Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(7), 3378-3380
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.127336

Hans汉斯

一个关于极大子群的迹的定理

朱丽羽

西华师范大学数学与信息学院，四川 南充

收稿日期：2023年6月25日；录用日期：2023年7月19日；发布日期：2023年7月28日

摘　要

众所周知，极大子群的性质与群结构有着紧密的联系。围绕一个迹的一个未解决问题，考虑了极大子群的迹的超可解性质对可解群的影响，得到了关于可解群的一个充分必要条件，为推进上述问题的解决做了积极的尝试。

关键词

极大子群，迹，超可解性，可解群

One Theorem on Traces of Maximal Subgroups

Liyu Zhu

School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: Jun. 25th, 2023; accepted: Jul. 19th, 2023; published: Jul. 28th, 2023

Abstract

The properties of maximal subgroups are closely related to the structure of groups. Focusing on an unsolved problem of a trace, the influence of the supersolvable property of the trace of a maximal subgroup on the solvable group is considered, and a necessity and sufficiency for the solvable group is obtained, which makes a positive attempt to promote the solution of the above problem.

Keywords

Maximal Subgroup, Trace, Supersolvability, Solvable Group

文章引用: 朱丽羽. 一个关于极大子群的迹的定理[J]. 应用数学进展, 2023, 12(7): 3378-3380.
DOI: 10.12677/aam.2023.127336

1. 引言

本文只考虑有限群，相关术语和符号参考文献[1] [2]。特别地，群的阶记为$|G|$，$|G|$的全体素因子的集合记为$\pi(G)$。M是G的一个极大子群记为$M<\cdot G$，$\mathcal{F}=\{M<\cdot G|M\geq P\}$，这里$P$是$G$的一个Sylow p-子群。称$\mathcal{F}$的每个极大子群满足性质(*)，若$M\geq P$，则M的G-迹是p-幂零的。

Sylow子群、极大子群与群结构的相关课题受到国内外群论学者的广泛关注。例如，1937年，Hall [3]证明了：G是可解群当且仅当每个Sylow子群可补。1954年，Huppert [4]证明了：G是超可解群当且仅当每个极大子群具有素数指数。1982年，Arad和Ward [5]证明了：G是可解群当且仅当每个Sylow2-子群和Sylow3-子群可补。1996年，王燕鸣[6]揭示了子群的c-正规性质与群结构的联系。2019年，高百俊等[7]揭示了Sylow5-子群和Sylow7-子群的弱M-可补性质对群的非交换主因子的影响。2020年，鲍宏伟等[8]考虑了准素子群的弱M-可补性质对群的非交换主因子的影响。2021年，何金旅等[9]利用了c-极大子群的幂零迹刻画了可解群。2014年，郭文彬等[10]得到了G是可解的当且仅当每个极大子群有幂零的迹(或次正规的迹)。同时，他们提出如下问题：

([10]，问题3.6) 若G的每个极大子群有超可解的迹，则G是可解的？

继续以上的研究，将考虑每个极大子群的迹的超可解性以及$\mathcal{F}$中的每个极大子群满足性质(*)，得到了关于可解群的一个充分必要条件。

2. 基本概念

定义1 [10]设$A<G$，A_G是A在G中的柱心，H/A_G是G的任意主因子。称它是A的G-边界因子(或简称边界因子)，也称子群$A\cap H/A_G$为A的一个G-迹(或简称迹)。

引理 1 [11]若G的每个极大子群是超可解的，则G是可解的。

引理 2 [12]设P是群G的一个Sylow p-子群，$p\geq 5$。如果$N_G(P)/C_G(P)$是一个p-群，那么$O^p(G)<G$。

3. 主要定理

定理1 G是可解的充要条件G的每个极大子群有一个超可解的迹且$\mathcal{F}$的每个元素满足性质(*)。

证明：必要性。因为可解群的每个主因子都是交换的，所以G的每个极大子群具有交换的迹。因此，每个极大子群满足：有一个超可解的迹且$\mathcal{F}$的每个元素满足性质(*)。

充分性。假设定理不真且G是极小阶反例。

1) G是非单群。

假设G是一个单群。进而，每个极大子群M有唯一的G-边界因子$G/1=G/M_G$。根据定理的假设条件，$M\cap G/M_G\cong M\cap G=M$是超可解的。因此，$G$的每个极大子群是超可解的。根据引理1，$G$是可解的，这与$G$是极小阶反例矛盾。

