Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(6), 2861-2875
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.126288

多项时间分数阶抛物型方程反源问题的拟逆方法

王雨欣

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期：2023年5月25日；录用日期：2023年6月19日；发布日期：2023年6月27日

摘 要

本文利用分数阶拟逆方法解决多项时间分数阶抛物型方程的反源问题，该反问题是不适定的。首先给出了反问题的条件稳定性，然后提出分数阶拟逆方法，即在原方程中引入了与椭圆微分算子有关的新的扰动项，最后基于多项Mittag-Leffler函数的一些性质，在理论上我们给出了正则化解在先验正则化参数选择规则下相应的收敛速度。

关键词

多项时间分数阶抛物型方程的反源问题，拟逆正则化方法，误差估计

A Quasi-Inverse Method for Inverse Problems of Parabolic Equations of the Time Fractional Order

Yuxin Wang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 25^{th}, 2023; accepted: Jun. 19^{th}, 2023; published: Jun. 27^{th}, 2023

文章引用: 王雨欣. 多项时间分数阶抛物型方程反源问题的拟逆方法[J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 2861-2875.
DOI: 10.12677/aam.2023.126288

Abstract

In this paper, the fractional quasi-inverse method is used to solve the inverse source problem of polynomial time fractional parabolic equations, which is ill-posed. Firstly, the conditional stability of the inverse problem is given, and then the fractional quasi-inverse method is proposed, that is, the perturbation term related to elliptic differential operator is introduced into the original equation. Finally, based on some properties of Mittag-Leffler function, the corresponding convergence rate of the regular solution under the prior selection rule is given in theory.

Keywords

The Inverse Source Problem of Multiple Time Fractional Parabolic Equations, Quasi Inverse Regularization Method, Error Estimation

1. 引言

分数阶微分方程应用广泛, 且该方程能模拟高度非均含水层中的异常扩散现象, 也可以用来进行石油和污水的勘测等, 因此有很多学者都在研究. 但单项时间分数阶扩散方程与整数阶扩散方程有很大不同, 如时间上的衰减缓慢等. 分数阶微分方程是生物学 [1], 物理学 [2–4], 金融学 [5]等许多问题建模的重要工具, 并且能很好地用来描述地下流体流动 [6], 地震等极端事件 [7] 和随机过程 [8], 并且分数阶微分方程还可以很好地用来描述异常扩散过程 [9], 故引起了很多学者的关注和研究. 多项分数阶扩散微分方程与单项分数阶微分方程相比, 有着更好的特点, 它能更加精确地模拟实际问题, 故能帮助我们更有效地处理问题. 因此, 该方程的研究具有十分重要的理论意义及应用价值. 然而, 在某些实际情况中, 边界数据的某些部分, 或初始状态, 或椭圆算子中的某些系数, 或源项, 或分数阶可能是未知的, 且无法直接测量或测量成本过高. 因此我们通过额外的测量数据来识别它们, 这就产生了分数扩散方程的反问题. 在实际问题的驱动下, 到目前为止, 反源问题已成为最重要的分数阶反问题之一. 而我们所要研究的反问题是不适定的, 故需要用正则化方法来处理问题.

近年来, 拟逆正则化方法的研究受到了众多学者的青睐, 它的原理就是在原方程的基础上加上一个扰动, 使得加过扰动后的定解问题变得适定, 进而通过求解正则化解来逼近原不适定问题的解.

拟逆方法是一类经典的正则化方法, 经常被用来处理许多病态问题. 本文中的拟逆正则化方法是在多项拟逆方法反演初值或源项的基础上加一项小扰动, 使得将原问题的病态性得到有效地修正, 从而使原方程适定, 并得到相应的正则化解.

本文我们研究的方程模型如下所示

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} q_j\, \partial_{0+}^{\alpha_j} u(x,t) + A^{\beta} u(x,t) = f(x)h(t), \quad (x,t) \in \Omega_T := \Omega \times I, \\ u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times I, \end{cases} \tag{1}$$

其中$I = (0,T)$, $T > 0$ 是固定的并且$\partial_{0+}^{\alpha_j}$ 是Caputo分数阶导数, β 是给定的正数. 令$A : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, 其中$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为光滑区域, A 在$L^2(\Omega)$ 上是自伴一致椭圆算子使得A 在$L^2(\Omega)$ 上生成一个紧半群$\{S(t)\}_{t \geq 0}$. 设A 的特征值是$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_p \leq \cdots$, $\lim_{p\to\infty} \lambda_p = +\infty$, 算子$A$ 的特征值用λ_p 表示, 相应的特征函数$\varphi_p \in L^2(\Omega)$, 有$A\varphi_p = \lambda_p \varphi_p$. 令$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi, \varphi_p)\varphi_p$, 有$A\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_p (\psi, \varphi_p)\varphi_p$. 对于任意的$\gamma > 0$, 定义

$$D((A)^{\gamma}) = \left\{ \psi \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\gamma} |(\psi, \varphi_p)|^2 < \infty \right\},$$

其中$(\cdot,\cdot)$ 是在$\mathbb{H}$ 上的内积, 它的范数的定义是

$$\|\psi\|_{\gamma} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\gamma} |(\psi, \varphi_p)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \ \psi \in D(A^p).$$

且有$A^{\beta}\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_p^{\beta} (\psi, \varphi_p)\varphi_p$. 固定任意的正整数$m$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ 和系数$q = (q_1, ..., q_m)$ 满足序关系

$$\mathcal{B} := \{(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{R}^s;\ \overline{\alpha} \geq \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_s \geq \underline{\alpha}\}, \tag{2}$$
$$\mathcal{Q} := \{(q_1, ..., q_s) \in \mathbb{R}^s;\ q_1 = 1, q_j \in [\underline{q}, \overline{q}], (j = 2, ..., m)\}, \tag{3}$$

且满足$0 < \underline{\alpha} < \overline{\alpha} < 1$ 和$0 < \underline{q} < \overline{q}$.

