Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(10), 4183-4188**
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1210411

随机环境加权分枝过程的方差和Fuk-Nagaev型不等式

邓　琳*，陈祁欢，鲁　展

长沙理工大学数学与统计学院，湖南　长沙

收稿日期：2023年9月11日；录用日期：2023年10月4日；发布日期：2023年10月11日

摘　要

在对随机环境中加权分枝过程(Y_n)的研究基础上，考虑其规范化过程W_n的方差$Var_\xi(W_n)$及其收敛性，并予以了详细的证明，其中规范化过程为$W_n = Y_n/\Pi_n$，Π_n是规范化序列，是随机环境分枝过程相关结论的拓展；并且建立了一个关于统计量$\log Y_{n_0+n}/Y_{n_0}$的Fuk-Nagaev型不等式。

关键词

随机环境，加权分枝过程，方差，Fuk-Nagaev型不等式

The Variance and Fuk-Nagaev Type Inequality for Weighted Branching Processes in a Random Environment

Lin Deng*, Qihuan Chen, Zhan Lu

College of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Sep. 11th, 2023; accepted: Oct. 4th, 2023; published: Oct. 11th, 2023

Abstract

On the basis of the research on the weighted branching process (Y_n) in random environments, the variance $Var_\xi(W_n)$ and convergence of its normalization process W_n are considered, and the detailed proof is provided. The normalization process is $W_n = Y_n/\Pi_n$, and Π_n is the normalized

*通讯作者。

文章引用：邓琳，陈祁欢，鲁展．随机环境加权分枝过程的方差和 Fuk-Nagaev 型不等式[J]．应用数学进展，2023, 12(10): 4183-4188. DOI: 10.12677/aam.2023.1210411

sequence, which is an extension of the conclusions related to the branching process in random environments. Besides, we establish a Fuk-Nagaev type inequality for $\log Y_{n_0+n}/Y_{n_0}$.

Keywords

Random Environment, Weighted Branching Process, Variance, Fuk-Nagaev Type Inequality

1. 引言

1992 年，Rösler [1]引入加权分枝过程(WBP)，其描述了一组粒子在随机时间点分裂和繁殖，并赋予每个粒子一个随机的权重。这个过程是有许多实际应用的，比如生物学、物理学、统计学等领域中都有对其的应用。随着对加权分枝过程的研究不断深化，人们不仅探索了其基本性质和结构，还研究了其在随机环境下的一些问题。此外，对加权分枝过程的研究与乘法级联[2]以及分枝随机游动[3]拉普拉斯泛函的分析密切相关，这一发现不仅激发了许多概率学家的兴趣，而且也为数学家们带来了许多新的、具有重要意义的理论发现。2002 年，Rösler 等人[4]研究了稳定加权分枝过程的鞅 W_n 到其极限 W 的收敛速率。2004 年 Kuhlbusch [5]给出了随机环境 ξ 中加权分枝过程 Z_n 的模型的定义，并且研究了非负鞅 $W_n = Z_n / E_\xi Z_n$ 以及它的几乎必然极限 W，进一步给出了一个关于环境极限随机变量 W 的非退化性质的充要条件，该条件适用于平稳遍历的情形下。此外，当环境是独立同分布的特殊情形时，$Z\log^+ Z$ 这个条件变得尤为重要。2017 年，Liang X 和 Liu Q [6]研究了随机环境中 Mandelbrot’s 鞅的极限随机变量退火矩和加权矩存在的充要条件。2019 年，Wang Y [7]等人讨论了随机环境中分枝随机游动的渐进性质，在文章中研究了随机环境下的 Mandelbrot’s 鞅的极限随机变量的淬火矩以及淬火加权矩存在性的条件；同年，Li Y，Liu Q 和 Peng X [8]找到了随机环境下的 Mandelbrot 鞅的极限随机变量调和矩存在的临界值，建立了自由能的大偏差和中偏差原理，并且作为应用给出了随机环境中分枝随机游动的相应的极限定理。2021 年，彭点江等[9]给出了随机环境加权分枝过程中其规范化序列(W_n)的 L^p 收敛的充要条件和充分条件，以及在独立同分布环境下，4 个判别准则是等价的。2022 年，徐乐群等[10]引入了随机环境中带迁入加权分枝过程，并证明了其规范化过程(W_n)的几乎必然收敛性。

