Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(7), 3139-3143
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.127314

Hans汉斯

一类特殊的*p*-模Frobenius群

李亚利*，何满意，钟佐琴

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南 昆明

收稿日期：2023年6月11日；录用日期：2023年7月5日；发布日期：2023年7月14日

摘 要

有限群论中著名的Frobenius定理揭示了Frobenius群的内部结构，Frobenius群在有限群及群表示论的研究领域中都起着非常重要的作用。设*p*为某素数，1996年，Kuisch和Waall类比一般的Frobenius群结构，给出了*p*-模Frobenius群的定义。本文概述了*p*-模Frobenius群的常用性质，刻画了一类特殊的*p*-模Frobenius群的结构。

关键词

Frobenius群，*p*-模Frobenius群，Brauer特征标

A Special Class of *p*-Module Frobenius Groups

Yali Li*, Manyi He, Zuoqin Zhong

School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Jun. 11th, 2023; accepted: Jul. 5th, 2023; published: Jul. 14th, 2023

Abstract

The famous Frobenius theorem gave the internal structures of Frobenius groups. Frobenius groups have played a very important role in the research field of finite group and group representation theory. Let *p* be a prime number, in 1996, Kuisch and Waall gave the definition of *p*-module Frobenius groups by analogy with Frobenius groups. In this note, several well-known properties and theorems of *p*-module Frobenius groups are introduced. A special class of *p*-module Frobenius groups are characterized.

*通讯作者。

文章引用：李亚利，何满意，钟佐琴．一类特殊的 *p*-模 Frobenius 群[J]．应用数学进展, 2023, 12(7): 3139-3143.
DOI: 10.12677/aam.2023.127314

Keywords

Frobenius Group, *p*-Module Frobenius Group, Brauer Character

1. 引言

本文的符号 G 均指有限群，p 总代表一个素数。用符号 $IBr(G)$ 和 $IBr_1(G)$ 分别表示群 G 的不可约 p-Brauer 特征标和非线性不可约 p-Brauer 特征标组成的集合。其他符号均是标准的，可以参考文献[1] [2]。

Frobenius 群在有限群理论的发展中有着非常重要的作用，关于 Frobenius 群及其推广的研究一直以来都是众多学者关注的热点问题。我们知道，以子群 N 为核的 Frobenius 群 G 有下列两条典型的性质：

1) 对任意的 $1 \neq x \in N$，均有 $C_G(x) \leq N$；

2) 对于任意的 $\chi \in Irr(G)$ 且 $N \not\subset \ker\chi$，均存在 $\theta \in Irr(N)$，使得 $\chi = \theta^G$。

1996 年，Kuisch 和 Waall [3]根据 Frobenius 群的特征标刻画条件，引进了 p-模 Frobenius 群的定义，其中 p 是素数，定义如下：

定义 0.1 [3]设 N 是群 G 的非平凡的正规子群，$K[N]$ 的分裂域 K 的特征为素数 p。如果群 G 满足下列条件之一，则称 G 是以正规子群 N 为核的 p-模 Frobenius 群。

1) 元素 x 在 G 中的中心化子是 N 的子群，也即成立 $C_G(x) \leq N$，其中 x 属于 N，且是非平凡 p-正则元。

2) 设 V 是不可约非平凡的 $K[N]$-模，V 诱导到 G 上是不可约的。

范娟娟，杜妮，曾吉文[4] [5]等人在 2011 年利用模特征标给出了 p-模 Frobenius 群的另一等价定义：

定义 0.2 [4]设 p 是某素数，非平凡子群 $N \lhd G$。如果对任意的非平凡 p-Brauer 特征标 $\theta \in IBr(N)$，均成立 $\theta^G \in IBr(G)$，则称 G 是以正规子群 N 为核的 p-模 Frobenius 群。

迄今为止，关于 p-模 Frobenius 群的研究并不多，近年来，曹慧芹、曾吉文[6]构造了模 Frobenius 群的 Frobenius 补的结构，进一步刻画了一类特殊的模 Frobenius 群。本文继续研究模 Frobenius 群的结构。首先概述了 p-模 Frobenius 群的常用结论，然后考察了以 $G'O^{p'}(G)$ 为核的 p-模 Frobenius 群 G 的性质和结构，得到了本文的主要结论，即下文的定理 2.2 和定理 2.3。

2. *p*-模 Frobenius 群的性质描述

为后续研究需要，也为了更多了解关于模 Frobenius 群的性质和结构，下文概述一些模 Frobenius 群的常用性质，下述结论来自文献[3] [4] [5]。