当$t = T$, 有$u(x,T) = g$. 取上式中的g 作为测量数据, 但是在实际应用中, 测量数据往往含有噪音. 我们用$\varepsilon > 0$ 表示噪音水平, 用g^{ε} 表示加了噪音的测量数据, 并且有$\|g - g^{\varepsilon}\| \leq \varepsilon$ 成立.

据我们所知, 近年来, 单项的分数阶扩散方程反演源项的理论分析以及数值方法的反源问题取得了很大进展. 张云等人 [10]在一维情况下使用单点柯西数据识别了空间源项的唯一性. 魏婷等人 [11]研究了从多项时间分数扩散方程中的边界实测数据中识别出空间源项, 并给出了拉普拉斯变换反源问题的唯一性结果. 在正则化方法方面, 魏婷等人 [12]提出了一种改进的拟边界值正则化方法，通过加了噪声的最终数据来处理反源问题. 杨帆等人 [13]利用分数阶Landweber 迭代正则化方法, 通过加了噪音的最终观测数据来识别空间源项问题. 孙春龙等人 [14] 利用变分恒等式将未知的时间相关源和内部测量连接起来, 应用共轭梯度方法来恢复未知源. 此外, 还有学者研究了同时反演源项和其他参数. 例如, 刘继军等人 [15] 研究了同时反演反问题中的边界阻抗系数和空间相关源项. 刘继军等人 [16] 研究了与连续时间随机游走问题相关的多孔介质扩散方程, 并提出了具有完整理论分析的拟逆正则化方法. 程晋等人 [17] 给出了一维分数阶扩散方程问题的唯一性. 李志远等

人 [18]采用边界测量方法证明了反问题的唯一性结果. 王俊刚等人 [19]提出了一种迭代正则化方法来解决时间分数阶扩散方程的反问题. 王俊刚等人 [20]用两种正则化方法讨论了时间分数阶扩散方程反演空间源项问题.

在本文中, 我们考虑分数阶β 是任意的正实数, 源项是一个与时间有关的函数. 拟逆方法的原理是用f_α 逼近(1) 中的f:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} q_j\, \partial_{0+}^{\alpha_j} v(x,t) + A^\beta v(x,t) = (I+\alpha A^b) f_\alpha(x) h(t), & (x,t) \in \Omega_T := \Omega \times I, \\ v(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ v(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times I, \end{cases} \tag{4}$$

其中$\alpha > 0$ 是正则化参数, $b \neq \beta$ 是任意正实数.

在本文, 我们专注于多项时间分数阶的反源问题. 我们首先给出了原问题不适定性的原因, 并获得反问题的条件稳定性. 其次, 提出拟逆方法求解反源问题. 基于先验正则化参数选择规则, 给出了精确解和正则化解之间的收敛估计. 值得注意的是, 多项Mittag-Leffler函数的性质可以看作是本文的一些亮点. 在这里, 我们从 [21,22]中得到了很多关于多项Mittag-Leffler 函数有用的性质.

本文的组织如下. 在第2节中, 我们提供了一些预备知识. 在第3节中, 给出了反源问题的条件稳定性. 在第4节中, 我们给出了正则化解的表达式, 并给出先验正则化参数选择规则下相应的收敛速度.

2. 预备知识

定义 2.1 Caputo分数阶导数$\partial_{0+}^{\alpha_j}$ 的定义是

$$\partial_{0+}^{\alpha_j} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_j)} \int_0^t \frac{\partial u(x,s)}{\partial s} \frac{ds}{(t-s)^{\alpha_j}}, \quad 0<\alpha_j<1, 0<t<T,$$

其中Γ 是Gamma函数, $T>0$ 是固定的终值.

定义 2.2 [18]多项Mittag-Leffler函数的定义是

$$E_{(\theta_1,\cdots,\theta_m),\theta_0}(z_1,\cdots,z_m) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=k} \frac{(k;k_1,\cdots,k_m)\prod_{j=1}^m z_j^{k_j}}{\Gamma(\theta_0+\sum_{j=1}^m \theta_j k_j)},$$

其中$\theta_0,\ \theta_j \in \mathbb{R},\ z_j \in \mathbb{C}(j=1,\cdots,s)$, 且$(k;k_1,\cdots,k_m)$ 表示多项系数

$$(k;k_1,\cdots,k_m) := \frac{k!}{k_1!\cdots k_m!},\ k=\sum_{j=1}^m k_j,$$

其中 $k_j\ (j=1,\cdots,m)$ 是非负整数.

