Advances in Education 教育进展, 2022, 12(3), 745-752
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.123120

高中生平面向量模式识别能力研究

刘清韵，陈　洋

苏州科技大学数学科学学院，江苏 苏州

收稿日期：2022年2月15日；录用日期：2022年3月14日；发布日期：2022年3月22日

摘　要

模式识别是问题解决中的一个重要概念，它对高中生数学问题解决有着重要的作用，而对于特定数学问题下的模式识别相关研究仍然较少。因此，基于数学问题解决模式识别相关理论，采用文献法、出声思维及访谈法，针对高中生平面向量问题解决过程中知识模式识别进行相关研究，得到高中生平面向量问题解决中的模式识别主要包括两个方面：一是对知识模式的识别，二是对方法模式的识别。对于知识模式的识别包含：题目考点的识别、关联知识点的识别、题目间关联性的识别以及运用其他知识进行解题的识别四个方面。解题能力和解题经验均对模式识别有一定影响，解题能力较好以及解题经验较多的学生均能更好地对知识模式进行识别。

关键词

平面向量，模式，模式识别，问题解决

A Study on High School Students' Flat Vector Pattern Recognition Ability

Qingyun Liu, Yang Chen

School of Mathematical Sciences, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Received: Feb. 15th, 2022; accepted: Mar. 14th, 2022; published: Mar. 22nd, 2022

Abstract

Pattern recognition is an important concept in problem solving. It plays an important role in solving mathematical problems of high school students, but there are still few related researches on pattern recognition for specific mathematical problems. Therefore, based on the relevant theory of pattern recognition in mathematical problem solving, using literature method, thinking aloud and interview method, the related research is carried out on knowledge pattern recognition in the process of high school students' plane vector problem solving, and it is obtained that the main

文章引用：刘清韵，陈洋．高中生平面向量模式识别能力研究[J]．教育进展, 2022, 12(3): 745-752.
DOI: 10.12677/ae.2022.123120

pattern recognition methods in high school students' plane vector problem solving. It includes two aspects: one is the recognition of the knowledge pattern, and the other is the recognition of the method pattern. The identification of knowledge patterns includes four aspects: identification of test points, identification of related knowledge points, identification of relevance between topics, and identification of using other knowledge to solve problems. Both problem-solving ability and problem-solving experience have a certain influence on pattern recognition. Students with better problem-solving ability and more problem-solving experience can better recognize knowledge patterns.

Keywords

Flat Vector, Pattern, Pattern Recognition, Problem Solving

1. 引言

关于人类问题解决过程的研究，认知派心理学家认为，人所面临的大多数问题是通过识别来解决的。这个现象也广泛地体现在数学问题解决中，因此衍生了数学模式以及数学模式识别的概念。

对于数学模式的说法，源自对于数学本质的研究。郑毓信[1]认为数学的本质即是关于数学模式的科学。喻平[2]进一步解释数学模式是指形式化的采用数学语言，概括地或近似地表述某种事物系统的特征或数量关系的一种数学结构。各种基本概念、理论体系、定理、法则、公式、算法、命题、方法都是数学模式；在问题解决中，具有共同结构或相同解法的一类问题也称为一种模式。于文华[3]将数学模式进行细化并分类，一方面是作为知识的数学模式，这种数学模式属于一种宽泛的数学对象范畴，是社会建构以及社会约定的产物；另一方面是存于记忆的数学模式，这是由于个体差异性所形成的、存在于个体头脑中的数学模式，这种数学模式又可分为知觉上的数学模式及问题解决过程中即思维上的数学模式。

对于模式识别内涵的相关研究，主要涉及了以下两个领域。其一是认知心理学中知觉领域对模式识别的研究，尤其是对视觉的模式识别研究最多，该领域认为模式识别过程是感觉信息(作用于感觉器官)与长时记忆中的项目进行匹配的过程。其二是数学问题解决领域，包括了三个方面：