本文主要是在文献[11]的基础上研究了随机环境中加权分枝过程的方差及其收敛性问题，此结论对于其中心极限定理的研究具有一定的帮助；且关于随机环境加权分枝过程的概率不等式的研究较少，而概率不等式对于极限定理等问题的研究具有很大的帮助，因此本文建立了一个随机环境中加权分枝过程的 Fuk-Nagaev 型不等式，此结论对于解决大数定理、中心极限定理等概率论基本问题的研究具有一定的帮助。

2. 模型描述

令 $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots)$ 是取值于空间 Θ 的平稳遍历的环境序列，对于每个确定的 ξ_n，在 $\mathbf{N} = \{0,1,2,\cdots\}$ 上对应一个概率分布，记作 $p(\xi_n) = \{p_k(\xi_n); k \in \mathbf{N}\}$，这里 $p_k(\xi_n) \ge 0$，且 $\sum_k p_k(\xi_n) = 1$。

定义 1 称 $\{Y_n\}$ 为随机环境中加权分枝过程，若 $\{Y_n\}$ 满足，

$$Y_0 = X_\varnothing = 1,\ \ Y_n = \sum_{u\in\mathbb{T}_n} X_u,\quad u = u_1\cdots u_n \in \mathbf{N}^n; \tag{1}$$

其中Y_n表示第n代所有粒子所带的权重，X_u表示第n代中u粒子所带的权重，A_{ui}表示第n代中u粒子的第i个后代所获得的权重，用$|u| = n$表示第n代粒子的长度，约定$|\phi| = 0$。令$\mathbb{T}_n = \{u\in\mathbb{T} : |u| = n\}$表示第$n$代粒子的权重树。令$\mathcal{F}_0 = \{\varnothing,\Omega\}$以及$\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi;(N_u, A_{u1}, A_{u2},\cdots) : |u| < n\}, n\ge 1$，称$Y_n$是关于$\mathcal{F}_n$可测的。

为了方便讨论，对$n\ge 0$和$p\ge 1$，定义$m_0 = m(\xi_0) = E\sum_{i=1}^{N} A_i$和$m_n(p) = m(\xi_n, p) = E_\xi \sum_{i=1}^{N_u} A_{ui}^p$，$i = 1,2,\cdots,N_u$，$|u| = n$，$m_n = m_n(1)$；$p$阶中心矩为$\sigma_n(p) = E_\xi\left|\sum_{i=1}^{N_u} A_{ui} - m_n\right|^p$；$\Pi_0 = 1$，$\Pi_n = \prod_{i=0}^{n-1} m_i$，$\Pi_n(p) = \prod_{i=0}^{n-1} m_i(p)$。定义其规范化过程$W_n = Y_n / E_\xi Y_n = Y_n/\Pi_n$，易知它是关于$\mathcal{F}_n$的非负鞅(也称为随机环境下的 Mandelbrot 鞅[6] [7] [8])，且存在非负随机变量$W = \lim_{n\to\infty} W_n\ a.s.$，且有$EW\le 1$；$W$非退化的相关结果已经给出了(见[3] [12])。

3. 主要结果及其证明

下面将利用一个引理对随机环境下加权分枝过程鞅的方差及其收敛性给出证明。

引理 1 ([13]，定理 1)令$(\alpha_n, \beta_n)_{n\ge 0}$为平稳遍历非负随机遍历序列。若$E\log\alpha_0 < 0$且$E\log^+\beta_0 < \infty$，那么$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}\beta_n < \infty$几乎必然成立。