为了后面方便, 如果$\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_m)$ 和它的系数$q=(q_1,...,q_m)$ 满足(2) 和(3), 我们有下面的简写

$$E_{\alpha',\beta}^{(p)}(t) := E_{(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\cdots,\alpha_1-\alpha_m),\beta}(-\lambda_p t^{\alpha_1}, -q_2 t^{\alpha_1-\alpha_2},\cdots,-q_m t^{\alpha_1-\alpha_m}), \quad t>0, p=1,2,\ldots,$$

其中$\alpha' = (\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2, \cdots, \alpha_1 - \alpha_m)$ 和λ_p 表示齐次Dirichlet边界条件下椭圆算子A 的第p 个特征值.

引理 2.3 [23]给定$\beta > 0$ 和$1 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_m > 0$. 设$\alpha_1\pi/2 < \mu < \alpha_1\pi$, $\mu \le |\arg(z_1)| \le \pi$ 和$\pi - \epsilon \le |\arg z_j| \le \pi$, $j = 2, \cdots, m$, 这里ϵ 是足够小的, 则存在一个依赖于μ, $\alpha_j (j = 1, \cdots, m)$ 和β 的常数$C_1 > 0$ 使得

$$|E_{(\alpha_1, \alpha_1-\alpha_2, \cdots, \alpha_1-\alpha_m), \beta}(z_1, \cdots, z_m)| \le \frac{C_1}{1 + |z_1|}. \tag{5}$$

引理 2.4 [18]令 $0 < \alpha_m < \alpha_{m-1} < \cdots < \alpha_1 < 1$. 则

$$\frac{d}{dt}\left\{t^{\alpha_1} E^{(p)}_{\alpha', 1+\alpha_1}(t)\right\} = t^{\alpha_1 - 1} E^{(p)}_{\alpha', \alpha_1}(t), \quad t > 0.$$

引理 2.5 [18] 令 $0 < \alpha_m < \alpha_{m-1} < \cdots < \alpha_1 < 1$, 函数$t^{\alpha_1-1}E^{(p)}_{\alpha',\alpha_1}(t)$ 对$t > 0$ 是正的.

命题 2.6 令$\lambda_p > 0$ 和$0 < \alpha_m < \alpha_{m-1} < \cdots < \alpha_1 < 1$, 则对$t > 0$ 有$0 < \lambda_p t^{\alpha_1} E^{(p)}_{\alpha', 1+\alpha_1}(t) < 1$, 并且$\lambda_p t^{\alpha_1} E^{(p)}_{\alpha', 1+\alpha_1}(t)$ 在$t > 0$ 是严格增函数.

证

$$\frac{d}{dt}\left\{\lambda_p t^{\alpha_1} E^{(p)}_{\alpha', 1+\alpha_1}(t)\right\} = \lambda_p t^{\alpha_1 - 1} E^{(p)}_{\alpha', \alpha_1}(t) > 0.$$

我们注意到$\lambda_p t^{\alpha_1} E^{(p)}_{\alpha', 1+\alpha_1}(t)$ 在t上是连续函数. 因此, 我们有$\lim_{t\to 0}(\lambda_p t^{\alpha_1} E^{(p)}_{\alpha', 1+\alpha_1}(t)) = 0$ 和$\lim_{t\to\infty}(\lambda_p t^{\alpha_1} E^{(p)}_{\alpha', 1+\alpha_1}(t)) = C_1$. 证毕.

引理 2.7 [18] 对$\lambda_p > 0$ 和$0 < \alpha_s < \alpha_{s-1} < \cdots < \alpha_1 < 1$, 存在一个依赖于$\alpha$, T 的正的常数$\underline{C} < 1$ 使得

$$\frac{\underline{C}}{\lambda_p T^{\alpha_1}} \le E^{(p)}_{\alpha', 1+\alpha_1}(T) \le \frac{1}{T^{\alpha_1}\lambda_p}.$$

定义 2.8 令$b \ge \beta$. 对每一个$v \in \mathbb{H}$, $B_\alpha v$ 的定义如下

$$B_\alpha v := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \alpha\lambda_n^b}\right) \langle v, \phi_n \rangle \phi_n.$$

假设H. 我们考虑一个函数$h : [0, T] \to R$, 如果h 在$[0, T]$ 是连续的, 存在一个常数$T_0 \in [0, T)$ 使得对于一些常数$\eta > 0$, 有$|h(t)| \ge \eta > 0$,$t \in [T_0, T]$ 成立, 则h 就称为满足假设**H**. 此外, 还需要满足以下两条件之一:

H1 $h(t)$ 在$[0, T]$ 上不变号.

H2 如果$h(t)$ 在$[0, T]$ 上变号, 则$h(t)$ 是可微的, 且存在一个常数θ 使得$|h_t(t)| \le q, t \in [0, T]$. 并且有$|h(t)| \le \frac{\eta(T-T_0)}{T_0}$, $t \in I$, 其中$I = \{t : h(t)h(T) < 0\}$.

注1 假设**H2** 允许$h(t)$ 在$[0, T]$ 上变号, 在这种情况, 假设**H2** 要确保f 的表达式右侧的分母不为零, 即

$$\int_0^T (T - s)^{\alpha_1 - 1} E^{(n)}_{\alpha', \alpha_1}(T - s) ds \ne 0.$$

定理 2.9 反源问题(1) 有如下唯一的解

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle g,\phi_n\rangle\,\phi_n}{\int_0^T(T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds}.$$

证 根据文献 [18], 问题(1) 的解有如下表达式

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nQ_n(t)\phi_n(x), \tag{6}$$

其中$H_n(t)=\int_0^t h(s)(t-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(t-s)ds$, $f_n=(f,\phi_n)$. 取$t=T$, 由$u(x,T)=g$, 用上式和ϕ_n做内积, 我们有

$$\langle g,\phi_n\rangle=\int_0^T(T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds\,\langle f,\phi_n\rangle\,.$$

进一步, 我们有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle g,\phi_n\rangle\,\phi_n}{\int_0^T(T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds}.$$

证毕.

