{\dagger},U\varepsilon U^{\dagger}\right)=I(\rho,\varepsilon)$。

v) (辅助独立性) $I\left(\rho^a\otimes\rho^b,\varepsilon^a\otimes\varepsilon^b\right)=I\left(\rho^a,\varepsilon^a\right)$，其中 ρ^a 和 ρ^b 分别是 a,b 方的任意态，且 1^b 是 b 的恒等信道。

vi) (偏迹递减) $I\left(\rho^{ab},\varepsilon^a\otimes 1^b\right)\geq I\left(\rho^a,\varepsilon^a\right)$，其中 ρ^{ab} 是共享于 a,b 间的任意二部态。

vii) (超可加性) $I\left(\rho^{ab},\varepsilon^a\otimes 1^b+1^a\otimes\varepsilon^b\right)\geq I\left(\rho^a,\varepsilon^a\right)+I\left(\rho^b,\varepsilon^b\right)$。

viii) (单调性) 如果一个信道 ψ 可以被定义为 $\psi(\rho)=\sum_{i=1}^{n}E_i\rho E_i^{\dagger}$，当对于任意的 i,j，$\left[E_i,K_j\right]=0$ 和 $\left[E_i,K_j^{\dagger}\right]=0$ 时，不会干扰信道 ε (回忆 $\varepsilon(\rho)=\sum_{j=1}^{n}K_j\rho K_j^{\dagger}$)，则 $I\left(\psi(\rho),\varepsilon\right)\leq I(\rho,\varepsilon)$。

ix) (收缩性) $I\left(\left(1^a\otimes\varepsilon^b\right)\rho^{ab},\varepsilon^a\otimes 1^b\right)\leq I\left(\rho^{ab},\varepsilon^a\otimes 1^b\right)$。

x) 如果 ε 能被表示为 $\varepsilon(\rho)=\sum_{j=1}^{n}\sqrt{M_j}\rho\sqrt{M_j}$，$M_j\geq 0$，则 $I(\rho,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{n}I\left(\rho,\sqrt{M_j}\right)$。特别地，$\varepsilon(\rho)=\sum_{j=1}^{n}\Pi_j\rho\Pi_j^{\dagger}$ 其中 $\Pi_j=|j\rangle\langle j|$ 且 $\{|j\rangle\}$ 是希尔伯特空间的一组标准正交基，则 $I(\rho,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{n}I\left(\rho,\Pi_j\right)$。

接下来证明上述 10 条性质在无限维的情形下仍然成立，进而证明 $I(\rho,\varepsilon)$ 仍然能作为量化相干性的理想度量，以及将玻尔的互补性作为态和信道相互作用下对称－不对称。

证明：性质 i)~v)，viii)~x)在无限维情形显然成立[27] [28] [29]。首先，证明性质(vi)在无限维情形中仍然成立。

$$
\begin{aligned}
4I\left(\rho^{ab},\varepsilon^a\otimes 1^b\right)&=tr\left[\left(\varepsilon^a\otimes 1^b\right)\rho^{ab}\right]-2tr\left[\sqrt{\rho^{ab}}\left(\varepsilon^a\otimes 1^b\right)\sqrt{\rho^{ab}}\right]+tr\left[\left(\varepsilon^{a\dagger}\otimes 1^b\right)\rho^{ab}\right]\\
&=tr\left[\varepsilon^a(\rho)\right]-2tr\sqrt{\rho^a}\left(K_j^{\dagger}\otimes 1^b\right)\sqrt{\rho^{ab}}\left(K_j\otimes 1^b\right)+tr\left[\varepsilon^{a\dagger}(\rho)\right]\\
&\geq tr\left[\varepsilon^a(\rho)\right]-2tr\sqrt{\rho^a}\left(K_j^{\dagger}\right)\sqrt{\rho^{ab}}\left(K_j\right)+tr\left[\varepsilon^{a\dagger}(\rho)\right]\\
&=4I\left(\rho^a,\varepsilon^a\right)
\end{aligned}
。
$$

其中不等号是因为[24]中的凹性定理的推论 1.3 和声明 3。这表明性质 vi)在无限维情形中仍然成立。

然后证明性质 vii)，由于性质 vi)成立，下面的结果可以由类似的证明得到：

$$4I\left(\rho^{ab},1^a\otimes\varepsilon^b\right)\geq 4I\left(\rho^b,\varepsilon^b\right)。$$

进而得到

$$I\left(\rho^{ab},\varepsilon^a\otimes 1^b+1^a\otimes\varepsilon^b\right)\geq I\left(\rho^a,\varepsilon^a\right)+I\left(\rho^b,\varepsilon^b\right)。$$

