Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(8), 3530-3536**
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.128351

平面图的无圈5-可选性

傅水苗

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2023年7月13日；录用日期：2023年8月3日；发布日期：2023年8月14日

摘 要

假设ϕ是图G的一个顶点染色。如果任意两个相邻的点染不同颜色，且每个圈至少使用三种颜色，则称ϕ是一个无圈染色。如果对于G的任意的k-列表配置L，G有一个无圈L-染色，则称G是无圈k-可选的。本文证明了3圈不与$i\,(i=3,7,9)$圈相邻和4圈不与$j\,(3\le j\le 6)$圈相邻的平面图是无圈5-可选的。

关键词

平面图，无圈染色，无圈可选性

Acyclic 5-Choosability of Planar Graph

Shuimiao Fu

College of Mathematics Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Jul. 13th, 2023; accepted: Aug. 3rd, 2023; published: Aug. 14th, 2023

Abstract

Let ϕ is a vertex coloring of graph G. The ϕ is acyclic if two adjacent vertices color with different colors and every cycle uses at least three colors. A graph G is k-acyclicallychoosable if G is acyclic L-list colorable for any list assignment L with $|L(v)|\ge k$ for each $v\in V(G)$. In this paper, we prove that a planar graph is acyclically 5-choosable if it does not contain an i-cycle adjacent to a j-cycle, where $j=3,7,9$ if $i=3$ and $3\le j\le 6$ if $i=4$.

Keywords

Planar Graph, Acyclic Coloring, Acyclic Choosability

文章引用: 傅水苗. 平面图的无圈 5-可选性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(8): 3530-3536.
DOI: 10.12677/aam.2023.128351

1. 引言

设 G 是一个具有顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 的图。G 的一个正常的 k-染色是一个映射 $\phi: V(G) \to \{1,2,\cdots,k\}$，使得对于任何边 $xy \in E(G)$ 有 $\phi(x) \neq \phi(y)$。如果每个圈使用至少三种颜色。则称 ϕ 是一个无圈 k-染色。如果 G 有一个无圈 k-染色，则称 G 是一个无圈 k-可染的。

1973 年 Grünbaum 在文献[1]提出猜想：每个平面图都是无圈 5-可染的。Borodin 在文献[2]证明了 Grünbaum 的猜想。1976 年，Kostochka 等人在文献[3]证明了存在二部 2-退化的平面图，它们不是无圈 4-可染的。所以这个界 5 是最好的。

图 G 的一个列表配置 L 是为 G 的每个顶点 v 分配一个可选颜色集 $L(v)$。如果 G 有一个正常的染色 ϕ，使得对每个顶点 v，$\phi(x) \in L(x)$，那么图 G 是 L 列表可染的。如果对每个顶点 v，$|L(v)| \geq k$，则称 L 是一个 k-列表配置。如果对于 G 的任意的 k-列表配置 L，G 都是 L-可染的，则称 G 是 k-可选的。如果对于 G 的任意的 k-列表配置 L，G 有一个无圈 L-染色，则称 G 是无圈 k-可选的。G 的无圈列表色数是使得 G 是无圈 k 可选的最小的整数 k。对于平面图得可选性，我们可以知道以下一些结果。

因为每个子图都有一个最多为 5 度的顶点，所以每个平面图都是 6-可选的，这是显然的。1993 年 Voigt 在文献[4]中给出了一个不是 4-可选的平面图的例子。之后 Thomassen 在文献[5]中证明了每个平面图都是 5-可选的。这也就论证了平面图是 5-可选的。通过平面图的可选性，下面扩展到无圈可选性。