应用上述引理，可以推出下面这一定理。

定理 1 若有$E\log\frac{m_0(2)}{m_0^2} < 0$以及$E\log^+\left(\frac{\sigma_0(2)}{m_0^2}\right) < \infty$，则对每一个$k\in\mathbf{N}_+$，都有

$$Var_\xi(W_k) = \Delta_k^2(\xi) = \sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{\Pi_n(2)}{\Pi_n^2}\frac{\sigma_n(2)}{m_n^2}\right) \text{和} Var_\xi W = \Delta_\infty^2(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\Pi_n(2)}{\Pi_n^2}\frac{\sigma_n(2)}{m_n^2}\right)。$$

证明由W_n的定义，通过计算，可得$W_{n+1} - W_n = \frac{1}{\Pi_n}\left(\frac{Y_{n+1}}{m_n} - Y_n\right) = \frac{1}{\Pi_n}\sum_{u\in\mathbb{T}_n} X_u\left(\sum_{i=1}^{N_u}\frac{A_{ui}}{m_n} - 1\right)$。通过推导，可得

$$\begin{aligned}
&E_\xi\left((W_{n+1}-W_n)^2\right) = E_\xi\left(E_\xi\left((W_{n+1}-W_n)^2 \mid \mathcal{F}_n\right)\right)\\
&= \frac{1}{\Pi_n^2}E_\xi\left[E_\xi\left(\left(\sum_{u\in\mathbb{T}_n} X_u\left(\sum_{i=1}^{N_u}\frac{A_{ui}}{m_n} - 1\right)\right)^2 \mid \mathcal{F}_n\right)\right] = \frac{1}{\Pi_n^2}\frac{1}{m_n^2}E_\xi\left[E_\xi\left(\left(\sum_{u\in\mathbb{T}_n} X_u\left(\sum_{i=1}^{N_u} A_{ui} - m_n\right)\right)^2 \mid \mathcal{F}_n\right)\right]\\
&= \frac{1}{\Pi_n^2}\frac{1}{m_n^2}E_\xi\left(\sum_{u\in\mathbb{T}_n} X_u^2 E_\xi\left|\sum_{i=1}^{N_u} A_{ui} - m_n\right|^2\right) + \frac{1}{\Pi_n^2}\frac{1}{m_n^2}E_\xi\left[E_\xi\left(\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{T}_n\\ u\ne v}}\left(X_u\left(\sum_{i=1}^{N_u} A_{ui} - m_n\right)\right)\left(X_v\left(\sum_{i=1}^{N_v} A_{vi} - m_n\right)\right) \mid \mathcal{F}_n\right)\right]\\
&= \frac{1}{\Pi_n^2}\frac{1}{m_n^2}E_\xi\left(\sum_{u\in\mathbb{T}_n} X_u^2 E_\xi\left|\sum_{i=1}^{N_u} A_{ui} - m_n\right|^2\right) + \frac{1}{\Pi_n^2}\frac{1}{m_n^2}E_\xi\left[\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{T}_n\\ u\ne v}} X_u X_v E_\xi\left(\left(\sum_{i=1}^{N_u} A_{ui} - m_n\right)\left(\sum_{i=1}^{N_v} A_{vi} - m_n\right)\right)\right]\\
&= \frac{1}{\Pi_n^2}\frac{1}{m_n^2}E_\xi\left(\sum_{u\in\mathbb{T}_n} X_u^2\right)E_\xi\left(\left|\sum_{i=1}^{N_u} A_{ui} - m_n\right|^2\right) = \frac{\Pi_n(2)}{\Pi_n^2}\frac{\sigma_n(2)}{m_n^2}
\end{aligned}$$

由于$\{W_n\}$是一个鞅，则有$E_\xi W_k^2 = E_\xi W_0^2 + \sum_{n=0}^{k-1} E_\xi\left((W_{n+1}-W_n)^2\right) = 1 + \sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{\Pi_n(2)}{\Pi_n^2}\frac{\sigma_n(2)}{m_n^2}\right)$，因此对每个固

定的 k 有 $Var_\xi(W_k)=E_\xi(W_k^2)-1=\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{\Pi_n(2)}{\Pi_n^2}\frac{\sigma_n(2)}{m_n^2}\right)$。