1) 基于数学解题认知过程的角度，模式识别是数学解题认知过程中的一个重要环节；

2) 基于数学解题策略的角度，罗增儒[4]认为模式识别是数学问题解题策略的一种；

3) 基于“归类”的视角，郑毓信[1]认为模式识别就是对问题的归类。

基于特定数学领域的问题解决中的模式识别探索，格里诺(J Greeno) [5]针对各个角的相互关系来求其他角的度数，在此过程中他认为解题需要三种基本能力或一般知识成分，即模式识别的知识、定理推理的知识与策略知识。朱新明[6]利用出声思维方法探讨了初中生解决几何问题的思维过程。施铁如[7]利用出声思维方法探讨了初中生解决代数应用题的认知模式的作用和特点。Hinsley [8]基于文字应用题的求解进行研究，发现学生确实具有关于标准问题如工程问题、相遇问题等的若干模式。李明振[9]发现数学建模问题中的模式识别受多种认知与非认知因素的影响。王聪[10]研究了高中生数列问题解决中的模式识别及其影响因素。文东[11]研究了平面几何问题解决中的模式识别及其影响因素。

《普通高中数学课程标准》[12]将高中数学的必修课程分为五个主题，根据每个主题所分配的课时来看，函数以及几何与代数这两个主题尤为重要，无论是函数，还是几何与代数，其中都贯穿着一个重要

的思想——“数形结合”，这说明了代数与几何两大数学模块相互融合的重要性。章建跃[13]认为向量概念的建立，使我们有了“集数与形于一身的数学研究工具”。这恰好说明了“平面向量”在高中数学中有着举足轻重的地位。

因此，文章围绕平面向量，对高中生平面向量解题中模式识别能力进行研究。主要研究以下几个问题：平面向量问题解决中的数学模式与模式识别；高中生平面向量的模式识别能力；高中生平面向量的模式识别影响因素。

2. 平面向量模式识别的内涵平面向量模式识别的内涵

2.1. 高中生平面向量问题解决过程中的模式

有关数学模式的内涵，沿用喻平[2]所指出的模式的概念。基于此，将高中生平面向量问题解决过程中的模式理解为学生在个体头脑中存在的，有关平面向量的各种概念、命题、性质、公式、方法、算法，以及做题过程中所积累的平面向量问题类型以及解法中的具有关联性的几种模式复合所形成的数学结构。

综合平面向量部分的知识点以及平面向量相关问题(类型)，对平面向量问题解决过程中的模式进行进一步的细化，将其分为两个部分，第一部分为平面向量的解题知识模式，包括学生个体头脑中存在的，并在问题解决过程中表征出来的平面向量的各种概念、命题、性质、公式及相互关联的概念、命题等。第二部分为平面向量的解题方法模式，包括了学生个体头脑中存在的平面向量解题方法、算法、平面向量问题类型及相互关联的几种模式的复合。

2.2. 高中生平面向量问题解决过程中的模式识别

有关模式识别的内涵更多的学者认为模式识别是数学解题认知过程中的一个重要环节。基于此，结合平面向量问题解决过程中的两种模式，现将高中生平面向量问题解决过程中的模式识别分为以下两类：平面向量知识模式识别与平面向量方法模式识别。

2.2.1. 平面向量知识模式识别

这里所涉及的知识主要包括了指平面向量中的一些基本概念、定理、公式等，而学生在问题解决过程中对知识模式的识别主要表现为，学生拿到题目，可以清楚地说出其中要考到的知识点即完成对对象的识别，同时也可以说出暗含的、可能涉及到的知识点，完成对概念、定理之间的联系的识别等。

2.2.2. 平面向量方法模式识别

这里的方法依据解题时所用到的知识点来划分，主要涉及两方面：一是代数法，二是几何法。例如拿到平面向量运算相关问题，学生可以根据向量运算的定义直接解题，即几何法；也可通过建系，以坐标的形式进行代数上的运算，即代数法，而采用不同的方法可能对做题速度、正确率等产生一定的影响。

由于方法模式的复杂性，文章将围绕“平面向量知识模式”展开研究。等。

3. 高中生平面向量知识模式识别能力及影响因素

3.1. 研究问题

主要研究两个问题：一是高中生对于平面向量解题知识模式识别的能力。二是高中生平面向量解题知识模式识别能力的影响因素。

3.2. 研究方法

采用出声思维与访谈法，考察平面几何问题解决中知识模式识别的认知过程。出声思维法也称口语

报告法，是目前国内外研究问题解决的一种常见方法，对学生出示题目，让学生仔细阅读题目，要求学生在解题过程中，进行出声思维，将内隐的心中所想利用语言外显出来，有利于充分了解被试的思维过程。再采用半结构性访谈对该生进行采访，有利于进一步了解被试的解题思路。在征得同意的基础上，对思维记录与对话用录音设备进行录音。

