Advances in Education 教育进展, 2016, 6(3), 142-145
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
http://dx.doi.org/10.12677/ae.2016.63022

With Concise Remarks on the Teaching of Complex Function

Shumei Guo, Xinna Li, Ning Zhang

Department of Science, Information Engineering University, Zhengzhou Henan
Email: guoshumeixmu@163.com

Received: May. 8th, 2016; accepted: May. 22nd, 2016; published: May. 27th, 2016

Abstract

Analogy in the teaching of complex function is a commonly used method. But the complex function and the real function still have many differences in essence. Only clear with the essential difference between complex function and real function, and realizing the unique properties of complex function content, students can better understand and apply complex function.

Keywords

Complex Function, Limit, Derivative, Analytic Function

浅谈复变函数教学

郭淑妹，李新娜，张　宁

信息工程大学理学院，河南 郑州
Email: guoshumeixmu@163.com

收稿日期：2016年5月8日；录用日期：2016年5月22日；发布日期：2016年5月27日

摘　要

在复变函数的教学中类比教学法是比较常用的教学方法，但是复变函数与实函数还是有许多本质的区别，学生只有清楚复变函数与实函数的本质区别，了解复变函数内容的独特之处，才能更好地理解和应用复变函数。

文章引用：郭淑妹，李新娜，张宁．浅谈复变函数教学[J]．教育进展, 2016, 6(3): 142-145.
http://dx.doi.org/10.12677/ae.2016.63022

关键词

复变函数，极限，导数，解析函数

1. 引言

复变函数是分析学的一个重要组成部分，是数学乃至自然科学的重要基础之一，是分析学应用于实际问题的一种具体工具和桥梁。因此，很多院校的工科专业都开设了这门课。

关于复变函数的教学方法的研究也有许多，其中教师在上课的时候常用类比教学法。因为，复变函数在分析结构上几乎与微积分相同，也是按照函数、极限、连续、导数、积分及级数的顺序建立起来的[1] [2]。而且定义形式和运算性质也相同，这就很容易给学生造成一个错觉：似乎整部复变函数只是把微积分中许多概念照搬而已。因此在教学中除了注意复变函数中的概念与微积分中有关概念的共性外，还应特别注意复变函数的固有特点，帮助学生更好地理解复变函数的概念。所以在教学中在使用类比教学法的同时，尽可能清晰地让学生理解复变函数与实函数的本质不同。这样，学生在学习复变函数时具有全新的认识，对知识的理解会具有一定的建构性。

本文从平面、极限、导数的定义、解析函数、级数五个方面类比复变函数内容与实函数内容，并从中指出了其本质区别。

2. 平面

法国大数学家笛卡尔把代数和几何结合起来，创立了解析几何，所在平面为笛卡尔平面(笛卡尔平面直角坐标系)。一位数学史家曾经这样评价解析几何：没有笛卡尔的解析几何，就没有牛顿的微积分。同样挪威一位测量工作者维塞尔促使了复代数与几何的“握手”。他建立了复平面，并且把复数一一对应到平面上，由此复微分和复积分才发展起来[3]。但是复变函数与高等数学中的函数还是由本质区别的。

1) 高等数学是建立在笛卡尔平面，复变函数是建立在复平面上，笛卡尔平面和复平面存在质的不同：一是笛卡尔平面 x 和 y 可以是函数关系 $y=f(x)$，而复平面 $z=x+iy$ 则表示一对复自变量；二是笛卡尔平面坐标中横坐标与纵坐标相互独立，而复平面上，由于 $i^2=-1$，使 x 和 y 可以相互转换。

2) 由于笛卡尔平面与复平面的不同，实变函数中函数的自变量的定义域是数轴，因变量的取值在实数域，复变函数中 $\omega=f(z)$，$\omega=u+iv$，自变量是二维的，对应的因变量也是二维的。映射是复变函数的几何表示。在复变函数产生于发展过程中，认识到需要不同平面才能给出几何直观表示经历了很长一段时间，直到 1825 年，高斯才以完美的形式解决了两个平面，z 平面 G 变到 ω 平面 G^*。

3) 在复平面上，∞ 是一个假想的点，和实数系中的无穷大既有区别又有联系。实数系中的无穷大是绝对值无限增大的量，有正无穷大和负无穷大之分。在复变函数中，引入 ∞ 是为了与无穷远点相对应，∞ 是指模为正无穷大，幅角无意义的唯一的一个复数。因为复数域的 ∞ 没有正无穷大和负无穷大之分，所以在关于 ∞ 的减法运算就有如下规定：$\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty(\alpha\neq\infty)$。

3. 极限

复变函数的极限和连续的定义，是由实函数极限和连续的定义类比而来，运算法则和性质都相似，并且都是有极限的概念来定义函数的连续性。复变函数的极限和连续问题都可以转化为两个二元实函数的相应问题。

一元实函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$x\to x_0$ 是指 x 在 x_0 的邻区内从 x_0 的左右以趋于 x_0。复变函数 $f(z)$ 极