对于列表无圈染色，早在 2002 年 Borodin 等人在文献[6]中证明了所有平面图都是无圈 7-可选的，并提出了以下猜想：

猜想 1 每个平面图都是无圈 5-可选的。

这个猜想是困难的，关于这个猜想很多人做了尝试。在 2011 年之前，它只验证了几个限制类的平面图：围长至少 5 [7]，没有 4 和 5 圈，或没有 4 和 6 圈[8]，没有 4 圈和弦 6 圈[9]，没有 4 圈也没有两个 3 圈的距离小于 3 [10]。在所有这些结果中，长度为 4 的圈都是被禁止的。2011 年，Borodin 和 Ivanova 在文献[11]中证明了 3 圈不与 $i(3 \leq i \leq 5)$ 圈相邻和 4 圈不与 $j(4 \leq j \leq 6)$ 圈相邻的平面图是无圈 5-可选的。2013 年，Borodin 等人在文献[12]中证明了没有 4 圈和 5 圈的平面图是无圈 4-可选的。2014 年，Wang 等人在文献[13]中证明了 4 圈不与 $i(i=3,4,5,6)$ 圈相邻的平面图是无圈 6-可选的。同年，Hou 和 Liu 在文献[14]中证明了每个环形图是无圈 8-可选的。2021 年，Sun lin 在在文献[15]中证明了没有 5 圈和相邻 4 圈的平面图是无圈 6-可选的。本文在这些基础上进行了拓展：

定理 1 3 圈不与 $i(i=3,7,9)$ 圈相邻和 4 圈不与 $j(3 \leq j \leq 6)$ 圈相邻的平面图是无圈 5-可选的。

本篇文章中所有的图都是有限简单图。对于一个平面图 G，$V(G)$，$E(G)$，$F(G)$ 是图 G 的点，边，面的集合。对于 $v \in V(G)$，$N_G(v)$ (或简单地用 $N(v)$ 来表示)表示 v 的邻居的集合，并且 $d_G(v) = |N_G(v)|$ (或简单地用 $d(v)$ 来表示)是 v 的度。假设 $N_G[v] = N_G(v) \cup \{x\}$。如果两个圈或者面至少有一个公共点，那么我们说他们是相交的。如果两个圈或者面至少有一条公共边，那么我们说他们是相邻的。如果 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 f 上按照顺时针的顺序的边界上的点，那么我们用 $[u_1 u_2 \cdots u_n]$ 去表示一个面 f，并且允许有重复的点。一个面 f 的度是其边界漫游中的边步数，用 $d_G(f)$ 表示。一个 k-点，k^--点，或者 k^+-点是一个 k 度，至少 k 度，或者至多 k 度的点。我们同样可以定义 k-面，k^--面，k^+-面。

对于 $x \in V(G) \cup F(G)$ 并且 $i \geq 2$，$n_i(x)$ 表示与 x 相邻或者相关联的 i-点的数量。如果一个点或者一

条边与一个 3-面相关联，那么它被称为三角形的。如果 uv 是一条不是三角形的边，并且 u 是一个三角形的 3-点，那么称 u 是 v 的坏的邻居。

2. 定理 1 的证明

设 G 是定理 1 的极小反例，就是说对于 $v\in V(G)$ 有一个 $|L(v)|\ge 5$ 的列表配置 L，使得 G 不是无圈 L-染色，而对于 $|V'(G)|<|V(G)|$ 的任何子图 $V'(G)$ 是无圈 L-染色。显然，G 是连通的并且没有 1-点。