这是因为性质 iii) $I(\rho,\varepsilon)$ 在信道 ε 是实正线性的。性质 vii)在无限维情形中也成立。

表明上述 10 条性质在无限维情形中也满足，也就是说，相干性能被无限维情形中态和信道相互作用下的 $I(\rho,\varepsilon)$ 作为一种理想化度量量化。

由于

$$I(\rho,\varepsilon)=\frac{1}{4}\left[tr\left[\varepsilon(\rho)\right]-2tr\left[\sqrt{\rho}\left(\varepsilon^{\dagger}\right)\sqrt{\rho}\right]+tr\left[\varepsilon^{\dagger}(\rho)\right]\right],$$

$$J(\rho,\varepsilon)=\frac{1}{4}\left[tr\left[\varepsilon(\rho)\right]+2tr\left[\sqrt{\rho}\left(\varepsilon^{\dagger}\right)\sqrt{\rho}\right]+tr\left[\varepsilon^{\dagger}(\rho)\right]\right],$$

$$I(\rho,\varepsilon)+J(\rho,\varepsilon)=\frac{1}{2}tr\left[\varepsilon(\rho)\right]+\frac{1}{2}tr\left[\varepsilon^{\dagger}(\rho)\right]。$$

$I(\rho,\varepsilon)+J(\rho,\varepsilon)$ 是守恒的。因此，在无限维情形中的态和信道的相互作用下，玻尔互补原理能被描

述为对称 $J(\rho,\varepsilon)$ 及其对偶非对称 $I(\rho,\varepsilon)$ 的和。

5. 结论

综上所述，本文根据有限维情形中态与信道相互作用下量子相干和玻尔互补的基本描述，克服了上述证明中的困难，得到了对无限维情形中态与信道相互作用下的量子相干和玻尔互补同样的描述仍然成立。$I(\rho,K)$ 代表了 ρ 和 K 相互作用的不对称。且由于满足上述 4 条好的性质，$I(\rho,K)$ 也可以作为维格纳－亚纳斯－丹森斜信息的一种表示。通过证明发现态与信道相互作用的非对称部分，在无限维情形中，同样满足 10 条好的性质，表明了即使在无限维情形中，量子相干性也可以被态与信道相互作用下的非对称 $I(\rho,\varepsilon)$ 表示。同时，也证明了在无限维情形中，可以表示玻尔互补性的态与信道相互作用下的非对称 $I(\rho,\varepsilon)$ 及其对偶 $J(\rho,\varepsilon)$ 的和，且和 $I(\rho,\varepsilon)+J(\rho,\varepsilon)=\frac{1}{2}tr\left[\varepsilon(\rho)\right]+\frac{1}{2}tr\left[\varepsilon^{\dagger}(\rho)\right]$ 是守恒的。使其表现为一个等式，而不是原始的不等式。

致　谢

感谢给出的评论。这项工作得到了国家自然科学基金的资助，批准号为 12271394，以及山西省重点研究开发计划，批准号 202102010101004 的资助。

参考文献

[1] Pan, J.W., Chen, Z.B., Lu, C.Y., Weinfurter, H., Zeilinger, A. and Zukowski, M. (2012) Multiphoton Entanglement and Interferometry. *Reviews of Modern Physics*, **84**, 777-838. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.777

[2] Horne, M.A., Shimony, A. and Zeilinger, A. (1989) Two-Particle Interferometry. *Physical Review Letters*, **62**, 2209-2212. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.62.2209

[3] Greenberger, D.M., Horne, M.A. and Zeilinger, A. (1993) Multiparticle Interferometry and the Superposition Principle. *Physics Today*, **46**, 22-29. https://doi.org/10.1063/1.881360

[4] Zukowski, M., Zeilinger, A., Horne, M.A. and Weinfurter, H. (1999) Independent Photons and Entanglement. A Short Overview. *International Journal of Theoretical Physics*, **38**, 501-517. https://doi.org/10.1023/A:1026622332641

[5] Levy-Leblond, J.M. (1986) Correlation of Quantum Properties and the Generalized Heisenberg Inequality. *American Journal of Physics*, **54**, 135-136. https://doi.org/10.1119/1.14708

[6] Marvian, I. and Spekkens, R.W. (2016) How to Quantify Coherence: Distinguishing Speakable and Unspeakable Notions. *Physical Review A*, **94**, Article ID: 052324. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.052324

[7] Levi, F. and Mintert, F. (2014) A Quantitative Theory of Coherent Delocalization. *New Journal of Physics*, **16**, Article ID: 033007. https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/3/033007

