

# 实际应用中有哪一些有趣的排列组合问题？

## ——基于知识点的案例教学

程 凤

西南交通大学数学学院，四川 成都

收稿日期：2022年9月12日；录用日期：2022年10月11日；发布日期：2022年10月17日

---

### 摘 要

“概率论与数理统计”学习的一个重要目标是：培养学生用概率与数理统计的数学思想分析和解决实际问题的能力。而有效的教学案例是引导学生思考、分析、创新的重要途径。本文针对“概率论与数理统计”中的排列组合问题，以实际生活中具体且有趣的例子说明了其应用，且给出了古典概型问题具体清晰的计算，着重说明了排列组合可以解决真实生活问题，在实际生活中有非常重要的应用。

### 关键词

概率论与数理统计，排列组合，案例教学，教学效果

---

# What Are Some Interesting Permutation and Combination Problems in Practice?

## —Case Teaching Based on Knowledge Points

Feng Cheng

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

Received: Sep. 12<sup>th</sup>, 2022; accepted: Oct. 11<sup>th</sup>, 2022; published: Oct. 17<sup>th</sup>, 2022

---

### Abstract

An important goal of “probability theory and mathematical statistics” is to cultivate students’ ability to analyze and solve practical problems with the mathematical ideas of probability and mathematical statistics. Effective teaching cases are an important way to guide students to think, analyze and innovate. In this paper, in view of the permutation and combination problem in “probability theory and mathematical statistics”, the application of permutation and combination is illustrated

with specific and interesting examples in real life, and the specific and clear calculation of classical probability problem is given clearly and specifically. It is emphasized that permutation and combination can solve real-life problems, and has very important applications in daily life.

## Keywords

Probability Theory and Mathematical Statistics, Permutation and Combination, Case Teaching, Teaching Effect

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

“概率论与数理统计”是一门研究随机现象及其统计规律的数学学科，它是高等院校理工科各专业学生的必修课程，它就像高等数学、线性代数一样是一门工具学科，为学生学习其它专业课程做好基础准备。但是它又区别于其它数学类课程，它兼具理论性、应用性、实践性与综合性，对培养学生的理性精神、随机事件应对能力、数据处理与建模能力等方面起着十分重要的作用。

“概率论与数理统计”分为两部分学习[1]，第一部分是概率论，第二部分是数理统计，概率论是数理统计的理论基础，数理统计是概率论的应用。概率论是研究随机现象的模型及其性质的学科。一般而言，概率论的发展分为三个阶段，第一阶段称为古典概型，也称为等可能概型，主要以排列组合为工具计算事件发生的概率。第二阶段是近代概率，主要通过微积分的角度去理解各种连续型分布的概率模型及其数字特征，它以高等数学为基础；第三阶段是现代概率，主要从测度论和实分析的角度去理解概率论，它以测度论为基础。高等院校理工科各专业学生学习的概率论一般指的是近代概率，主要是引入随机变量及其分布，将微积分、线性代数等近代数学工具应用到概率论的研究中。但是在引入随机变量及其分布之前，古典概型的学习对学生理解概率的公理化定义及性质起到了非常重要的作用。而古典概型在实际处理中的难点就在于确定样本空间  $S$  和事件  $A$  中样本点的个数，即需要计数，主要利用到排列和组合问题，同时利用加法原理和乘法原理。加法原理和乘法原理是解决计数问题的基础，称为基本计数原理；排列与组合是两类特殊且重要的计数问题，可以利用两个基本计数原理推导出计数公式。排列组合问题也是中学数学中的一个重要问题，且其题型多变，因此有很多文章着重讲解其解题技巧和易错地方。例如[2] [3] [4] [5]给出了多种不同的排列组合解题方法，文献[6]和[7]给出了排列组合易发生的错误分析。