2.1. 极小反例的结构性质

以下极小反例的结构性质的证明在文献[4] [5] [10]中。

引理 1 对于每个 $v\in V(G)$，G 有以下性质。

(A1) 一个 2-点不与一个 4^--点相邻。

(A2) 如果 $d(v)=3$，那么

(i) v 没有坏的邻居，并且

(i) 如果 v 与一个 3-点相邻，那么 v 不会与任何 4^--点相邻。

(A3) 4-点没有坏的邻居。

(A4) 如果 $d(v)=5$，那么

(i) $n_2(v)\le 1$，并且

(i) 如果 $n_2(v)=1$，那么 v 不会与任何三角形的 3-点相邻。

(A5) 如果 $d(v)=6$，那么

(i) $n_2(v)\le 4$，而且

(i) 如果 $n_2(v)=4$，那么 v 既不与一个 3-点相邻也不与一个 3-面相关联。

(A6) 如果 $d(v)=7$，那么 $n_2(v)\le 5$。

(A7) 不会存在一个 3-面 xyz 使得 $d(x)=3$，$d(y)\le 4$ 和 $d(z)\le 4$。

2.2. 权转移

由欧拉公式 $|V|-|E|+|F|=2$ 和公式 $\sum\limits_{v\in V} d_G(v)=2|E|=\sum\limits_{f\in F} d_G(f)$。我们可以得出

$$\sum_{v\in V}\left(d_G(v)-4\right)+\sum_{f\in F}\left(d_G(f)-4\right)=-8。$$

现在我们对每个 $x\in V\cup F$ 定义一个初始权重 $ch(x)$，设对每个 $v\in V$，$ch(v)=d_G(v)-4$，每个 $f\in F$，$ch(f)=d_G(f)-4$。我们将设计适当的权转移规则。由于权转移过程中，总的权值是固定的，如果我们将初始权值 $ch(x)$ 改变为最终权值 $ch'(x)$，使得对于每个 $x\in V\cup F$，都满足 $ch'(x)\ge 0$，那么

$$0\le \sum_{x\in V\cup F} ch(x)=\sum_{x\in V\cup F} ch'(x)=-8。$$

这将是一个矛盾。这意味着定理中的反例不存在，因此定理成立。

权转移规则如下：

R1 每个 10^+-面给 3-面转权 $\frac{1}{2}$。

R2 每个 2-点 v 的邻居给 2-点v转权 $\frac{1}{2}$，并且如果 v 不与一个 4-面相关联，那么与 v 相关联的 5^+-面给 v 转权 $\frac{1}{2}$，否则与 v 相关联的 7^+-面给 v 转权 1。

如果 5-面与一个 2-点和两个非三角形的 3-点相关联，那么我们称 5-面是虚弱的。

R3 如果 5^+-面是虚弱的，那么 5^+-面给每个相关联的非三角形的 3-点转权 $\frac{1}{4}$。如果 3-点与 4-面相关联，那么 5^+-面给每个相关联的非三角形的 3-点转权 $\frac{1}{2}$。如果 3-点与其他面相关联，那么 5^+-面给每个相关联的非三角形的 3-点转权 $\frac{1}{3}$。

R4 每个 5-面给三角形的 3-点转权 $\frac{1}{4}$，每个 10^+-面给三角形的 3-点转权 $\frac{1}{2}$。

R5 5^+-点给每个相邻的三角形的 3-点转权 $\frac{1}{6}$。

R6 如果 5^+-点与非三角形的 3-点相邻，且非三角形的 3-点与虚弱的 5-面相关联，那么 5^+-点给非三角形的 3-点转权 $\frac{1}{8}$。

因为 G 中 3 圈不与 $i(i=3,7,9)$ 圈相邻和 4 圈不与 $j(3\le j\le 6)$ 圈相邻，所以我们有如下命题。

命题 1 1) 当 5-面与 3-面中的某一边相邻时，3-面的另外两边都与 10^+-面相邻。

2) 3-面不与 6-面和 8-面相邻。

3) 4-面与 7^+-面相邻。

下面将检验对于所有的 $v\in V(G)$，$ch'(x)\ge 0$。

情况 1： $d(v)=2$。

在这种情况下，我们有 $ch(v)=2-4=-2$。根据引理 1 (A1)和 R2，则 $ch'(v)\ge ch(v)+2\times\frac{1}{2}+1=0$。

