

倾斜平面上非线性不连续振子的全局动力学

夏珏武

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2023年9月13日; 录用日期: 2023年10月8日; 发布日期: 2023年10月16日

摘要

本文的目的是将平面上带干摩擦的SD振子的动力学结果推广至斜面上。分析结果表明, 系统会有一个或两个平衡集。并通过非光滑李雅普诺夫函数证明了平衡集的稳定性的。最后我们给出了数值模拟图来说明动力学并验证结果。

关键词

SD振子, 平衡集, 干摩擦

Global Dynamics of an Irrational Nonlinear Discontinuous Oscillator on an Inclined Plane

Juewu Xia

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology,
Changsha Hunan

Received: Sep. 13th, 2023; accepted: Oct. 8th, 2023; published: Oct. 16th, 2023

Abstract

The purpose of this article is to extend the dynamic results of SD oscillators with

dry friction on a plane to an inclined plane. The analysis results indicate that the system will have one or two equilibrium sets. And the stability of the equilibrium set was proved through non smooth Lyapunov functions. Finally, we provided numerical simulations to illustrate the dynamics and validate the results.

Keywords

SD Oscillator, Equilibrium Set, Dry Friction

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在过去的几十年里, 各种振荡器出现在许多应用科学中, 如机械工程 [1]、分子生物学 [2]、晶格动力学 [3]和量子力学 [4]。已经提出了大量的振荡器, 并将其应用于上述领域, 例如 [5-7]。近年来, 曹庆杰等人 [8]提出并研究了SD (光滑和不连续) 振子, 用于研究从光滑到不连续动力学的转变。通过改变平滑度参数的值, SD振荡器可以是平滑的和连续的。后来, 该作者等人 [9] 研究了一种具有强非理性非线性的新型非线性振荡器, 该振荡器具有光滑和不连续的特性, 这取决于光滑参数的值。结果表明, 强非理性非线性会导致多井动力学、高阶退化奇异性、多重稳定性或多重卡滞屈曲。然而, 摩擦接触被上述大多数振荡器所忽略。李志新等人 [10]提出并研究了一种在水平面上具有干摩擦的SD振子 (见图 1)。在模型中, 质量 m 通过刚度为 k 的线性弹簧, 该弹簧能够抵抗张力和压缩。假设质量的运动在表面上是水平的, 文中给出了平衡集存在的条件以及稳定性。而由于实际工程中, 完全水平是很难保证的, 我们在 [10]工作的基础上, 将模型推广到具有倾角 θ 的平面上 (见图 2)。特别地, 当 $\theta = 0$ 时, 它正好是水平面。本文给出了平衡集存在的条件以及平衡集的稳定性。

2. 数学模型

图2中, 质量 m 分别通过倾斜弹簧连接到固定点。假设质量始终在倾斜平面上。我们以垂线和斜面的交点为原点, 规定沿斜面向下方向为正方向, 建立坐标系。质量在倾斜平面上的位置和速度分别用 x 和 \dot{x} 表示, l 表示弹簧的原始长度, h 表示定点和表面之间的距离, θ 表示斜面的倾角, g 表示重力加速度, μ 表示摩擦力系数。为了简化模型我们始终令 $h = 0$ 。摩擦力 $F_s(x)$ 由库仑定律得, 并由 [10]证明满足包含:

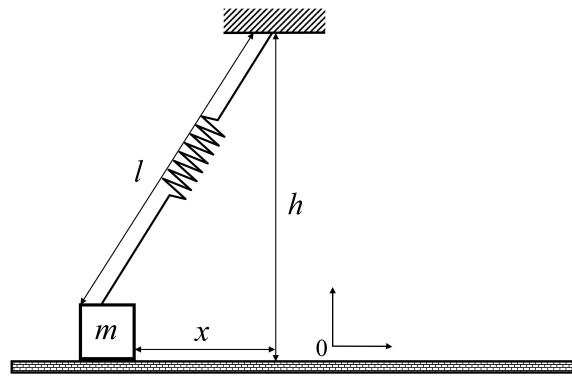


Figure 1. An SD oscillator with dry friction

图 1. 带干摩擦的SD振子

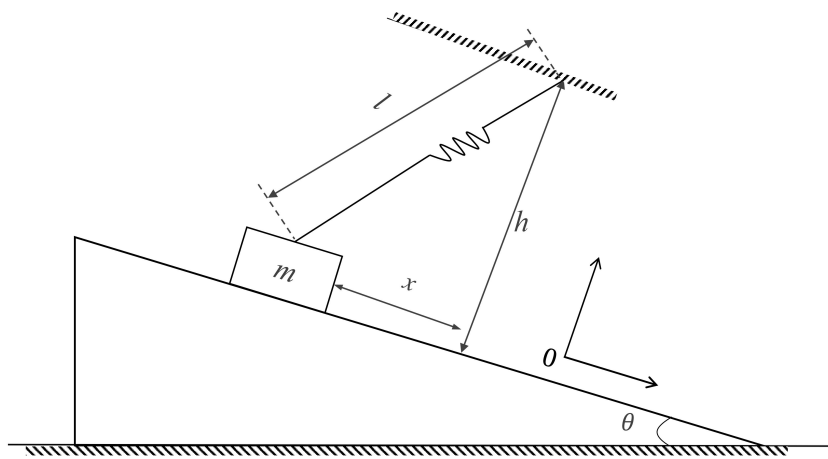


Figure 2. SD oscillator model on an inclined plane

图 2. 斜面上的SD振子模型

$$F_S \in -\mu F_N(x) \text{Sign}(\dot{x}),$$

其中 $F_N(x) = mg \cos \theta$, $\text{Sign}(\dot{x})$ 由下式定义:

$$\text{Sign}(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \dot{x} > 0, \\ [-1, 1], & \dot{x} = 0, \\ -1, & \dot{x} < 0. \end{cases}$$

根据牛顿第二定律和 [10], 可以得到下列微分包含

$$(\dot{x}, \dot{y})^T \in F^0(x, y) \quad (2.1)$$

其中,

$$F^0(x, y) = (y, g \sin \theta - \frac{k}{m}x + \frac{kl}{m} \text{Sign}(x) - \mu g \cos \theta \text{Sign}(y))^T.$$

显然, 系统 (2.1) 由四个线性子系统组成:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{k}{m}(x - x_{01}^*), \end{cases} \quad x > 0, y > 0, \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{k}{m}(x - x_{02}^*), \end{cases} \quad x < 0, y > 0, \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{k}{m}(x - x_{03}^*), \end{cases} \quad x < 0, y < 0, \quad (2.4)$$

以及

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{k}{m}(x - x_{04}^*), \end{cases} \quad x > 0, y < 0, \quad (2.5)$$

其中:

$$\begin{aligned} x_{01}^* &= l - \frac{mg}{k} \cos \theta (\mu - \tan \theta), & x_{02}^* &= -l - \frac{mg}{k} \cos \theta (\mu - \tan \theta) \\ x_{03}^* &= -l + \frac{mg}{k} \cos \theta (\mu + \tan \theta), & x_{04}^* &= l + \frac{mg}{k} \cos \theta (\mu + \tan \theta) \end{aligned}$$

3. 全局动力学

我们现在可以给出当 $h = 0$ 的结果。根据 μ 的不同值, 我们用五个定理来讨论平衡集的数量和稳定性。

定理1: 对于系统(2.1), 当 $\mu > \tan \theta$, 下列断言成立:

- (i) 当 $l < \frac{mg}{k} \cos \theta (\mu - \tan \theta)$, 存在唯一的平衡集 $E = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$, 且 E 为全局渐近稳定;
- (ii) 当 $l = \frac{mg}{k} \cos \theta (\mu - \tan \theta)$, 即, $x_{01}^* = 0$, 存在唯一的平衡集 $E = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 且 E 全局渐近稳定;

- (iii) 当 $\frac{mg}{k} \cos \theta (\mu - \tan \theta) < l < \frac{\mu mg \cos \theta}{k}$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq 0\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 是有限时间渐近稳定的;
- (iv) 当 $l = \frac{\mu mg \cos \theta}{k}$, i.e., $x_{01}^* = x_{03}^*$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq 0\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T | x_{01}^* = x_{03}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 和一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 是有限时间渐近稳定的;
- (v) 当 $\frac{\mu mg \cos \theta}{k} < l < \frac{mg}{k} \cos \theta (\mu + \tan \theta)$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq 0\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 是有限时间渐近稳定的;
- (vi) 当 $l = \frac{mg}{k} \cos \theta (\mu + \tan \theta)$, 即, $x_{03}^* = 0$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq x_{03}^* = 0\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 是有限时间渐近稳定的;
- (vii) 当 $l > \frac{mg}{k} \cos \theta (\mu + \tan \theta)$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq x_{03}^* = 0\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 是有限时间渐近稳定的.