限定义的几何意义是：当变点 z 一旦进入 z_0 充分小的 δ 去心邻域时，它的象点 $f(z)$ 就落入 A 的预先给定的的 ε 邻域中。复变函数极限的定义和一元实变函数极限的定义相比十分类似，但是这里用圆形域代替了那里的邻区。并且 $z \to z_0$ 的方式是任意的，就是说无论 z 从什么方向，以何种方式趋向于 z_0，$f(z)$ 都要趋向于同一个常数 A。这比一元实变函数极限定义的要求要严苛得多，这也正是复变函数与实变函数有许多不同点的原因所在。

4. 导数

复变函数的导数、微分的定义与一元实函数的导数、微分定义是一致的，是利用类比的方法由一元实函数的概念推广到复数域得到的。

设函数在 $w = f(z)$ 定义于区域 D，z_0 为 D 中的一点，点 $z_0 + \Delta z$ 不出 D 的范围。如果极限 $\lim\limits_{\Delta z \to o} \dfrac{f(z_0 + \Delta z)}{\Delta z}$ 存在，那么就说 $f(z)$ 在 z_0 可导。定义中 $z_0 + \Delta z \to z_0$ 的方式是任意的，定义中极限值存在的要求与 $z_0 + \Delta z \to z_0$ 的方式无关。也就是说，当 $z_0 + \Delta z$ 在区域 D 内以任何方式趋于 z_0 时，比值 $\dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 都趋于同一个数。对于导数的这一限制比对一元实变函数类似的限制要严格得多，从而使复变函数可导函数具有许多独特的性质。在实变函数中，处处连续，但不可导的函数不是很常见，但是在复变函数中处处连续，但不可导的函数很常见，比如：$\bar{z}, \operatorname{Im} z, \operatorname{Re} z$ 等[4] [5]。

5. 解析函数

复函数的研究可以转化为两个二元实函数的研究，解析函数的两个实函数就不再独立，它们之间满足 **Cauchy-Riemann** 方程。函数在一点解析的定义是：如果函数 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导，那么称 $f(z)$ 在 z_0 解析。函数在一点处解析比在该点处可导的要求要高很多，所以解析函数比实变函数具有许多特有的性质。

5.1. 解析函数具有任意阶导数

对一元实变函数求导，如果一阶导函数不连续，则函数不能进行二次可导[1]。比如一元实变函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$，它的一阶导函数为 $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 这个函数在 $x = 0$ 点是不连续的，所以不能再进行求导。但是在复变函数中函数如果是解析函数不仅有一阶导数，而且有各高阶导数，并且解析函数的导数仍然是解析函数。

5.2. 任何解析函数都一定能用幂级数表示

在实变函数中，任意阶可导的函数是存在的，但它不一定能用幂级数来表示[1]。例如函数 $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $x \notin R$ 就不能用 x 的幂级数来表示。究其原因，在实变函数中，要把一个连续函数展开成幂级数，既要求它具有任意阶导数，还要求泰勒公式中余项的极限为零。上面这个例子就是因为余项不趋于零，所以不能展开成 x 的幂级数。对一个实变函数来说，要求出它的各阶导数已不容易，又要证明余项趋于零就更为困难。但对于复变函数中的解析函数来说，由于它有任意阶导数存在，而且又有泰勒展开定理的保证，因此就不用考虑这两方面的问题。

5.3. 初等函数

复变初等函数是一元实变初等函数在复数范围内的推广，它既保持了后者的一些基本性质，又与后者有不同的特性。指数函数与对数函数(除去原点和负实轴)是解析函数，并且是周期函数和多值函数，对数无负数的结论不再有效。欧拉定理将指数函数和三角函数紧密联系起来，这是复数运动的一大成果。复变函数中的三角函数，除了具有周期性、奇偶性，一些三角恒等式仍然成立。但是三角函数不再具有有界性，即不等式 $|\sin z| \le 1$ 与 $|\cos z| \le 1$ 不成立。复变函数的初等函数由于具有一些特性，所以有很多应用。比如：利用多值函数计算实积分时，多值函数的单值解析分支与围道的选择非常重要。初等函数在平面场，特别是稳定平面静电场和稳定平面流场具有重要的应用。

6. 级数

复数范围内的级数和数列的关系与实数范围内的情况十分类似。复数项级数和复变函数项级数的一些概念、定理是实数范围内相应内容在复数范围内的推广。幂级数的收敛性、性质定理、展开方法也是由实函数幂级数的相应内容类比而来。

因为任何解析函数都可以展开成泰勒级数，但对于有奇点的解析函数可用洛朗级数展开。洛朗级数把一个函数在围绕它的孤立奇点的圆环域内展开成级数，是泰勒级数的推广。泰勒级数与洛朗级数的区别是：泰勒级数是圆域收敛的，刻画了函数的解析性；洛朗级数是环域收敛的，刻画了函数的奇性。

任何一种理论的发展在起始阶段和成熟阶段都有着本质的区别。在起始阶段模仿多于创新，而后才发展成自身的规律，复变函数的发展也是如此。复变函数在其他学科还有很多应用有待开发，只有认清复变函数自身的特点和规律，才能更好地学习复变函数，才能对复变函数在其他学科上的应用得心应手。

参考文献 (References)

[1] 西安交通大学高等数学教研室. 复变函数[M]. 北京: 高等教育出版, 2012.

[2] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[3] 梁昌洪. 复变函数札记[M]. 北京: 科学出版社, 2011.

[4] 郑建华. 复变函数论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.

[5] 严镇军. 复变函数[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014.