需要指出的是，古典概型题目类型很多，同时计数难免会有疏漏，容易导致概率计算的错误。因此，高等院校理工科各专业学生只需要掌握一些基本的古典概型的类型就可以了，主要是理解其核心意义并进行基本应用，而不需要在此问题上过多浪费时间和精力。因此，与前面所述文献不同的是，本文并不以实际解题技巧和分析易错点为目标，而是以实际生活中具体且有趣的例子说明排列组合的应用，同时给出古典概型问题具体清晰的计算，帮助高等院校理工科各专业学生进一步认识数学理论的重要作用。

本文首先给出了排列组合的定义，接着通过车牌、音乐、盲文、密码中蕴含的排列组合问题说明了其广泛的应用并给出了古典概型问题的计算，最后给出了文章结论。

## 2. 实际应用中的排列组合问题

排列公式和组合公式的推导是基于加法和原理乘法原理的。首先，我们给出加法原理和乘法原理的定义[8]。

加法原理：若某事件共有  $m$  类不同的途径完成，第一类途径有  $n_1$  种方法完成，第二类途径有  $n_2$  种方法完成，……，第  $m$  步有  $n_m$  种方法，那么完成此事件总共有  $n_1 + n_2 + \dots + n_m$  种方法。

乘法原理：若某事件需要经过  $m$  个步骤完成，第一步有  $n_1$  种方法，第二步有  $n_2$  种方法，……，第  $m$  步有  $n_m$  种方法，那么完成此事件总共有  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$  种方法。

接着，我们给出排列和组合的定义。

排列的定义：从给定的  $m$  个元素中取出指定的  $n$  个元素，进行排序，表示为

$$A_m^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}。$$

组合的定义：从给定的  $m$  个元素中取出指定的  $n$  个元素，不考虑排序，表示为  $C_m^n = \frac{A_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}。$

下面以几个实际问题为例，详细说明排列组合问题，并计算古典概型问题的概率。

### 2.1. 车牌的组成

车牌是对各车辆的编号与信息登记，其主要作用是通过车牌可以知道该车辆的所属地区，也可根据车牌查到该车辆的主人以及该车辆的登记信息。除了特殊车牌，例如警车车牌、教练车车牌等，普通车牌一般由以下几部分组成。普通车牌第一位是汉字，代表该车户口所在的省级行政区，为各省、直辖市、自治区的简称；第二位是英文字母，代表该车户口所在的地级行政区，一般为各地级市、地区、自治州、盟字母代码；第三部分由英文字母、数字共五位组成，目前最多使用两个英文字母，且 26 个英文字母中的 I 和 O 不允许使用。那么某个地方的车牌号一共有多少种组合呢？

这就是排列组合的计算，首先是纯数字的车牌，从 00000 到 99999，一共是 100000 个车牌，这是常识；1 个英文字母和其它为数字的车牌，一共是  $24 \times C_5^1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1200000$  个车牌；2 个英文字母和其它为数字的车牌，一共是  $24 \times 24 \times C_5^2 \times 10 \times 10 \times 10 = 5760000$  个车牌；三种汽车车牌排列方式，合计共能组成 7060000 个车牌。

**例 1** 假设某城市的汽车保有量几乎接近号牌资源。试问偶然遇到的一辆汽车，其车牌中没有数字 8 的概率等于多少？

**解：**记车牌中没有数字 8 的事件为  $A$ 。由题意，所有可能的结果为 7060000 种，考虑车牌中没有 8 的情况。

- 1) 纯数字的车牌中没有 8，其可能结果是  $9^5$ ；
- 2) 一个英文字母和其它数字的车牌中没有 8，其可能结果为  $24 \times C_5^1 \times 9^4$ ；
- 3) 两个英文字母和其它数字的车牌中没有 8，其可能结果为  $24 \times 24 \times C_5^2 \times 9^3$ 。

$$\text{则 } P(A) = \frac{9^5 + 24 \times C_5^1 \times 9^4 + 24 \times 24 \times C_5^2 \times 9^3}{7060000} = 0.7146。$$

即车牌中没有数字 8 的概率为 0.7146。

据网络资料，目前中国汽车保有量最大的城市为北京，北京的汽车保有量为 603.2 万量，第二名成都为 545.7 万量。可见排列组合知识在实际城市车牌号码规划中的应用，印证了最多选用两位字母的可行性。