3. 反问题的条件稳定性

定理 3.1 假设$h(t)$ 满足假设**H** 和$f(x)$ 是问题(1) 的解. 对一些正常数E和p, 如果$\|u(x,T)\|=\|g\|\le\varepsilon$ 和$\|f\|_p\le E$, 则存在一个常数$\overline{C}_1>0$ 使得

$$\|f\|\le\overline{C}_1\varepsilon^{\frac{p}{p+\beta}}E^{\frac{\beta}{p+\beta}}. \tag{7}$$

为了证明定理3.1, 我们需要以下结果.

引理 3.2 如果$h(t)$ 满足假设**H**, 则存在一个常数$C_2>0$ 使得

$$\left|\lambda_n^\beta\int_0^T(T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds\right|\ge C_2,\ \ n=1,2,\cdots$$

证 情况1. $h(t)$ 满足假设**H1**. 由于$h(t)$ 在$[0,T]$ 上不变号, 我们有

$$\begin{aligned}&\left|\lambda_n^\beta\int_0^T(T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds\right|\\&=\lambda_n^\beta\int_0^T(T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)|h(s)|ds\\&\ge\eta\int_{T_0}^T\lambda_n^\beta(T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)ds\\&=\eta\lambda_n^\beta(T-T_0)^{\alpha_1}E^{(n)}_{\alpha',1+\alpha_1}(T-T_0)\\&\ge\eta\lambda_1^\beta(T-T_0)^{\alpha_1}E^{(n)}_{\alpha',1+\alpha_1}(T-T_0)\end{aligned} \tag{8}$$

情况2. $h(t)$ 满足假设**H2**. 令$D = t : h(t)h(T) \geq 0$, $T_1 = \max\{t : t \in [0,T], h(t) = 0\}$ 和

$$C_3 = \left(\frac{\underline{C}\left(-|h(0)| + q\right)}{\eta} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \tag{9}$$

其中C_1 在引理2.3中已经给定. 我们有$0 < T_1 < T_0$, $[T_1, T] \subseteq D$ 和$I \subseteq [0, T_1]$. 当$\lambda_n \geq C_3$, 通过命题2.5, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \lambda_n^\beta \int_0^T (T-s)^{\alpha_1 - 1} E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s) h(s) ds \right| \\
&= \lambda_n^\beta \left| \int_D (T-s)^{\alpha_1-1} E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s) h(s) ds + \int_I (T-s)^{\alpha_1-1} E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s) h(s) ds \right| \\
&\geq \lambda_1^\beta \int_D (T-s)^{\alpha_1-1} E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s) |h(s)| ds - \lambda_1^\beta \int_I (T-s)^{\alpha_1-1} E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s) |h(s)| ds \\
&\geq \lambda_1^\beta \int_{T_1}^T (T-s)^{\alpha_1-1} E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s) |h(s)| ds - \frac{\eta(T-T_0)}{T_0} \lambda_1^\beta \int_0^{T_1} (T-s)^{\alpha_1-1} E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s) ds \\
&\geq \lambda_1^\beta (T-T_1)^{\alpha_1-1} E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s) \left(\int_{T_1}^T |h(s)| ds - \frac{\eta(T-T_0)}{T_0} \int_0^{T_1} ds \right) \\
&\geq \lambda_1^\beta (T-T_1)^{\alpha_1-1} E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s) \left(\int_{T_1}^T |h(s)| ds + \int_{T_0}^T \eta ds - \frac{\eta T_1 (T-T_0)}{T_0} \right) \\
&\geq \lambda_1^\beta (T-T_1)^{\alpha_1-1} E^{(C_3)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s) \left(\int_{T_1}^T |h(s)| ds + \frac{\eta(T-T_0)(T_0-T_1)}{T_0} \right).
\end{aligned} \tag{10}$$

当$\lambda_n \leq C_3$, 通过分部积分我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \lambda_n^\beta \int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1} E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s) h(s) ds \right| \\
&= \left| h(0) \lambda_n^\beta T^{\alpha_1} E^{(n)}_{\alpha',1+\alpha_1}(T) + \int_0^T h_s(s) \lambda_n^\beta (T-s)^{\alpha_1} E^{(n)}_{\alpha',1+\alpha_1}(T-s) \right| \\
&\geq |h(0)| \lambda_n^\beta T^{\alpha_1} E^{(n)}_{\alpha',1+\alpha_1}(T) - \int_0^T \lambda_n^\beta (T-s)^{\alpha_1} E^{(n)}_{\alpha',1+\alpha_1}(T-s) |h_s(s)| ds \\
&\geq |h(0)| \lambda_n^\beta T^{\alpha_1} E^{(n)}_{\alpha',1+\alpha_1}(T) - q \int_0^T \lambda_n^\beta (T-s)^{\alpha_1} E^{(n)}_{\alpha',1+\alpha_1}(T-s) ds \\
&= |h(0)| \lambda_n^\beta T^{\alpha_1} E^{(n)}_{\alpha',1+\alpha_1}(T) + q \lambda_n^\beta T^{\alpha_1+1} E^{(n)}_{\alpha',2+\alpha_1}(T) ds.
\end{aligned} \tag{11}$$