证明: 平衡集的存在性和个数可以通过系统(2.1)的向量场得到. 现在假设 $l < \frac{mg}{k} \cos \theta (\mu - \tan \theta)$. 为了确定 E_0 的稳定性, 我们应该证明 E_0 中每个点都是稳定的. 对于一个平衡点 $(\bar{x}^*, 0)^T \in E_0$, 考虑下面的函数

$$V_{\bar{x}^*}(x, y) = \begin{cases} \frac{k}{2m} (x - x_{01}^*)^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{k}{2m} (\bar{x}^* - x_{01}^*)^2, & x \leq \bar{x}^*, \\ \frac{k}{2m} (x - \bar{x}^*)^2 + \frac{1}{2}y^2, & x > \bar{x}^* \end{cases} \quad (3.1)$$

当 $x_{02}^* \leq \bar{x}^* \leq x_{01}^*$,

$$V_{\bar{x}^*}(x, y) = \frac{k}{2m} (x - \bar{x}^*)^2 + \frac{1}{2}y^2 \quad (3.2)$$

当 $x_{01}^* \leq \bar{x}^* \leq x_{03}^*$, and

$$V_{\bar{x}^*}(x, y) = \begin{cases} \frac{k}{2m} (x - x_{03}^*)^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{k}{2m} (\bar{x}^* - x_{03}^*)^2, & x \geq \bar{x}^*, \\ \frac{k}{2m} (x - \bar{x}^*)^2 + \frac{1}{2}y^2, & x < \bar{x}^* \end{cases} \quad (3.3)$$

当 $x_{03}^* \leq \bar{x}^* \leq x_{04}^*$. 可以得到 $V_{\bar{x}^*}(\bar{x}^*, 0) = 0$ 和 $V_{\bar{x}^*}$ 是正定的. 此外, 可以得到 $\max \dot{V}_{\bar{x}^*}^{(2.1)} \leq 0$ 在 $x < 0$ 的半平面, 当 $x_{02}^* \leq \bar{x}^* \leq x_{01}^*$, $\max \dot{V}_{\bar{x}^*}^{(2.1)} \leq 0$ 当 $x_{01}^* \leq \bar{x}^* \leq x_{03}^*$ 和 $\max \dot{V}_{\bar{x}^*}^{(2.1)} \leq 0$ 在 $x > 0$ 的半平面, 当 $x_{03}^* \leq \bar{x}^* \leq x_{04}^*$. 因此每个平衡点 $(\bar{x}^*, 0)^T \in E_0$ 都是稳定的, 那么 E_0 稳定. 令 $\bar{x}^* = 0$, 我们有

$$\dot{V}_0^{(2.1)} = \begin{cases} \left\{ \frac{k}{m} x_{01}^* y \right\}, & x > 0, y > 0, \\ \left\{ \frac{k}{m} x_{02}^* y \right\}, & x < 0, y > 0, \\ \left\{ \frac{k}{m} x_{03}^* y \right\}, & x < 0, y < 0, \\ \left\{ \frac{k}{m} x_{04}^* y \right\}, & x > 0, y < 0, \\ \{0\}, & y = 0, \\ \left\{ \frac{k}{m} (\xi x_{01}^* + (1 - \xi)x_{02}^*) y \mid \xi \in [0, 1] \right\}, & x = 0, y > 0, \\ \left\{ \frac{k}{m} (\xi x_{03}^* + (1 - \xi)x_{04}^*) y \mid \xi \in [0, 1] \right\}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

由于 $l < \mu mg/k$

$$x_{02}^* < x_{01}^* < 0 < x_{03}^* < x_{04}^*.$$

因此, $\max \dot{V}_0^{(2.1)} \leq 0$

$$Z_{V_0}^{(2.1)} = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \in \dot{V}_0^{(2.1)} \right\}$$