情况 2： $d(v)=3$。

在这种情况下，我们有 $ch(v)=3-4=-1$。如果 v 与一个 3-面 uvw 相关联并且与一个不是 u，w 的点 z 相邻，那么根据引理 1 (A3)，$d(z)\ge 5$，并且根据引理 1 (A7)，u，w 中至少有一点的度大于等于 5。由此 $ch'(v)\ge ch(v)+2\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}>0$。如果 v 与一个 4-面相关联，那么根据命题 1 和 R3，$ch'(v)\ge ch(v)+2\times\frac{1}{2}>0$。如果 v 在虚弱的 5-面的边界上，那么根据 R3 和 R6，$ch'(v)\ge ch(v)+2\times\frac{1}{8}+\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{4}>0$。这是因为根据引理 1 (F2)，$v$ 至少跟两个 5^+-点相邻，因此 v 最多与两个虚弱的 5-面相关联。否则，$ch'(v)\ge ch(v)+3\times\frac{1}{3}=0$。

情况 3： $d(v)=4$。

显然，$ch'(v)=ch(v)=0$。

情况 4： $d(v)=5$。

在这种情况下，$ch(v)=5-4=1$。根据引理 1 (A4)，有 $n_2(v)\le 1$。如果 $n_2(v)=0$，那么根据 R5 和 R6，$ch'(v)\ge ch(v)-5\times\frac{1}{6}>0$。假设 $n_2(v)=1$，根据引理 1 (A4)，\$v\$不与三角形的 3-点相邻。因此根据 R2 和 R6，$ch'(v)\ge ch(v)-4\times\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=0$。

情况 5： $d(v)\ge 6$。

当 $d(v)=6$ 时，根据引理 1 (A5)，有 $n_2(v)\le 4$。如果 $n_2(v)=4$，那么根据引理 1 (A5)，v 不与 3-点相邻。则 $ch'(v)\ge 6-4-4\times\frac{1}{2}=0$。如果 $n_2(v)\le 3$，那么 $ch'(v)\ge 6-4-3\times\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{6}=0$。

当 $d(v)=7$ 时，根据引理 1 (A6)，有 $n_2(v)\le 5$。则 $ch'(v)\ge 7-4-5\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{6}>0$。

当 $d(v)\geq 8$ 时，$ch'(v)\geq d(v)-4-d(v)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}d(v)-4\geq 0$。

下面将检验对于所有的 $f\in F(G)$，$ch'(f)\geq 0$。

情况 1： $d(f)\leq 4$。

当 $d(f)=3$ 时，如果 5-面与f相邻 s，那么根据 R1，有 $ch'(f)\geq 3-4+2\times\frac{1}{2}=0$。否则有 $ch'(f)\geq 3-4+3\times\frac{1}{2}>0$。

当 $d(f)=4$ 时，有 $ch'(f)=ch(f)=0$。

情况 2： $d(f)=5$。

在这种情况下，$ch(f)=5-4=1$。根据引理 1 (A1)，有 $n_2(f)\leq 2$。如果 $n_2(f)=2$，根据 R2，那么 $ch'(f)\geq 1-2\times\frac{1}{2}=0$。如果 $n_2(f)=1$，那么 $n_3(f)\leq 2$。如果有两个 3-点，根据 R2，R3 和 R4，那么 $ch'(f)\geq 1-2\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0$。如果至多一个 3-点，根据 R2，R3 和 R4，那么 $ch'(f)\geq 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}>0$。如果 $n_2(f)=0$，那么 $n_3(f)\leq 3$。根据 R2，R3 和 R4，$ch'(f)\geq 1-3\times\frac{1}{3}=0$。

情况 3： $d(f)\geq 6$。

为了估计 f 总的转权，我们将 f 的转权均匀地分配给 f 的边界中最接近转权接受者的边中的相关联的小于等于的 3 个顶点和相邻的 3 个面。

已知通过 R2 一个 2-点最多从 f 得到权重 1，通过 R3 和 R4 一个 3-点最多从 f 得到权重 $\frac{1}{2}$，f 最多给每个相邻的 3-面转权 $\frac{1}{2}$。