进一步, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \lambda_n^\beta \int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1} E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s) h(s) ds \right| \\
&\geq \frac{|h(0)| \lambda_n^\beta T^{\alpha_1} \underline{C}}{\lambda_n^\beta T^{\alpha_1}} + \frac{q T^{\alpha_1+1} \underline{C} \lambda_n^\beta}{\lambda_n^\beta T^{\alpha_1}} \\
&\geq \underline{C} |h(0)| + \underline{C} q \\
&\geq \eta.
\end{aligned} \tag{12}$$

由(10) 和(12), 存在一个常数$C_2>0$ 使得

$$\left|\lambda_n^{\beta}\int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds\right|\geq C_2,\ n=1,2,\cdots \tag{13}$$

证毕.

现在我们来证明定理3.1.

用Holder不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\|f\|^2&=\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,\phi_n\rangle^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\frac{2p\beta}{p+\beta}}|\langle f,\phi_n\rangle|^{\frac{2\beta}{p+\beta}}\right)\left(\lambda_n^{\frac{-2p\beta}{p+\beta}}|\langle f,\phi_n\rangle|^{\frac{2p}{p+\beta}}\right)\\&\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2p}|\langle f,\phi_n\rangle|^2\right)^{\frac{\beta}{p+\beta}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2\beta}|\langle f,\phi_n\rangle|^2\right)^{\frac{p}{p+\beta}}\\&\leq E^{\frac{2p}{p+\beta}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle g,\phi_n\rangle^2}{\left(\lambda_n^{\beta}\int_0^T(T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds\right)^2}\right]^{\frac{p}{p+\beta}}.\end{aligned} \tag{14}$$

由引理3.2, 存在一个常数$\overline{C}_1>0$ 使得

$$\|f\|^2\leq\overline{C_1}^2E^{\frac{2p}{p+\beta}}\|g\|^{\frac{2p}{p+\beta}}. \tag{15}$$

因此,

$$\|f\|\leq\overline{C_1}E^{\frac{p}{p+\beta}}\varepsilon^{\frac{p}{p+\beta}}. \tag{16}$$

证毕.

注2 反源问题(1) 是病态的. (1) 的解如果存在, 可能不连续依赖于终端数据. 由于$h(t)$ 在$[0,T]$上一个连续函数, 存在一个常数$C_4>0$ 使得$C_4=\sup\limits_{t\in[0,T]}|h(t)|<+\infty$. 我们有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T(T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds\right|\\&\leq C_4\left|\int_0^T(T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)ds\right|\\&=C_4T^{\alpha_1}E^{(n)}_{\alpha',1+\alpha_1}(T)\\&\leq\frac{C_4T^{\alpha_1}}{1+\lambda_n^{\beta}T^{\alpha_1}}\leq\frac{C_4}{\lambda_n^{\beta}}.\end{aligned} \tag{17}$$

因此

$$\left(\int_0^T(T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds\right)^{-1}\geq\frac{\lambda_n^{\beta}}{C_4}. \tag{18}$$

由$\lambda_n^{\beta}\to\infty$, f 不连续依赖于数据, 故反源问题(1) 是病态的.

DOI: 10.12677/aam.2023.126288

4. 先验参数选取规则和收敛速度

在本节中, 我们提出了从问题(4) 逼近问题(1) 的误差估计. 我们从正则化参数先验选取规则中得到了Holder型误差估计. 理论结果在下面的定理4.1中陈述.

定理 4.1 设$h(t)$ 满足假设**H1**. 对$b \geq \beta$, 问题(4) 是适定的. 此外, 如果问题f (1) 的解满足

$$\|f\|_p \leq E,\ p>0,\ E>\varepsilon, \tag{19}$$

和f_α 是问题(4) 的解, 则下列陈述成立:

(i) 如果$0<p<b$, 则当$\alpha=\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^{\frac{b}{p+\beta}}$, 存在一个常数$\overline{C_2}$ 使得

$$\|f_\alpha - f\| \leq \overline{C_2}\varepsilon^{\frac{p}{p+\beta}}E^{\frac{\beta}{p+\beta}}. \tag{20}$$

(ii) 如果$p \geq b$, 则当$\alpha=\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^{\frac{b}{p+\beta}}$, 存在一个常数$\overline{C_3}$ 使得

$$\|f_\alpha - f\| \leq \overline{C_3}\varepsilon^{\frac{b}{p+\beta}}E^{\frac{\beta}{p+\beta}}. \tag{21}$$

首先, 我们提出一些结果来证明定理4.1.