## 2.2. 音乐的组合

“宫、商、角(jue)、徵(zhi)、羽”[9][10]是我国五声音调中五个不同音的名称,类似现在简谱中的1、2、3、5、6。即宫等于1(Do),商等于2(Re),角等于3(Mi),徵等于5(So),羽等于6(La),亦称作五音。《孙子兵法》中有“声不过五,五声之变,不可胜听也”。将其翻译就是,声音不过宫、商、角、徵、羽五个音阶,然而用这五种音阶变化组合,就能创造出永远也听不完的音乐。

钢琴作为乐器之王,深受世界各国人民的喜爱,因为它的音色变化多端,优美动听。钢琴有88个琴键,其中52个白键,36个黑键。每首钢琴作品都是不同琴键的排列组合。钢琴独奏曲由旋律与和声组成,和声由和弦组成。我们知道一首好听的曲子,它的旋律、节奏、音调总是排列组合的非常好的。

**例2** 从一架钢琴中选择3个键同时按下,可发出和弦,若有一个音键不同则发出不同的和弦。问弹奏的和弦组合正好是三个音键连续的概率是多少?

**解:** 和弦组合为三个音键连续的事件为 $A$ 。由题意,所有可能的和弦组合总数为 $C_{88}^3 = 109736$ 。而三个音键连续的总数为86。

$$\text{则 } P(A) = \frac{86}{109736} \approx 0.00078。$$

即弹奏的和弦组合正好是三个音键连续的概率约为0.00078。

有限的音阶可以组合成无限的音乐,恰恰是排列组合在生活中的最美好体现。

## 2.3. 盲文的形式

盲文[11]或称点字、凸字,是专为盲人设计、靠触觉感知的文字。透过点字板、点字机、点字打印机等在纸张上制作出不同组合的凸点而组成,一般每一个方块的点字是由六点组成,左侧从上到下为123,右侧为456,叫一方。它是由法国盲人路易·布莱叶于1824年创造的,故国际上通称为“布莱叶(Braille)”。盲文的26个字母表示见图1。

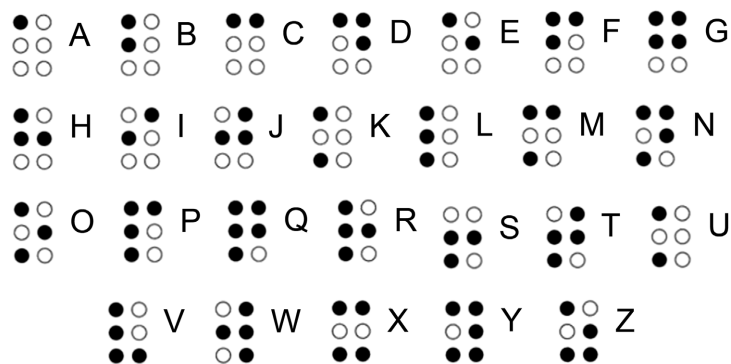


Figure 1. English braille

图1. 盲文的英文点字

英文标点符号也有相应的盲文点位。盲文一共有 $C_6^1 + C_6^2 + \dots + C_6^6 = 2^6 - 1 = 63$ 种表达,是足够表示26个英文字母和标点符号的。例如,如果想表达“also”,就用1点(a),24点(l),235点(s),135点(o)。

国际上使用过的英语盲文形式[12],包括一级盲文、二级盲文、三级盲文和UEB盲文等,现阶段国内广泛使用的是英语一级盲文,少部分盲人能阅读二级盲文。

只要用心观察,就会发现在我们的日常生活中盲文的应用也很多,例如电梯按钮上的盲文,人民币上的盲文,盲文公交站牌,盲文菜单等等。

## 2.4. 密码的设置

随着科技水平的不断进步,我们生活中的密码问题非常常见,如银行卡账号密码的设置;微信、支付宝支付密码的设置;qq、微信、淘宝、微博等通讯账户的登陆问题等都涉及到密码的设置问题,可以说我们的生活已经很难离开这下形形色色的数字组合了,一般的银行卡密码是6位数字,也就是说从0~9这10个数字中任选6个进行组合,每个数字每个位上都会有6次可能,因而10的六次方即组合数量,要盗取他人的银行卡密码也是有一定的难度的,由此可见我们的银行卡有密码的设置还是相当保险的。