很容易看出，来自 f 的每个权中的接收者都恰好属于以下三种类型的一条路径 P，其中指数取模 $d(f)$：

i) $v_iv_{i+1}v_{i+2}$，其中 $d(v_i)>3$，$d(v_{i+1})\leq 3$，$d(v_{i+2})>3$，并且 v_{i+1} 是非三角形的；

ii) $v_i\cdots v_{i+3}$，其中 v_{i+1} 和 v_{i+2} 是非三角形的，$d(v_i)>3$，$d(v_{i+1})=d(v_{i+2})=3$，$d(v_{i+3})>3$；

iii) 极大序列 $v_i\cdots v_{i+k}$ 由三角形边组成，其中 $k\geq 1$，由（非三角形）边 $v_{i-1}v$ 或 $v_{i+k}v_{i+k+1}$ 扩张当且仅当 $d(v_i)=3$ 或者 $d(v_{i+k})=3$。

设 P 由 $l(P)$条边组成，并通过 R1~R3 导致 f 的总转权 $m(P)$。如果 P 是类型 iii)，则 $m(P)=l(P)/2$，这意味着 P 的每条边在平均后从 f 中转权 $\frac{1}{2}$ 得到。如果 P 的类型是 ii)，那么 $l(P)=3$ 并且 $m(P)=\frac{2}{3}$，所以 P 的每条边平均从 f 中最多得到 $\frac{2}{9}$。

假设 P 的类型是 i)；然后是 $l(P)=2$ 并且 $m(P)\leq 1$；所以 P 的每条边从 f 中最多得到 $\frac{1}{2}$。此外，当且仅当 $d(v_{i+1})=2$ 并且 $d(v_{i+1})$ 与 4-面相关联时，$m(P)=1$。否则，$m(P)=\frac{1}{3}$，所以 P 的两条边从 f 中得到 $\frac{1}{6}$。

由于我们的反例 G 的结构性质 A1~A7，f 的边界中的每条边最多属于一条 i)~iii)类型的路径。

如果 $d(f)=6$，那么根据定理 1 的假设，具有 $m(P)=1$ 的路径 P 是不可能的，所以 $ch'(f)\geq 6-4-6\times\frac{1}{3}=0$。

如果 $d(f)=7$，那么 f 具有 $m(P)=1$ 的路径 P 最多有 3 条。当 $m(P)=1$ 的路径 P 最多有 2 条时，

$ch'(f) \geq 7-4-4\times\frac{1}{2}-(7-4)\times\frac{1}{3}=0$。当 $m(P)=1$ 的路径 P 有 3 条时，$ch'(f) \geq 7-4-6\times\frac{1}{2}=0$。

如果 $8 \leq d(f) \leq 9$，那么 $ch'(f) \geq d(f)-4-\frac{1}{2}d(f) \geq 0$。

如果 $d(f) \geq 10$，那么我们记类型(i)的路径的总边数为 $a(P)$，类型(ii)的路径的总边数为 $b(P)$，类型iii)的路径的总边数为 $c(P)$。则我们有 $a(P)+b(P)+c(P) \leq d(f)$。所以

$$\begin{aligned} ch'(f) &\geq d(f)-4-\frac{1}{2}a(P)-\frac{2}{9}b(P)-\frac{1}{2}c(P) \\ &\geq d(f)-4-\frac{1}{2}d(f)+\frac{1}{2}b(P)-\frac{2}{9}b(P) \\ &=\frac{1}{2}d(f)-4+\frac{5}{18}b(P) \\ &\geq \frac{1}{2}d(f)-4 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