引理 4.2 对$b \geq \beta$, 问题(4) 是适定的. 此外, 如果$f_\alpha \in D(A^{b-\beta})$, $v(t) \in D(A^b)$, $t \in [0,T)$, 则存在一个常数C_5 使得

$$\|f_\alpha\| \leq C_5 \alpha^{-\frac{\beta}{b}}\|g^\varepsilon\|.$$

证 与(6) 类似, 问题(4) 的解存在, 解的表达式如下所示:

$$v(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(t-s)h(s)ds\,\langle f_\alpha,\phi_n\rangle\, ds\right)\phi_n.$$

与引理2.7类似, 我们有

$$\begin{aligned}\langle g^\varepsilon,\phi_n\rangle &= \int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)\left\langle (I+\alpha A^b)f_\alpha,\phi_n\right\rangle h(s)ds\\ &= (I+\alpha\lambda_n^b)\langle f_\alpha,\phi_n\rangle \int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds.\end{aligned} \tag{22}$$

因此, 在问题(4) 中的f_α 的表达式如下:

$$f_\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle g^\varepsilon,\phi_n\rangle\phi_n}{(I+\alpha\lambda_n^\beta)\int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds}, \tag{23}$$

和

$$v(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(t-s)h(s)ds\,\langle g^\varepsilon,\phi_n\rangle\phi_n}{(I+\alpha\lambda_n^b)\int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds}. \tag{24}$$

由(13), 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1} E_{\alpha',\alpha_1}^{(n)}(T-s)h(s)ds}\\&=\frac{\lambda_n^\beta}{\lambda_n^\beta \int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1} E_{\alpha',\alpha_1}^{(n)}(T-s)h(s)ds}\\&\leq \frac{\lambda_n^\beta}{C_3}\end{aligned} \tag{25}$$

从(18) 和(25), 我们得到

$$\frac{\lambda_n^\beta}{C_4} \leq \frac{1}{\int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1} E_{\alpha',\alpha_1}^{(n)}(T-s)h(s)ds} \leq \frac{\lambda_n^\beta}{C_2} \tag{26}$$

进一步, 由(26) 我们有

$$\begin{aligned}\|f_\alpha\|_{b-\beta}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{2(b-\beta)} \langle g^\varepsilon, \phi_n\rangle^2}{\left((1+\alpha\lambda_n^b)\int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1} E_{\alpha',\alpha_1}^{(n)}(T-s)h(s)ds\right)^2}\\&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{2(b-\beta)}\lambda_n^{2\beta} \langle g^\varepsilon, \phi_n\rangle^2}{{C_2}^2(1+\alpha\lambda_n^b)^2}\\&\leq \frac{\|g^\varepsilon\|^2}{{C_2}^2\alpha^2} < +\infty.\end{aligned} \tag{27}$$

这就证明了$f_\alpha \in D(A^{b-\beta})$. 同样的, 我们有以下估计

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_b^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{2b}\lambda_n^{2\beta}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} E_{\alpha',\alpha_1}^{(n)}(t-s)h(s)ds\right)^2 \langle g^\varepsilon, \phi_n\rangle^2}{{C_2}^2(1+\alpha\lambda_n^b)^2}\\&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{2\beta}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} E_{\alpha',\alpha_1}^{(n)}(t-s)h(s)ds\right)^2 \langle g^\varepsilon, \phi_n\rangle^2}{{C_2}^2\alpha^2}\\&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-t^{\alpha_1} E_{\alpha',1+\alpha_1}^{(n)}(t)\right)^2 \lambda_n^{2\beta} \langle g^\varepsilon, \phi_n\rangle^2}{{C_2}^2\alpha^2}\\&\leq \frac{\left(\frac{-C_1 t^{\alpha_1}}{1+\lambda_n^\beta t^{\alpha_1}}\right)^2 \lambda_n^{2\beta} \langle g^\varepsilon, \phi_n\rangle^2}{{C_2}^2\alpha^2}\\&\leq \frac{{C_1}^2\|g^\varepsilon\|_b^2}{{C_2}^2\alpha^2} < +\infty.\end{aligned} \tag{28}$$

因此$v(t) \in D(A^b)$. 另一方面

$$\|f_\alpha\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g^\varepsilon, \phi_n\rangle^2}{\left((1+\alpha\lambda_n^b)\int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1} E_{\alpha',\alpha_1}^{(n)}(T-s)h(s)ds\right)^2}. \tag{29}$$

对$b > \beta$, 用Young不等式, 我们有

$$1 + \alpha\lambda_n^b \geq \frac{b-\beta}{b} \cdot 1^{\frac{b}{b-\beta}} + \frac{\beta}{b}\left(\alpha^{\frac{\beta}{b}}\lambda_n^\beta\right)^{\frac{b}{\beta}} \geq \alpha^{\frac{\beta}{b}}\lambda_n^\beta, \tag{30}$$

或

$$1 + \alpha\lambda_n^b \geq \alpha^{\frac{\beta}{b}}\lambda_n^\beta\ . \tag{31}$$

对所有$b \geq \beta$.
由此可见,

$$\|f_\alpha\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{-\frac{2\beta}{b}}\left\langle g^\varepsilon, \phi_n\right\rangle^2}{\left(\lambda_n^\beta \int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1} E_{\alpha',\alpha_1}^{(n)}(T-s)h(s)ds\right)^2}. \tag{32}$$

由引理3.3和(32), 存在一个常数C_5 使得

$$\|f_\alpha\| \leq C_5\alpha^{-\frac{\beta}{b}}\|g^\varepsilon\|. \tag{33}$$

证毕.