3.3. 被试

选取 s 市某中学 6 名语言表达能力较好的学生，学生分为三组，每组 2 人。第一组学生解题能力良好，第二组学生解题能力较差；这两组学生均已学完了高中平面向量课程，并且经过系统的复习练习，因此在一定程度上有较丰富的解题经验；第三组学生解题能力较好，但他们刚学完高中平面向量课程，掌握了初步知识，平时做题量不大，解题经验较少。

3.4. 材料

访谈材料包括 2 个题目，每个题目所涉知识点不同，难度较低。其中第一题主要考查平面向量数量积部分知识，包含三个小题；第二题主要考查平面向量加减运算部分知识，包含两个小题，特别地，第二小题可以采用坐标方法进行求解且更便捷。

3.5. 研究结果

3.5.1. 问题一研究结果

问题一主要考察了学生对于向量数量积、向量的模、向量夹角等知识点以及它们之间联系的识别。对于第一小题，求解关键在于学生能否正确地识别出“向量的模的求法”，并借助向量的加法以及数量积进行向量的模的求解。对于两个变式，求解关键在于正确地识别出数量积与向量的模、向量的夹角之间的联系。

下面给出第一组被试 1 的出声思维与访谈内容(表 1)。

Table 1. Subject 1’s thinking aloud and the answering process
表 1. 被试 1 出声思维及解答过程

口语报告	解答内容
1) 读题，要求 $\vec{a}+\vec{b}$ 的模，已经给了 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的模长以及它们的夹角，可以先算出 $\vec{a}+\vec{b}$ 的平方的值，再开根号。 2) $\vec{a}+\vec{b}$ 的平方就是 $\vec{a}$ 的模的平方加上 2 倍的 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积加上 $\vec{b}$ 的模的平方，等于 $4+2\times2\times2\times\frac{1}{2}+4=12$，再开根号，$2\sqrt{3}$。	1) 标出题目条件。 2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left\|\vec{a}\right\|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left\|\vec{b}\right\|^2=4+2\times2\times2\times\frac{1}{2}+4=12$ 3) $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

对被试 1 的访谈：

采访者：你认为这道题考了平面向量中哪个知识点？

生：向量的模。

采访者：求解过程中你是如何思考的？你觉得你的求解过程还用到平面向量中哪些知识点？

生：看到题中条件给了 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模长以及它们的夹角，所以我就先平方再开根号，我认为在平方的过程中还用到了数量积这个知识点。

采访者：那你再看一下第二问和第三问，这种题目如何求解呢？

DOI: 10.12677/ae.2022.123120

生：(读题)也是利用到数量积，这两问相当于第一问反过来求解。

3.5.2. 问题二研究结果

问题二主要考察了学生对于向量加法运算、向量的模、向量的坐标运算这些知识点以及它们之间联系的识别。对于第一小题，求解关键在于学生能否正确地识别出等式中暗含的“向量的加法”这一知识点，通过平面向量基本定理对未知向量进行替换，进而求解向量的模。对于第二小题，一方面，学生可以沿用上一问中“向量加法”的方式求解，另一方面，该题求解是否便捷的关键在于学生能否识别出“向量的坐标法”这一知识进行求解。

下面给出第一组被试 2 的出声思维与访谈内容(表 2)。

Table 2. Subject 2’s thinking aloud and the answering process
表 2. 被试 2 出声思维及解答过程

口语报告	解答内容
1) 读第一小题，给出条件等边三角形，首先将等边三角形 ABC 画出来，但是 P 点的位置不知道。 2) 已知 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=0$，但是要求的是 $\overrightarrow{PA}$ 的模，P 点的位置又未知，所以想办法把 $\overrightarrow{PB}$ 和 $\overrightarrow{PC}$ 处理掉。 3) 把 $\overrightarrow{PB}$ 化为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}$，同理把 $\overrightarrow{PC}$ 化为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}$。 4) 把等式化一下，平方再开方。	1) 标出题目条件 2) 3) $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}$ 4) $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PC}-2\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{AB}$ $\therefore 2\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$ $4\left\|\overrightarrow{PA}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|+4\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$ $=36-36+144=144$ $\therefore \left\|\overrightarrow{PA}\right\|=6$