最大弱不变子集是 E_0 . 因此, E_0 全局有限时间渐近稳定. 那么 (1) 即可得证. 现在假设 $l > \frac{mg}{k} \cos \theta (\mu + \tan \theta)$. 那么

$$x_{02}^* < x_{03}^* < 0 < x_{01}^* < x_{04}^*.$$

为了证明 E_{01} 和 E_{02} 的渐近稳定性, 我们利用 (3.2) $\bar{x}^* \in [x_{02}^*, x_{03}^*]$ 和 $\bar{x}^* \in [x_{01}^*, x_{04}^*]$. 相似地, (iii)-(vi) 可以被证明. 最后, 我们证明 (ii). $l = \frac{mg}{k} \cos \theta (\mu - \tan \theta)$ 表明

$$x_{02}^* < x_{01}^* = 0 < x_{03}^* < x_{04}^*.$$

考虑李雅普诺夫函数 (3.1) 对 $\bar{x}^* \in [x_{02}^*, 0]$ 以及 (3.3) 对 $\bar{x}^* \in (0, x_{04}^*]$, 运用 (i) 中相似证明可证明 (iii).

定理2-定理5证明与定理1类似, 后面直接给出定理, 不再加以证明.

定理2: 对于系统 (2.1), 当 $\mu < \frac{1}{2} \tan \theta$, 下列断言成立:

- (i) 当 $l < \frac{\mu mg \cos \theta}{k}$, 存在唯一的平衡集 $E = \{(x, 0)^T \mid x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 并且 E 全局渐近稳定;
- (ii) 当 $l = \frac{\mu mg \cos \theta}{k}$, 即 $x_{01}^* = x_{03}^*$, 存在唯一的平衡集 $E = \{(x, 0)^T \mid x_{01}^* = x_{03}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 并且 E 全局渐近稳定;
- (iii) 当 $\frac{\mu mg \cos \theta}{k} < l < \frac{mg}{k} \cos \theta (\tan \theta - \mu)$, 存在唯一的平衡集 $E = \{(x, 0)^T \mid x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 并且 E 全局渐近稳定;
- (iv) 当 $l = \frac{mg}{k} \cos \theta (\tan \theta - \mu)$, 即, $x_{02}^* = 0$, 存在唯一的平衡集 $E = \{(x, 0)^T \mid x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 并且 E 全局渐近稳定;
- (v) 当 $\frac{mg}{k} \cos \theta (\tan \theta - \mu) < l < \frac{mg}{k} \cos \theta (\tan \theta + \mu)$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T \mid x_{02}^* \leq x \leq 0\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T \mid x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 都是有限时间渐近稳定;
- (vi) 当 $l = \frac{mg}{k} \cos \theta (\tan \theta + \mu)$, 即, $x_{03}^* = 0$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T \mid x_{02}^* \leq x \leq x_{03}^* = 0\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T \mid x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 都是有限时间渐近稳定;
- (vii) 当 $l > \frac{mg}{k} \cos \theta (\tan \theta + \mu)$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T \mid x_{02}^* \leq x \leq x_{03}^*\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T \mid x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 都是有限时间渐近稳定.

定理3: 对于系统 (2.1), 当 $\frac{1}{2} \tan \theta < \mu < \tan \theta$, 下面断言成立:

- (i) 当 $l < \frac{mg}{k} \cos \theta (\tan \theta - \mu)$, 存在唯一的平衡集 $E = \{(x, 0)^T \mid x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 并且 E 有限时间全局渐近稳定;

- (ii) 当 $l = \frac{mg}{k} \cos \theta (\tan \theta - \mu)$, 即, $x_{02}^* = 0$, 存在唯一的平衡集 $E = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 并且 E 有限时间全局渐近稳定;
- (iii) 当 $\frac{mg}{k} \cos \theta (\tan \theta - \mu) < l < \frac{\mu mg \cos \theta}{k}$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq 0\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 都是有限时间渐近稳定;
- (iv) 当 $l = \frac{\mu mg \cos \theta}{k}$, 即, $x_{03}^* = x_{01}^*$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq 0\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T | x_{01}^* = x_{03}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 都是有限时间渐近稳定;
- (v) 当 $\frac{\mu mg \cos \theta}{k} < l < \frac{mg}{k} \cos \theta (\tan \theta + \mu)$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq 0\}$ and $E_{02} = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 都是有限时间渐近稳定;
- (vi) 当 $l = \frac{mg}{k} \cos \theta (\tan \theta + \mu)$, 即, $x_{03}^* = 0$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq x_{03}^*(0)\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 都是有限时间渐近稳定;
- (vii) 当 $l > \frac{mg}{k} \cos \theta (\tan \theta + \mu)$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq x_{03}^*\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 都是有限时间渐近稳定.