定理 1 证毕。

3. 总结与展望

本文采用定理证明与权转移相结合的方法证明定理。权转移方法是图的染色理论中常用的证明方法之一，权转移方法经常结合其他方法和技术，如组合数学中的一些组合方法，在证明很多与染色问题有关的命题时，应用非常广泛，方法非常巧妙。当然该方法也有局限性，对于权转移的讨论过程比较繁琐。本文对于平面图是无圈 5-可选的猜想更进了一步，允许了 4-圈存在，图类更加广泛。在今后的研究中将会继续专研平面图是无圈 5-可选的猜想，证明方法进一步改进，减少繁琐的过程，尽量精简过程。

参考文献

[1] Grünbaum, B. (1973) Acyclic Colorings of Planar Graphs. *Israel Journal of Mathematics*, **14**, 390-408. https://doi.org/10.1007/BF02764716

[2] Borodin, O.V. (1979) On Acyclic Colorings of Planar Graphs. *Discrete Mathematics*, **25**, 211-236. https://doi.org/10.1016/0012-365X(79)90077-3

[3] Kostochka, A.V. and Mel'nikov, L.S. (1976) Note to the Paper of Grünbaum on Acyclic Colorings. *Discrete Mathematics*, **14**, 403-406. https://doi.org/10.1016/0012-365X(76)90075-3

[4] Voigt, M. (1993) List Colorings of Planar Graph. *Discrete Mathematics*, **120**, 215-219. https://doi.org/10.1016/0012-365X(93)90579-I

[5] Thomassen, C. (1994) Every Planar Graph Is 5-Choosable. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **62**, 180-181. https://doi.org/10.1006/jctb.1994.1062

[6] Borodin, O.V., Fon-Der-Flaass, D.G., Kostochka, A.V., Raspaud, A. and Sopena, E. (2002) Acyclic List 7-Coloring of Planar Graphs. *Journal of Graph Theory*, **40**, 83-90. https://doi.org/10.1002/jgt.10035

[7] Montassier, M., Ochem, P. and Raspaud, A. (2006) On the Acyclic Choosability of Graphs. *Journal of Graph Theory*, **51**, 281-300. https://doi.org/10.1002/jgt.20134s

[8] Montassier, M., Raspaud, A. and Wang, W. (2007) Acyclic 5-Choosability of Planar Graphs without Small Cycles. *Journal of Graph Theory*, **54**, 245-260. https://doi.org/10.1002/jgt.20206

[9] Zhang, H. and Xu, B. (2009) Acyclic 5-Choosable Planar Graphs with Neither 4-Cycles nor Chordal 6-Cycles. *Discrete Mathematics*, **309**, 6087-6091. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.05.018

[10] Chen, M. and Wang, W. (2008) Acyclic 5-Choosability of Planar Graphs without 4-Cycles. *Discrete Mathematics*, **308**, 6216-6225. https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.11.076

[11] Borodin, O.V. and Ivanova, A.O. (2011) Acyclic 5-Choosability of Planar Graphs without Adjacent Short Cycles.

Journal of Graph Theory, **68**, 169-176. https://doi.org/10.1002/jgt.20549

[12] Borodin, O.V. and Ivanova, A.O. (2013) Acyclic 4-Choosability of Planar Graphs with no 4- and 5-Cycles. *Journal of Graph Theory*, **72**, 374-397. https://doi.org/10.1002/jgt.21647

[13] Wang, W.F., Zhang, G. and Chen, M. (2014) Acyclic 6-Choosability of Planar Graphs without Adjacent Short Cycles. *Science China Mathematics*, **57**, 197-209. https://doi.org/10.1007/s11425-013-4572-6

[14] Hou, J.F. and Liu, G.Z. (2014) Every Toroidal Graph Is Acyclically 8-Choosable. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **30**, 343-352. https://doi.org/10.1007/s10114-013-1497-5

[15] Sun, L. (2021) Acyclic 6-Choosability of Planar Graphs without 5-Cycles and Adjacent 4-Cycles. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **37**, 992-1004. https://doi.org/10.1007/s10114-021-9335-7