接下来证明 $Var_\xi W$ 收敛。令 $\alpha_n=\frac{m_n(2)}{m_n^2}$ 和 $\beta_n=\frac{\sigma_n(2)}{m_n^2}$，当 $E\log\frac{m_0(2)}{m_0^2}<0$， $E\log^+\left(\frac{\sigma_0(2)}{m_0^2}\right)<\infty$ 时，由引理 1，可得 $\sup_n E_\xi(W_n^2)=1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\Pi_n(2)}{\Pi_n^2}\frac{\sigma_n(2)}{m_n^2}\right)<\infty$ 几乎必然成立。因此在 P_ξ 下， W_n 以 L^2 收敛到 W，且 $E_\xi(W^2)=\lim_{k\to\infty}E_\xi(W_k^2)=1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\Pi_n(2)}{\Pi_n^2}\frac{\sigma_n(2)}{m_n^2}\right)$，可推出

$Var_\xi W=E_\xi(W^2)-1=\Delta_\infty^2(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\Pi_n(2)}{\Pi_n^2}\frac{\sigma_n(2)}{m_n^2}\right)<\infty$ 几乎必然成立。

这就完成了定理 1 的证明。

令 $X=X_1=\log m_0$， $\mu=EX$， $\sigma^2=E(X-\mu)^2$。假定 $\mu>0$， $0<\sigma^2<\infty$，记

$$Y_{n_0,n}:=\frac{\log\left(Y_{n_0+n}/Y_{n_0}\right)}{\sigma\sqrt{n}},\quad n_0,n\in N.$$

由 W_n 的定义可得 $\log Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i+\log W_n$，其中 $X_i=\log m_{i-1}(i\ge 1)$， X_i 是一列只依赖于环境的独立同分布随机变量序列。$\log Y_n$ 的渐进性为会受到相关随机游动 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i=\log\Pi_n,n\in N$ 的影响。设 $\eta_{n,i}=\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}},i=1,\cdots,n_0+n$，$W_{n_0,n}=\frac{W_{n_0+n}}{W_{n_0}}$，可以知道 $E\eta_{n,i}=E\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)=0$，$Var\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i}\right)=\sum_{i=1}^{n}E\eta_{n,n_0+i}^2=1$。可得

$$Y_{n_0,n}=\frac{\sum_{i=n_0+1}^{n_0+n}X_i+\log W_{n_0,n}-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}=\sum_{i=n_0+1}^{n_0+n}\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{\log W_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}}=\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i}+\frac{\log W_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}}. \tag{2}$$

下面将证明 $Y_{n_0,n}$ 的 Fuk-Nagaev 型不等式。

定理 2： 令 $p\ge 2$。使得 $E\left|(X-\mu)^p\right|<\infty$。则 $\forall x\ge 0$，有

$$P\left(Y_{n_0,n}\ge x\right)\le\exp\left\{-\frac{x^2}{2V^2}\right\}+\frac{C_p}{n^{(p-2)/2}x^p}, \tag{3}$$

其中 $V^2=(p+2)^2e^p$ 和 $C_p=2^{p+1}\left(1+\frac{2}{p}\right)^p E\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|^p$。

证明：对所有的 $x\ge 0$ 有

$$P\left(Y_{n_0,n}\ge x\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i}+\frac{\log W_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}}\ge x\right)\le I_1+I_2, \tag{4}$$

其中 $I_1=P\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i}\ge\left(x-\frac{x^2}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)$， $I_2=P\left(\frac{\log W_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}}\ge\frac{x^2}{\sigma\sqrt{n}}\right)$。

因此当 $0<x\le\frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，利用独立同分布随机变量和的 Fuk-Nagaev 型不等式[14]，可得

$$I_1 \le \exp\left\{-\frac{x^2\left(1-\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}{\frac{1}{2}V^2}\right\}+\frac{2^{-(p+1)}nC_p}{\left(\sqrt{n}\left(x-\frac{x^2}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^p} \le \exp\left\{-\frac{x^2}{2V^2}\right\}+\frac{C_p}{2n^{(p-2)/2}x^p} \tag{5}$$