对被试 2 的访谈：

采访者：你认为这道题考了平面向量哪些知识点？

生：向量的加法，还有需要求向量的模。

采访者：那么求向量的模又用到了什么知识点呢？

生：向量的模的平方等于向量的平方吧。

采访者：好的，那么我们来看一下第二小题，你认为这道题和第一小题有什么联系和区别？

生：(读题)联系的话，都是求向量的模的问题，都涉及到了向量的加法，所以解题思路可能是一样的。区别的话，上一问 P 点位置是未知的，这一问里面所有点的位置是已知的。

采访者：那么你想用什么方法求解这道题呢？

生：我觉得这里点的位置都已知，而且正方形有直角，可以建系来做。

4. 分析与讨论

4.1. 高中生平面向量问题解决过程中的知识模式识别

根据被试对于平面向量问题的求解过程，可以发现高中生在平面向量问题解决过程中的知识模式识别包括以下几个方面：

1) 识别出题目中所考知识

学生在拿到题目时，首先做的事情就是读题，一些被试能够在读题时便识别出该题目要考到的或涉及到的知识。

2) 识别出与所考知识相关联的知识

求解问题时，被试首先识别出了题目中要考到的知识，从而识别(联想)出与其相关联的知识。

3) 通过识别题目中知识模式来判定不同题目之间是否关联

求解问题时，被试能够通过识别出了题目中涉及到的知识来判断题目之间是否有关联性。

4) 识别(联想出)其它知识点用来解决平面向量问题

在平面向量问题的求解中，往往会涉及到不同的方法求解，题目求解的难易有时取决于学生对于求解所用知识的选择。如平面向量的加、减、数乘、数量积的运算，不仅可以利用它们的几何性质直接运算，还可以借助坐标进行运算。

4.2. 对问题一解答的分析

根据高中生平面向量问题解决过程中的模式识别，对三个小组被试的问题一求解过程进行分析，得到如下结论(表 3)：

第一小组的被试在求解过程中，首先能够识别出向量的模、向量的夹角、向量加法与向量数量积，其次能够识别出其中的知识点的关联性，再次能够根据题中条件识别出不同问题之间的关联性。

第二小组的被试在求解过程中，能够根据题中条件识别出向量的数量积以及考察向量的模，但未能自行求解向量的模，说明被试未识别出知识间(数量积与向量的模)的关联性。经过教师提示，想出其中的关联性，并识别出不同问题之间的关联性。

第三小组的被试在求解过程中，根据题中条件识别出向量的模与向量加法的几何意义，并通过几何的方法进行求解。说明被试识别出其中向量部分的考点，但未识别出考点与向量中其他知识点的关联性，而是依赖自身的几何知识背景进行求解，也因此无法继续对变式进行求解与识别。

Table 3. Analysis of the pattern recognition situation of the subjects on question 1
表 3. 被试对问题一的模式识别情况分析

	所考知识	关联知识	题目间关联性	其他知识点
1	√	√	√	-
2	√	○	×	-
3	√	×	×	-

注：自行完成——“√”；经提示后完成——“○”；未完成——“×”；解题过程中未表现——“-”。

4.3. 对问题二解答的分析

根据高中生平面向量问题解决过程中的模式识别，对三个小组被试的问题二求解过程进行分析，得到如下结论(表 4)：

第一小组的被试在求解过程中，能够识别出向量加法与向量的模，并能够直接抽象上(字母表示法)利用向量的加法运算化简等式。对于变式的求解，能够想到利用坐标表示的方法求解更加便捷，说明被试能够联想到(识别出)其它知识用于问题求解。

第二小组的被试在求解过程中，未识别出题目条件中中暗含的向量加法的知识，因此无法处理等式。对于变式的求解，联想出了向量的加法与向量的模的求解，但未联想出利用坐标法解决该问题，说明被试未能识别出其他知识用于问题求解。