[8] Lostaglio, M., Korzekwa, K., Jennings, D. and Rudolph, T. (2015) Quantum Coherence, Time-Translation Symmetry, and Thermodynamics. *Physical Review X*, **5**, Article ID: 021001. https://doi.org/10.1103/PhysRevX.5.021001

[9] Girolami, D. (2014) Observable Measure of Quantum Coherence in Finite Dimensional Systems. *Physical Review X*, **113**, Article ID: 170401. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.170401

[10] Pires, D.P., Céleri, L.C. and Soares-Pinto, D.O. (2015) Geometric Lower Bound for a Quantum Coherence Measure. *Physical Review A*, **91**, Article ID: 042330. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.042330

[11] Bagan, E., Bergou, J.A., Cottrell, S.S. and Hillery, M. (2016) Relations between Coherence and Path Information, *Physical Review Letters*, **116**, Article ID: 160406. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.160406

[12] Vaccaro, J.A. (2012) Particle-Wave Duality: A Dichotomy between Symmetry and Asymmetry. *Proceedings of the Royal Society A*, **468**, 1065-1084. https://doi.org/10.1098/rspa.2011.0271

[13] Marvian, I. and Spekkens, R.W. (2013) The Theory of Manipulations of Pure State Asymmetry: I. Basic Tools, Equivalence Classes and Single Copy Transformations. *New Journal of Physics*, **15**, Article ID: 033001. https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/3/033001

[14] Lichnerowicz, A. (1962) Propagators and Commutators in General Relativity. *Proceedings of the Royal Society A*, **270**, 342-345. https://doi.org/10.1098/rspa.1962.0226

[15] Bloomfield, P.E. and Nafari, N. (1972) Commutator and Anticommutator Green's Functions, Zero-Frequency Poles, and Long-Time Correlations. *Physical Review A*, **5**, 806-813. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.5.806

[16] Steeb, W.H. and Hardy, Y. (2014) Spin Operators, Pauli Group, Commutators, Anti-Commutators, Kronecker Product and Applications. ArXiv: 1405.5749.

[17] Combescot, M. and Betbeder-Matibet, O. (2010) General Many-Body Formalism for Composite Quantum Particles. *Physical Review Letters*, **104**, Article ID: 206404. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.206404

[18] Vasilchuk, V. (2003) On the Asymptotic Distribution of the Commutator and Anti-Commutator of Random Matrices, *Journal of Mathematical Physics*, **44**, 1882-1908. https://doi.org/10.1063/1.1557329

[19] Luo, S. (2003) Wigner-Yanase Skew Information and Uncertainty Relations. *Physical Review Letters*, **91**, Article ID: 180403. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.180403

[20] Luo, S. and Sun, Y. (2018) Coherence and Complementarity in State-Channel Interaction. *Physical Review A*, **98**, Article ID: 0121131. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.180403

[21] Hou, J.C. (2010) A Characterization of Positive Linear Maps and Criteria of Entanglement for Quantum States. *Journal of Physics A*: *Mathematical and General*, **43**, Article ID: 385201. https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/38/385201

[22] Hou J.C. (1995) Operator Tensor Product and Elementary Operators on C_2. *Acta Mathematica Sinica*: *Chinese Series*, **38**, 467-474.

[23] Lieb, E.H. (1975) Some Convexity and Subadditivity Properties of Entropy. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **81**, 267-288. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1975-13621-4

[24] Lieb, E.H. (1973) Convex Trace Functions and the Wigner-Yanase-Dyson Conjectur. *Advances in Mathematics*, **11**, 267-288. https://doi.org/10.1016/0001-8708(73)90011-X

[25] He, K., Hou, J.C. and Li, C.K. (2013) A Geometric Characterization of Invertible Quantum Measurement Maps. *Journal of Functional Analysis*, **264**, 464-478. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2012.11.005

[26] Páles, Z. (2012) Characterization of Segment and Convexity Preserving. ArXiv: 1212.1268.

[27] Luo, S. and Zhang, Q. (2017) Skew Information Decreases under Quantum Measurements. *Theoretical and Mathematical Physics*, **151**, 529-538. https://doi.org/10.1007/s11232-007-0039-7

[28] Hansen, F. (2007) The Wigner-Yanase Entropy Is Not Subadditive. *Journal of Statistical Physics*, **126**, 643-648. https://doi.org/10.1007/s10955-006-9265-x

[29] Luo, S. and Zhang, Q. (2008) Superadditivity of Wigner-Yanase-Dyson Information Revisited. *Journal of Statistical Physics*, **131**, 1169-1177. https://doi.org/10.1007/s10955-008-9534-y