引理 1.1 [3]设 G 是 p-模 Frobenius 群，其中非平凡子群 $N \lhd G$，且 N 是 p-模 Frobenius 核。则要么子群 N 可解，要么 N 非可解，且当 N 非可解时，有下述结论成立：G 是 2-模 Frobenius 群，如果设 k 为某正整数，则 N 的任一非循环合成因子和 $PSL\left(2,3^{2^k}\right)$ 同构。

引理 1.2 [3]设 G 是 2-模 Frobenius 群，其中非平凡正规子群 N 是 2-模 Frobenius 核，若 N 是非可解子群，则 G/N 是一个 2-群。

引理 1.3 [4]设 G 是 p-模 Frobenius 群，其中非平凡正规子群 N 是 p-模 Frobenius 核，则结论 $Z(G)<N\le G'O^{p'}(G)$ 成立，并且中心且 $Z(G)$ 是 p-群。

引理 1.4 [4]设 G 是 p-模 Frobenius 群，其中非平凡正规子群 N 是 p-模 Frobenius 核，则成立 $(|N|,|G/N|)=p^n$，其中 n 为自然数。

我们知道，如果 G 是以 N 为核的 Frobenius 群，则 G/N 的 *Sylow* 2-子群是循环群或者广义四元数群。G/N 的 *Sylow* p-子群 $(p\ne 2)$ 均循环。对于 p-模 Frobenius 群的广义补的 *Sylow* 子群，有下列性质。

引理 1.5 [3]设 G 是以 N 为核的 p-模 Frobenius 群，其中 N 不是 p-群。则

1) 当 $(q,2p)=1$ 时，G/N 的 *Sylow* q-子群是循环群。

2) 当 p 为奇素数时，G/N 的 *Sylow* 2-子群是循环群或者广义四元数群。

此外，如果设 r 为素数，则任何一个非平凡的 r-群均可以同构与某个商群 X/Y，其中 X 是以 Y 为核的 r-模 Frobenius 群。

近来，曹慧芹、曾吉文[6]分析了模 Frobenius 群的内部群结构性质，结论如下。

引理 1.6 设 G 是有限群，H 是 G 的真子群，p-群 P 是 H 的正规子群。如果对任意的 $g\in G-H$，均成立 $H\cap H^g\le P$。并且子群 H 满足 $|H|_{p'}\ne|G|_{p'}$，则

1) $N=G-\left(\bigcup_{x\in G}(H-P)^x\right)$ 是 G 的正规子群。

2) G 是以 N 为核的 p-模 Frobenius 群，且 $H/P\cong G/N$。

注： 由于上述引理中 $H/P\cong G/N$，因此 H/P 可类比 Frobenius 群补的结构，作者在文献[6]把满足引理 1.6 条件的 p-模 Frobenius 群 G 称为强 p-模 Frobenius 群，且称 H/P 为强 p-模 Frobenius 群 G 的广义模 Frobenius 补。

类比 Frobenius 群的置换群定义刻画。文献[7]中也利用群作用的观点刻画了上述引理中的强 p-模 Frobenius 群。结论如下。

引理 1.7 有限群 G 是强 p-模 Frobenius 群当且仅当 G 传递作用在集合 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$ 上，其中 $|\Omega|$ 不是 p-数。且对于集合 Ω 中的点 k，如果设 P 是稳定子群 G_k 的非平凡正规 p-子群，则 G_k 中只有子群 P 的元素可以至少固定 Ω 中两个点。

3. 一类特殊的 p-模 Frobenius 群的刻画

引理 2.1 [8]设有限群 G 存在非线性不可约 p-Brauer 特征标，且 G 的任意非线性不可约 p-Brauer 特征标均为实值 Brauer 特征标。记 $N=G'O^{p'}(G)$，$H/N\in Sylow_2(G/N)$，则下列陈述成立。

a) 设 $\theta\in IBr(H)$，则 $\theta^G\in IBr(G)$ 或者存在 $\varphi\in IBr(G)$，使得 $\varphi_H=\theta$。特别地，如果 $N\not\subset\ker\theta$，则 $\theta^G\in IBr(G)$。

b) H 的任意非线性不可约 p-Brauer 特征标均为实值以及成立 $(|H|,|G/H|)=1$。

c) $(|N|,|G/N|)=2^k$，其中 k 是自然数。

定理 2.2 设有限群 G 存在非线性不可约 p-Brauer 特征标，且 G 的任意非线性不可约 p-Brauer 特征标均为实值 Brauer 特征标。如果 $|G/G'O^{p'}(G)|$ 是奇数，则下列陈述成立：

a) G 是可解群且 G 是以 $G'O^{p'}(G)$ 为核的 p-模 Frobenius 群。

b) $G'O^{p'}(G)$ 是 G 的正规 *Hall*-子群以及 $G'O^{p'}(G)$ 循环。

证明 由于 $|G/G'O^{p'}(G)|$ 是奇数，于是子群 $G'O^{p'}(G)$ 就是上述引理 2.1 中的子群 H。任取 $G'O^{p'}(G)$ 的