其中V^2和C_p在定理2中已定义。由马尔可夫不等式及$EW_n=1$，则对所有的$0<x\le\frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，有

$$\begin{aligned}
I_2 &= P\left(W_{n_0,n}\ge\exp\left\{x^2\right\}\right)\le\exp\left\{x^2\right\}EW_{n_0,n}\\
&=\exp\left\{-x^2\right\}E\left(\frac{W_{n_0+n}}{W_{n_0}}\right)=\exp\left\{-x^2\right\}E\left(\frac{Y_{n_0+n}\Pi_{n_0}}{\Pi_{n_0+n}Y_{n_0}}\right)\\
&=\exp\left\{-x^2\right\}E\left(\frac{\sum_{u\in\mathbb{T}_{n_0+n}}X_u}{m_{n_0}\cdots m_{n_0+n-1}Y_{n_0}}\right)\\
&=\exp\left\{-x^2\right\}E\left(\frac{\sum_{u\in\mathbb{T}_{n_0+n-1}}X_u\left(\sum_{i=1}^{N_u}A_{ui}\right)}{m_{n_0}\cdots m_{n_0+n-1}Y_{n_0}}\right)\\
&=\exp\left\{-x^2\right\}E\left\{E\left(\frac{\sum_{u\in\mathbb{T}_{n_0+n-1}}X_u\left(\sum_{i=1}^{N_u}A_{ui}\right)}{m_{n_0}\cdots m_{n_0+n-1}Y_{n_0}}\mid\mathcal{F}_{n_0+n-1}\right)\right\}\\
&=\exp\left\{-x^2\right\}E\left\{\frac{\sum_{u\in\mathbb{T}_{n_0+n-1}}X_u}{m_{n_0}\cdots m_{n_0+n-1}Y_{n_0}}E\left(\sum_{i=1}^{N_u}A_{ui}\mid\mathcal{F}_{n_0+n-1}\right)\right\}\\
&=\exp\left\{-x^2\right\}E\left\{\frac{\sum_{u\in\mathbb{T}_{n_0+n-1}}X_u}{m_{n_0}\cdots m_{n_0+n-2}Y_{n_0}}\right\}=\cdots=\exp\left\{-x^2\right\}E\left\{\frac{\sum_{u\in\mathbb{T}_{n_0+1}}X_u}{m_{n_0}Y_{n_0}}\right\}\\
&=\exp\left\{-x^2\right\}E\left\{\frac{\sum_{u\in\mathbb{T}_{n_0}}X_u}{Y_{n_0}}\right\}=\exp\left\{-x^2\right\}\\
&\le\exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}\le\frac{C_p}{2n^{(p-2)/2}x^p},
\end{aligned} \tag{6}$$

由(5)和(6)可知，对所有的$0<x\le\frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，$P\left(Y_{n_0,n}\ge x\right)\le\exp\left\{-\frac{x^2}{2V^2}\right\}+\frac{C_p}{2n^{(p-2)/2}x^p}$。

当$x\ge\frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$时，有$P\left(Y_{n_0,n}\ge x\right)\le I_3+I_4$，其中$I_3=P\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i}\ge\frac{x}{2}\right)$，$I_4=P\left(\frac{\log W_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}}\ge\frac{x}{2}\right)$。再次利用独立同分布随机变量和的Fuk-Nagaev型不等式[14]，有

$$I_3\le\exp\left\{-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}V^2}\right\}+\frac{2^{-(p+1)}nC_p}{\left(\sqrt{n}\frac{x}{2}\right)^p}\le\exp\left\{-\frac{x^2}{2V^2}\right\}+\frac{C_p}{2n^{(p-2)/2}x^p}. \tag{7}$$