定理4: 对于系统(2.1), 当 $\mu = \frac{1}{2} \tan \theta$,

$$\begin{aligned} x_{01}^* &= l + \frac{\mu mg}{k} \cos \theta, & x_{02}^* &= -l + \frac{\mu mg}{k} \cos \theta \\ x_{03}^* &= -l + \frac{3\mu mg}{k} \cos \theta, & x_{04}^* &= l + \frac{3\mu mg}{k} \cos \theta \end{aligned}$$

下列断言成立:

- (i) 当 $l < \frac{\mu mg \cos \theta}{k}$, 存在唯一的平衡集 $E = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 并且 E 有限时间全局渐近稳定;
- (ii) 当 $l = \frac{\mu mg \cos \theta}{k}$, 即, $x_{03}^* = x_{01}^*$ and $x_{02}^* = 0$, 存在唯一的平衡集 $E = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^* = x_{03}^*\}$ 并且 E 有限时间全局渐近稳定;
- (iii) 当 $\frac{\mu mg \cos \theta}{k} < l < \frac{3\mu mg}{k} \cos \theta$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq 0\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 都是有限时间渐近稳定;
- (iv) 当 $l = \frac{3\mu mg}{k} \cos \theta$, 即, $x_{03}^* = 0$ 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq x_{03}^* = 0\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 都是有限时间渐近稳定;
- (v) if $l > \frac{3\mu mg}{k} \cos \theta$, 存在两个平衡集 $E_{01} = \{(x, 0)^T | x_{02}^* \leq x \leq x_{03}^* = 0\}$ 和 $E_{02} = \{(x, 0)^T | x_{01}^* \leq x \leq x_{04}^*\}$ 以及一个伪鞍点 $(0, 0)^T$. 此外, E_{01} 和 E_{02} 都是有限时间渐近稳定.

定理5: 对于系统(2.1), 当 $\mu = \tan \theta$,

$$\begin{aligned} x_{01}^* &= l, & x_{02}^* &= -l \\ x_{03}^* &= -l + \frac{2\mu mg}{k} \cos \theta, & x_{04}^* &= l + \frac{2\mu mg}{k} \cos \theta \end{aligned}$$

下列断言成立:

-
- [2] Lenz, M., Crow, D.J.G. and Joanny, J.-F. (2009) Membrane Buckling Induced by Curved Filaments. *Physical Review Letters*, **103**, Article 038101.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.038101>
- [3] Xie, Y.-D. (2009) Elliptic Function Waves of Spinor Bose-Einstein Condensates in an Optical Lattice. *Communications in Theoretical Physics*, **51**, 445-449.
<https://doi.org/10.1088/0253-6102/51/3/12>
- [4] Stewart, I. (2004) Quantizing the Classical Cat. *Nature*, **430**, 731-732.
<https://doi.org/10.1038/430731a>
- [5] Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1997) Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag, Berlin.
- [6] Lorenz, E.N. (2004) Deterministic Nonperiodic Flow. Springer, New York.
https://doi.org/10.1007/978-0-387-21830-4_2
- [7] van der Pol, B. (1920) A Theory of the Amplitude of Free and Forced Triode Vibrations. *Radio Review*, **1**, 701-710.
- [8] Cao, Q., Wiercigroch, M., Pavlovskaja, E.E., Grebogi, C. and Thompson, J.M.T. (2006) Archetypal Oscillator for Smooth and Discontinuous Dynamics. *Physical Review E*, **74**, Article 046218. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.046218>
- [9] Han, Y., Cao, Q., Chen, Y. and Wiercigroch, M. (2012) A Novel Smooth and Discontinuous Oscillator with Strong Irrational Nonlinearities. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, **55**, 1832-1843. <https://doi.org/10.1007/s11433-012-4880-9>
- [10] Li, Z., Cao, Q. and Léger, A. (2016) The Equilibrium Stability for a Smooth and Discontinuous Oscillator with Dry Friction. *Acta Mechanica Sinica*, **32**, 309-319.
<https://doi.org/10.1007/s10409-015-0481-y>