非主不可约 p-Brauer 特征标 θ，由于 θ 是非主 Brauer 特征标，因此 $G'O^{p'}(G)\not\subset\ker\theta$。于是根据上述定理的结论(a)可以得到 $\theta^G\in IBr(G)$。再利用 p-模 Frobenius 群的定义(2)，立即得证 G 是以 $G'O^{p'}(G)$ 为核的 p-模 Frobenius 群。

由于 $G/G'O^{p'}(G)$ 可换，往证 G 可解，只需证明 $G'O^{p'}(G)$ 可解。根据引理 1.1，$G'O^{p'}(G)$ 作为 p-模 Frobenius 核，当素数 p 是奇数时，$G'O^{p'}(G)$ 是可解群。下面假设 $p=2$ 以及 $G'O^{p'}(G)$ 不可解。由于 G 是以 $G'O^{p'}(G)$ 为核的 p-模 Frobenius 群，利用引理 1.1 和引理 1.4 可以得到，此时 $G/G'O^{p'}(G)$ 一定是 2-群，这与我们的已知条件 $\left|G/G'O^{p'}(G)\right|$ 是奇数矛盾。故得证 $G'O^{p'}(G)$ 是可解群，进而 G 是可解群。综上本定理的结论(a)得证。

此外，由于 $G'O^{p'}(G)$ 作为 p-模 Frobenius 核，显然 $G'O^{p'}(G)$ 不能是 p-群。于是结合 $\left|G/G'O^{p'}(G)\right|$ 是奇数，利用引理 1.5 得到，可换群 $G/G'O^{p'}(G)$ 的任意 Sylow-子群均是循环群，从而得证 $G/G'O^{p'}(G)$ 循环。根据引理 1.4 的结论，得到 $\left(\left|G'O^{p'}(G)\right|,\left|G/G'O^{p'}(G)\right|\right)=2^k$，其中 k 是自然数。注意到 $\left|G/G'O^{p'}(G)\right|$ 是奇数，因此 $\left(\left|G'O^{p'}(G)\right|,\left|G/G'O^{p'}(G)\right|\right)=1$，得证 $G'O^{p'}(G)$ 是 G 的正规 *Hall*-子群。综上，本定理结论(b)得证。

定理 2.3 设 G 是以 $G'O^{p'}(G)$ 为核的 p-模 Frobenius 群，则下述结论等价。

a) G 的任意非线性不可约 p-Brauer 特征标均为实值 Brauer 特征标。

b) $G'O^{p'}(G)$ 中的 p-正则元素均为 G 的实元素。

c) 任取 $G'O^{p'}(G)$ 的不可约 p-Brauer 特征标 θ，θ 和其共轭特征标 $\overline{\theta}$ 是 G-共轭的。

证明首先证明(a)和(b)等价。设结论(a)成立，任取 $G'O^{p'}(G)$ 中的 p-正则元素 x，往证 $\psi(x)\in\mathbb{R}$，其中 ψ 是群 G 的任意不可约 p-Brauer 特征标。

如果 ψ 是线性 p-Brauer 特征标，由于

$$G'O^{p'}(G)=\bigcap_{\psi\in LBr(G)}\ker\psi,$$

因此 $x\in\ker\psi,\forall\psi\in LBr(G)$，这意味着 $\psi(x)=\psi(1)=1\in\mathbb{R}$。如果 $\psi\in IBr_1(G)$，由于条件(a)，ψ 是实值 Brauer 特征标，于是显然 $\psi(x)\in\mathbb{R}$。故定理结论(b)得证。

设结论(b)成立，任取 $\psi\in IBr_1(G)$，往证 ψ 是实值 Brauer 特征标。只需要证明：任取 G 的 p-正则元素 x，均成立 $\psi(x)\in\mathbb{R}$ 即可。如果 $x\in G'O^{p'}(G)$，由于条件(b)可以知道 x 是群 G 的实元素，因此 $\psi(x)\in\mathbb{R}$ 自然成立。