**例3** 某人登入某系统忘记了密码的最后两位数字,因而他随意的输入,求他输入不超过3次而登入系统的概率?

**解:** 记  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次未进入系统}\}$ ,  $i=1,2,3$ 。由题意,所有可能的输入结果为  $C_{10}^1 \times C_{10}^1 = 100$  种,则有  $P(A_1) = \frac{99}{100}$ 。很容易也可得,  $P(A_2 | A_1) = \frac{98}{99}$ ,  $P(A_3 | A_1 A_2) = \frac{97}{98}$ 。因此,

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | A_1 A_2) = \frac{99}{100} \times \frac{98}{99} \times \frac{97}{98} = \frac{97}{100}。$$

这样,  $P\{\text{3次输入中至少有一次输入成功}\} = 1 - \frac{97}{100} = \frac{3}{100} = 0.03$

即他输入不超过3次而登入系统的概率为0.03。

排列组合和概率的知识为6位密码的安全性提供了理论依据。此案例代表已知4位密码,仅有后两位不知,靠猜测成功的概率依然很低,为银行设置3次尝试功能提供了安全依据。

## 3. 结论

在教学实践中,案例教学法一直是一种有效的教学方法,它能通过学生所见所闻的真实事件开始提高学生学习的积极性、主动性,开阔学生思路、视野,加强学生自学能力和探索能力。作者在多年的“概率论与数理统计”的教学中使用案例教学法,均取得了很好的教学效果。“概率论与数理统计”中的古典概型在实际处理中的难点就在于确定样本空间  $S$  和事件  $A$  中样本点的个数,即需要计数,主要利用到排列和组合问题,同时利用加法原理和乘法原理。通过实际生活中具体且有趣的例子说明了排列组合的应用,且给出了古典概型问题具体清晰的计算,这能有效提高学生的知识程度,提高学生的理解力和主动学习能力,提高学生对社会发展的深度思考,对学生的能力建设和思想健康都起到积极的作用。

## 致 谢

作者非常感谢相关文献对本文的启发以及审稿专家提出的宝贵意见。

## 基金项目

西南交通大学2020年本科教育教学研究与改革项目(20201035-07)。

## 参考文献

- [1] 茆诗松,程依明,濮晓龙. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020: 223.
- [2] 陈宗洵. 排列组合解题二三法[J]. 数学通报, 1999(3): 34-36.
- [3] 刘庆元. 解排列组合问题十法[J]. 数学通讯, 2000(12): 7-8.
- [4] 李迪森. 如何思考排列组合问题[J]. 数学通讯, 2004(10): 5-6.
- [5] 兰社云, 王桂花. 几类特殊排列组合题的解题策略[J]. 数学通报, 2009, 48(4): 40+43.
- [6] 彭祖盛. 初学排列组合易发生的错误分析[J]. 数学通讯, 2001(10): 8-9.

- [7] 张良强. 排列组合问题的一类错误例析[J]. 数学通讯, 2002(10): 16-17.
- [8] 朱合忠. 谈排列组合应用题的教学[J]. 数学教学, 1989(3): 7-9.
- [9] 杨莉. 探“宫商角徵羽”五音的来源[J]. 档案溯源, 2014(22): 101-102.
- [10] 胡企平. “宫商角徵羽”五声阶名探源[J]. 上海交通大学学报(社会科学版), 1997, 1(19): 89-95.
- [11] 百度百科. 盲文[Z]. <https://baike.baidu.com/item/%E7%9B%B2%E6%96%87/440901>
- [12] 周弘安平. 中国盲文在中国的普及与使用[J]. 传媒论坛, 2021, 4(1): 84-85.