在下文中, 我们用$f_{1\alpha}$ 来表示下面问题的解

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} q_j\, \partial_{0^+}^{\alpha_j}\omega(x,t) + A^\beta\omega(x,t) = (I+\alpha A^b)f_{1\alpha}h(t), & (x,t) \in \Omega_T := \Omega \times I, \\ \omega(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \omega(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times I, \end{cases} \tag{34}$$

当$t = T$ 时, 有$\omega(x,T) = g$. (34) 的解的表达式如下:

$$\|f_{1\alpha}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\langle g, \phi_n\right\rangle^2 \phi_n}{(1+\alpha\lambda_n^b)\int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1} E_{\alpha',\alpha_1}^{(n)}(T-s)h(s)ds}. \tag{35}$$

引理 4.3 如果$f_{1\alpha}$ 是问题(34) 的解和f_α 是问题(4) 的解, 则

$$\|f_\alpha - f_{1\alpha}\| \leq C_5\alpha^{-\frac{\beta}{b}}\varepsilon.$$

证 我们看到$f_\alpha - f_{1\alpha}$ 是问题(4) 的解, 也就是用$g^\varepsilon - g$ 代替g^ε. 用引理4.2, 我们有

$$\|f_\alpha - f_{1\alpha}\| \leq C_5\alpha^{-\frac{\beta}{b}}\|g^\varepsilon - g\| \leq C_5\alpha^{-\frac{\beta}{b}}\varepsilon.$$

证毕.
引理 4.4 如果对一些正常数p, $E > 0$, $\|f\|_p \leq E$, 则存在一个常数$C_8 > 0$ 使得

$$\|f - f_{1\alpha}\| \leq \begin{cases} \alpha^{\frac{\beta}{b}}, & p < b, \\ C_6\alpha E, & p \geq b. \end{cases}$$

证 我们有

$$
\begin{aligned}
\|f-f_{1\alpha}\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle f-f_{1\alpha},\phi_n\rangle^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\langle g,\phi_n\rangle}{\int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds}-\frac{\langle g,\phi_n\rangle}{(1+\alpha\lambda_n^b)\int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds}\right\}^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^2\lambda_n^{2b}\langle g,\phi_n\rangle^2}{\left((1+\alpha\lambda_n^b)\int_0^T (T-s)^{\alpha_1-1}E^{(n)}_{\alpha',\alpha_1}(T-s)h(s)ds\right)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha\lambda_n^{b-p}}{1+\alpha\lambda_n^b}\right)^2\lambda_n^{2p}\langle f,\phi_n\rangle^2.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

如果$p<b$, 用Young不等式, 我们有

$$
1+\alpha\lambda_n^b \geq \frac{p}{b}\cdot 1^{\frac{b}{p}}+\frac{b-p}{b}\left(\alpha^{\frac{b-p}{b}}\lambda_n^{b-p}\right)^{\frac{b}{b-p}} \geq \alpha^{\frac{b-p}{b}}\lambda_n^{b-p}. \tag{37}
$$

因此,

$$
\|f_\alpha-f_{1\alpha}\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{\frac{2p}{b}}\lambda_n^{2p}\langle f,\phi_n\rangle^2 \leq \alpha^{\frac{2p}{b}}E^2. \tag{38}
$$

如果$p\geq b$, 则

$$
\|f_\alpha-f_{1\alpha}\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^2\lambda_1^{2(b-p)}\lambda_n^{2p}\langle f,\phi_n\rangle^2 \leq \lambda_1^{2(b-p)}\alpha^2E^2. \tag{39}
$$

证毕.

现在我们来证明定理4.1. 我们首先给出定理4.1第一部分的证明过程.

证 如果$p<b$, 由引理4.3和引理4.4, 我们有

$$
\begin{aligned}
\|f-f_\alpha\| &\leq \|f-f_{1\alpha}\|+\|f_\alpha-f_{1\alpha}\| \\
&\leq \alpha^{\frac{p}{b}}E+C_5\alpha^{-\frac{\beta}{b}}\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

选取$\alpha=\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^{\frac{b}{p+\beta}}$, 存在一个常数$\overline{C_2}>0$ 使得

$$
\|f-f_\alpha\| \leq \overline{C_2}\varepsilon^{\frac{p}{p+\beta}}E^{\frac{\beta}{p+\beta}}. \tag{41}
$$

证毕.

接着我们证明定理4.1的第二部分.

证 如果$p\geq b$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\|f-f_\alpha\| &\leq \|f-f_{1\alpha}\|+\|f_\alpha-f_{1\alpha}\| \\
&\leq C_6\alpha E+C_5\alpha^{-\frac{\beta}{b}}\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

选取$\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^{\frac{b}{b+\beta}}$，存在一个常数$\overline{C_3} > 0$ 使得

$$\|f - f_\alpha\| \leq \overline{C_3}\varepsilon^{\frac{b}{b+\beta}} E^{\frac{\beta}{b+\beta}}. \tag{43}$$

定理4.1的第二部分就证明完成. 因此, 定理4.1证毕.