如果 $x\in G-G'O^{p'}(G)$。注意到 $\psi\in IBr_1(G)$，结合 $G'O^{p'}(G)\not\subset\ker\psi$，以及 G 是以 $G'O^{p'}(G)$ 为核的 p-模 Frobenius 群，因此存在 $\theta\in G'O^{p'}(G)$，使得 $\theta^G=\psi$。于是成立：

$$\psi(x)=\theta^G(x)=\sum_{g\in G}\dot{\theta}\left(gxg^{-1}\right),$$

由于 $gxg^{-1}\notin G'O^{p'}(G),\forall g\in G$，所以 $\dot{\theta}\left(gxg^{-1}\right)=0$。因此 $\psi(x)=0\in\mathbb{R}$。故定理结论(a)成立。

其次证明(a)和(c)等价。设结论(a)成立。我们知道，$G'O^{p'}(G)$ 的主 p-Brauer 特征标显然是实值特征标，因此一定是 G-共轭的。下面任取 $G'O^{p'}(G)$ 的非主不可约 p-Brauer 特征标 θ。注意到 G 是以 $G'O^{p'}(G)$ 为核的 p-模 Frobenius 群，因此 $\theta^G\in IBr(G)$。由于 $\theta^G(1)=\theta(1)\left|G/G'O^{p'}(G)\right|>1$，所以根据条件(a)得到 θ^G 是实值不可约 p-Brauer 特征标。于是 $\theta^G=\overline{\theta^G}=\overline{\theta}^G$，这即意味着 θ 和 $\overline{\theta}$ 是 G-共轭的，从而结论(c)得证。

设结论(c)成立。任取 $\psi\in IBr_1(G)$，由于引理 2.1 结论(a)知道，一定存在 $\theta\in G'O^{p'}(G)$，使得 $\theta^G=\psi$。

根据条件(c)，可以设 $\theta^g = \bar{\theta}$，其中 $g \in G$。于是

$$\psi = \theta^G = \left(\theta^g\right)^G = \bar{\theta}^G = \overline{\theta^G} = \bar{\psi},$$

这意味着 ψ 是实值不可约 p-Brauer 特征标。根据 ψ 的任意性，得证结论(a)成立。

综上，本定理证明完毕。

4. 结语

Frobenius 群在有限群论的发展中起着非常重要的作用，Frobenius 群的推广形式也是众多学者研究关注的热点问题。本文研究了 Frobenius 群在特征为素数的域中的推广形式，即 p-模 Frobenius 群的性质和结构。特别地，我们利用 Brauer 特征标的理论知识刻画了一类特殊的 p-模 Frobenius 群的结构，这对后续研究 p-模 Frobenius 的一般群结构或者特征标结构均提供了良好的基础。

基金项目

国家自然科学基金项目(12201553)；云南民族大学教学研究项目(2022JG-032)；云南省兴滇英才青年专项；云南民族大学教育教学改革研究委托项目(2002JYJXGGWT-01)。

参考文献

[1] Isaacs, I.M. (1976) Character Theory of Finite Groups. Academic Press, New York.

[2] Navarro, G. (1998) Characters and Blocks of Finite Groups. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526015

[3] Kuisch, E.B. and van der Waall, R.W. (1996) Modular Frobenius Groups. *Manuscripta Mathematica*, **90**, 403-427. https://doi.org/10.1007/BF02568315

[4] Fan, J., Du, N. and Zeng, J. (2012) The Classification of Some Modular Frobenius Groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **85**, 11-18. https://doi.org/10.1017/S0004972711002486

[5] Fan, J., Du, N. and Zeng, J. (2013) Characterization of Modular Frobenius Groups of Special Type. *Acta Mathematica Scientia*, **33**, 525-531. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(13)60016-8

[6] Cao, H.Q. and Zeng, J.W. (2022) A Note on Modular Frobenius Groups. *Journal of Algebra and Its Applications*, **21**, Article ID: 2250020. https://doi.org/10.1142/S0219498822500207

[7] 曹慧芹. 关于强嵌入子群的一些应用[D]: [博士学位论文]. 厦门: 厦门大学, 2020.

[8] Li, Y., Zeng, J. and Chen, X. (2016) Groups Whose Nonlinear Irreducible Brauer Characters Are Real Valued. *Communications in Algebra*, **44**, 228-239. https://doi.org/10.1080/00927872.2014.975341