第三小组的被试在求解过程中，识别出了向量的加法运算与向量的模，间接利用作图来推出其中向量加法的关系。对于变式沿用了第一小题的思路，经过提示后联想到坐标表示的方法求解。

Table 4. Analysis of the pattern recognition situation of the subjects on question 2
表 4. 被试对问题二的模式识别情况分析

	所考知识	关联知识	题目间关联性	其他知识点
1	√	√	√	√
2	√	×	-	×
3	√	√	√	○

注：自行完成——“√”；经提示后完成——“○”；未完成——“×”；解题过程中未表现——“-”。

4.4. 高中生平面向量模式识别的影响因素

高中生平面向量模式识别影响因素包括两个方面：解题能力与解题经验。

1) 解题能力对模式识别的影响

比较第一组与第二组的被试对平面向量问题解决过程中的模式识别情况，可以得出解题能力对模式识别有显著影响。解题能力对高中生平面向量模式识别的影响主要体现在识别与考点相关联的知识、识别题目之间的关联性以及识别并运用其他知识点进行解题三个方面。解题能力较好的学生能够更好地进行这三个方面相关的模式识别，反之，解题能力较差的学生在这三个方面的模式识别有一定困难。

2) 解题经验对模式识别的影响

比较第一组与第三组的被试对平面向量问题解决过程中的模式识别情况，可以得出解题经验对模式识别有显著影响。解题经验对高中生平面向量模式识别的影响部分体现在识别与考点相关联的知识、识别题目之间的关联性以及识别并运用其他知识点进行解题三个方面。

解题经验较多的学生能够更好地进行这三个方面相关的模式识别，反之，解题经验较少的学生在这三个方面的模式识别可能会出现比较混乱的情况。

5. 结论

根据高中生在平面向量问题解决过程中的知识模式识别的研究与分析，高中生平面向量问题解决过程中的知识模式主要包括四个方面：识别出题目中所考知识；识别出与所考知识相关联的知识；通过识别题目中知识模式来判定不同题目之间是否关联；识别(联想出)其它知识点用来解决平面向量问题。高中生平面向量模式识别影响因素包括两个方面：解题能力与解题经验。

因此，针对平面向量知识模块教学的过程，提出以下三点建议：

1) 教师在讲授知识过程中，应重视知识之间的关联性。

2) 提升学生根据题目所考知识点对题目进行归类的能力。

3) 对于一些问题求解，培养学生一题多解的能力。

基金项目

江苏省研究生实践创新计划——高中生个体 CPFS 结构对问题解决能力的影响(SJCX21_1365)。

参考文献

[1] 郑毓信. 认知科学建构主义与数学教育：数学学习心理学的现代研究[M]. 上海：上海教育出版社, 1998: 74.

[2] 喻平. 数学教育心理学[M]. 南宁：广西教育出版社, 2004: 236

[3] 于文华. 数学问题解决种模式识别的影响因素研究[D]: [博士学位论文]. 南京：南京师范大学, 2012.

[4] 罗增儒. 数学解题学引论[M]. 西安：陕西师范大学出版社, 1997.

[5] Greeno, J.G. (1978) Advance in Instructional Psychology. Lawrence Erebaum Associates, Hillsdale, NJ.

[6] 朱新明. 解决几何问题的思维过程[J]. 心理学报, 1983(1): 9-18.

[7] 施铁如. 解代数应用题的认知模式[J]. 心理学报, 1985(3): 296-303.

[8] Hinsley, D.A. 文字应用题求解中的模式识别[M]//郑毓信. 认知科学建构主义与数学教育: 数学学习心理学的现代研究. 上海: 上海教育出版社, 1998.

[9] 李明振. 数学建模的认知机制机器教学策略研究[D]: [博士学位论文]. 重庆: 西南大学, 2007.

[10] 王聪. 高中数学数列模式识别的研究[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东师范大学, 2015.

[11] 文东. 平面几何问题解决中的模式识别研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 四川师范大学, 2017.

[12] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2017.

[13] 章建跃. 利用几何图形建立直观通过代数运算刻画规律——“平面向量及其应用”内容分析与教学思考[J]. 数学通报, 2020, 59(12): 4-13+29.