由马尔可夫不等式及 $EW_n=1$，对 $x\ge\frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，我们有

$$I_4=P\left(W_{n_0,n}\ge\exp\left\{\frac{x\sigma\sqrt{n}}{2}\right\}\right)\le\exp\left\{-\frac{x\sigma\sqrt{n}}{2}\right\}EW_{n_0,n}=\exp\left\{-\frac{x\sigma\sqrt{n}}{2}\right\}\le\frac{C_p}{2n^{(p-2)/2}x^p}. \tag{8}$$

由(7)和(8)可知，对所有的 $x\ge\frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，$P\left(Y_{n_0,n}\ge x\right)\le\exp\left\{-\frac{x^2}{2V^2}\right\}+\frac{C_p}{2n^{(p-2)/2}x^p}$。

这就完成了定理 2 的证明。

基金项目

国家自然科学基金面上项目“随机矩阵乘积与随机环境中多型分枝过程”(12271062)。

参考文献

[1] Rösler, U. (1992) A Fixed Point Theorem for Distributions. *Stochastic Processes and Their Applications*, **42**, 195-214. https://doi.org/10.1016/0304-4149(92)90035-O

[2] Liu, Q. (2000) On Generalized Multiplicative Cascades. *Stochastic Processes and Their Applications*, **86**, 263-286. https://doi.org/10.1016/S0304-4149(99)00097-6

[3] Biggins, J.D. (1977) Martingale Convergence in the Branching Random Walk. *Journal of Applied Probability*, **14**, 25-37. https://doi.org/10.2307/3213258

[4] Rösler, U., Valentin, T. and Vladimir, V. (2002) Convergence Rate for Stable Weighted Branching Processes. In: Chauvin, B., Flajolet, P., Gardy, D. and Mokkadem, A., Eds., *Mathematics and Computer Science II. Trends in Mathematics*, Birkhäuser, Basel, 441-453. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8211-8_27

[5] Kuhlbusch, D. (2004) On Weighted Branching Processes in Random Environment. *Stochastic Processes and Their Applications*, **109**, 113-144. https://doi.org/10.1016/j.spa.2003.09.004

[6] Liang, X. and Liu, Q. (2017) On Mandelbrot's Martingales in Random Environments.

[7] Wang, Y., Liu, Z., Liu, Q. and Li, Y. (2019) Asymptotic Properties of a Branching Random Walk with a Random Environment in Time. *Acta Mathematica Scientia*, **39**, 1345-1362. https://doi.org/10.1007/s10473-019-0513-y

[8] Li, Y., Liu, Q. and Peng, X. (2019) Harmonic Moments, Large and Moderate Deviation Principles for Mandelbrot's Cascade in a Random Environment. *Statistics & Probability Letters*, **147**, 57-65. https://doi.org/10.1016/j.spl.2018.10.002

[9] 彭点江, 陈晔. 随机环境中加权分枝过程的 L^P-收敛[J]. 湖南文理学院学报(自然科学版), 2021, 33(3): 5-7.

[10] 徐乐群, 彭点江, 吴金华. 随机环境中带迁入加权分枝过程的收敛性[J]. 湖南文理学院学报(自然科学版), 2022, 34(1): 11-13+21.

[11] Wang, H., Gao, Z. and Liu, Q. (2011) Central Limit Theorems for a Supercritical Branching Process in a Random Environment. *Statistics & Probability Letters*, **81**, 539-547. https://doi.org/10.1016/j.spl.2011.01.003

[12] Biggins, J.D. and Kyprianou, A.E. (2004) Measure Change in Multitype Branching. *Advances in Applied Probability*, **36**, 544-581. https://doi.org/10.1239/aap/1086957585

[13] Grincevicjus, A.K. (1974) On the Continuity of the Distribution of a Sum of Dependent Variables Connected with Independent Walks on Lines. *Theory of Probability & Its Applications*, **19**, 163-168. https://doi.org/10.1137/1119015

[14] Nagaev, S.V. (1979) Large Deviations of Sums of Independent Random Variables. *The Annals of Probability*, **7**, 745-789. https://doi.org/10.1214/aop/1176994938