2) G/L是可解的，L是非可解的，G的极小正规子群L唯一。

由(1)，可考虑商群G/L，对于G的任意一个极小正规子群L。若M/L是G/L的一个极大子群，则M也是G的极大子群。令H/M_G，$H\cap M/M_G$分别是M的一个G-边界因子和迹。因为$H/L\big/(M/L)_{G/L}\cong H/M_G$和$(H\cap M)/L\big/(M/L)_{G/L}\cong H\cap M/M_G$，所以$H/L\big/(M/L)_{G/L}$是$M/L$一个$G/L$-边界因子，

$(H\cap M)/L/(M/L)_{G/L}$ 是 M/L 的一个迹。根据假设条件，$(H\cap M)/L/(M/L)_{G/L}$ 是超可解的。

设 P/L 是 G/L 的一个Sylow p-子群。若 $T/L\ge P/L$，则 $T\ge P$，P是G的一个Sylow p-子群。根据假设条件，T/L 有p-幂零的迹 $(H\cap T)/L/(T/L)_{G/L}$。因此，G/L 满足定理的条件。由G的选择知 G/L 是可解的。根据扩张闭的性质，$L\not\le\Phi(G)$，L非可解，L是G的唯一极小正规子群。

3) 最后矛盾。

由(2)，$|\pi(L)|\ge 3$。令q是 $\pi(L)$ 的最大者，L_q 是L的一个Sylow q-子群，Q是G的一个Sylow q-子群，M是G的一个极大子群满足 $Q\le N_G(L_q)\le M$。根据Frattini论断，$G=LN_G(L_q)=LM$。显然，$M_G=1$，$L\cap M<M$，$L\cap M\trianglelefteq M$。由假设条件，M的迹 $L\cap M$ 满足性质(*)，即它是q-幂零的。由引理2，$O^q(L)<L$，矛盾。

综上所述，定理 1 得证。

4. 定理推论

推论 1 G 是可解的充要条件 G 的每个极大子群有一个超可解的迹且 $\mathcal{F}$ 的每个元素有一个幂零的迹。

推论 2 G 是可解的充要条件 G 的每个极大子群有一个超可解的迹且 $\mathcal{F}$ 的每个元素有一个交换的迹。

推论 3 G 是可解的充要条件 G 的每个极大子群有一个幂零的迹。

推论 4 G 是可解的充要条件 G 的每个 c-极大子群有一个幂零的迹。

5. 结束语

本文主要考虑了每个极大子群有一个超可解的迹且 $\mathcal{F}$ 的每个元素满足性质(*)对可解群的影响，得到了一个充分必要条件，也为推进文献[10]中问题 3.6 的解决做了积极的尝试。

参考文献

[1] 徐明曜. 有限群导引(上) [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[2] Guo, W. (2000) The Theory of Classes of Groups. Science Press, Kluwer Academic Publishers, Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London.

[3] Hall, P. (1937) A Characteristic Property of Soluble Groups. *Journal of the London Mathematical Society*, **12**, 198-200. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-12.2.198

[4] Huppert, B. (1954) Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, **60**, 409-434. https://doi.org/10.1007/BF01187387

[5] Arad, Z. and Ward, M.B. (1982) New Criteria for the Solvability of Finite Groups. *Journal of Algebra*, **77**, 234-246. https://doi.org/10.1016/0021-8693(82)90288-5

[6] Wang, Y. (1996) *C*-Normality of Groups and Its Properties. *Journal of Algebra*, **180**, 954-965. https://doi.org/10.1006/jabr.1996.0103

[7] 高百俊, 张佳, 朱振扬. 弱 M-可补子群对合成因子的影响[J]. 浙江大学学报(理学版), 2019, 46(5): 526-528.

[8] 鲍宏伟, 高百俊, 张佳. 有限群的非交换主因子[J]. 吉林大学学报(理学版), 2020, 58(5): 1079-1084.

[9] 何金旅, 吴金莲, 张佳. 关于可解群的三个充分必要条件[J]. 青海师范大学学报(自然科学版), 2021(4): 17-20.

[10] Guo, W., Skiba, A.N. and Tang, X. (2014) On Boundary Factors and Traces of Subgroups of Finite Groups. *Communications in Mathematics and Statistics*, **2**, 349-361. https://doi.org/10.1007/s40304-015-0043-4

[11] Robinson, D.J.S. (1982) A Course in the Theory of Groups. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0128-8

[12] Huppert, B. and Blackburn, N. (1982) Finite Groups III. Spring-Verlag, Berlin-New York. https://doi.org/10.1007/978-3-642-67997-1