5. 总结与展望

本文考虑利用拟逆方法求解多项时间分数阶扩散方程, 在原方程中增加一个小扰动, 使得原方程适定. 基于Mittag-Leffler函数的性质, 在先验正则化参数选择规则下, 我们得到了正则化解的误差估计. 通过查阅文献发现, 对于单项时间分数阶扩散方程反源问题的研究颇为丰富, 但是对多项时间分数阶扩散方程反问题的研究为数不多, 对此我们在前人基础上对问题施加拟逆正则化方法, 将单项拟逆反源中得到的重要结果推广到了多项拟逆反源的问题中, 并且得到了反问题的条件稳定性和正则化解的表达形式. 对于多项时间分数阶扩散方程, 本文仅处理了线性问题, 对于非线性源项的问题是否具有同样的收敛结果有待进一步研究, 且该方法是否能够处理多项时间分数阶扩散方程同时反演初值和源项的问题还未可知, 需要进一步的研究.

参考文献

[1] Ionescu, C.-M., Lopes, A., Copot, D., Machado, J.A.T. and Bates, J.H.T. (2017) The Role of Fractional Calculus in Modelling Biological Phenomena. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **51**, 141-159. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.04.001

[2] Hilfer, R. (2000) Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/3779

[3] Laskin, N. (2017) Time Fractional Quantum Mechanics. *Chaos, Solitons & Fractals*, **102**, 16-28. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.04.010

[4] Tarasov, V.E. (2010) Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Springer-Verlag, Beijing.

[5] Machado, J.A.T. and Lopes, A.M. (2016) Relative Fractional Dynamics of Stock Markets. *Nonlinear Dynamics*, **29**, 1613-1619. https://doi.org/10.1007/s11071-016-2980-1

[6] Jin, B. and Rundell, W. (2015) A Tutorial on Inverse Problems for Anomalous Diffusion Processes. *Inverse Problems*, **31**, Article 035003. https://doi.org/10.1088/0266-5611/31/3/035003

[7] Caputo, M., Carcione, J. and Botelho, M. (2015) Modeling Extreme-Event Precursors with the Fractional Diffusion Equation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **18**, 208-222. https://doi.org/10.1515/fca-2015-0014

[8] Weiss, G. (1994) Aspects and Applications of the Random Walk. North-Holland, Amsterdam.

[9] Podlubny, I. (1999) Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. In: *Mathematics in Science and Engineering*, Vol. 198, Academic Press, Cambridge, MA.

[10] Zhang, Y. and Xu, X. (2011) Inverse Source Problem for a Fractional Diffusion Equation. *Inverse Problems*, **27**, Article 035010. https://doi.org/10.1088/0266-5611/27/3/035010

[11] Wei, T., Sun, L.L. and Li, Y.S. (2016) Uniqueness for an Inverse Space-Dependent Source Term in a Multi-Dimensional Time-Fractional Diffusion Equation. *Applied Mathematics Letters*, **61**, 108-113. https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.05.004

[12] Wei, T. and Wang, J.G. (2014) A Modified Quasi-Boundary Value Method for the Backward Time-Fractional Diffusion Problem. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **78**, 95-111. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2013.12.002

[13] Yang, F., Fu, J.L., Fan, P. and Li, X.X. (2021) Fractional Landweber Iterative Regularization Method for Identifying the Unknown Source of the Time-Fractional Diffusion Problem. *Acta Applicandae Mathematicae*, **175**, Article No. 13. https://doi.org/10.1007/s10440-021-00442-1

[14] Sun, C.L. and Liu, J.J. (2020) An Inverse Source Problem for Distributed Order Time-Fractional Diffusion Equation. *Inverse Problems*, **36**, Article 055008. https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab762c

[15] Zhang, M.M. and Liu, J.J. (2021) On the Simultaneous Reconstruction of Boundary Robin Coefficient and Internal Source in a Slow Diffusion System. *Inverse Problems*, **37**, Article 075008.

[16] Liu, J.J. and Yamamoto, M. (2010) A Backward Problem for the Time-Fractional Diffusion Equation. *Applicable Analysis*, **89**, 1769-1788. https://doi.org/10.1080/00036810903479731

[17] Cheng, J., Nakagawa, J., Yamamoto, M. and Yamazaki, T. (2009) Uniqueness in an Inverse Problem for a One-Dimensional Fractional Diffusion Equation. *Inverse Problems*, **25**, Article 115002. https://doi.org/10.1088/0266-5611/25/11/115002

[18] Li, Z.Y., Liu, Y.K. and Yamamoto, M. (2015) Initial-Boundary Value Problems for Multi-Term Time-Fractional Diffusion Equations with Positive Constant Coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, **257**, 381-397. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.073

[19] Wang, J.-G. and Wei, T. (2014) An Iterative Method for Backward Time-Fractional Diffusion Problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **30**, 2029-2041. https://doi.org/10.1002/num.21887

[20] Wang, J.G., Zhou, Y.B. and Wei, T. (2013) A Posteriori Regularization Parameter Choice Rule for the Quasi-Boundary Value Method for the Backward Time-Fractional Diffusion Problem. *Applied Mathematics Letters*, **26**, 741-747. https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.02.006

[21] 刘继军. 不适定问题的正则化方法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[22] Bazhlekova, E. (2013) Properties of the Fundamental and the Impulse-Response Solutions of Multi-Term Fractional Differential Equations. *Complex Analysis and Applications*' 13, Sofia, 31 October-2 November 2013, 55-64.

[23] Sun, L.L., Li, Y.S. and Zhang, Y. (2021) Simultaneous Inversion of the Potential Term and the Fractional Orders in a Multi-Term Time-Fractional Diffusion Equation. *Inverse Problems*, **37**, Article 055007. https://doi.org/10.1088/1361-6420/abf162