Advances in Education 教育进展, 2023, 13(2), 488-494
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.132079

Hans汉斯

例谈高中生在数学解题中目标意识的培养

古力斯坦·热合曼，侯传燕*

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年1月3日；录用日期：2023年2月1日；发布日期：2023年2月8日

摘 要

在数学教学中，教师要有目标意识的有效引导，学生才能在解题时树立正确的目标意识，养成主动思考的习惯，从而真正意义上培养对数学的学习兴趣。在数学例题教学中，如果教师的教和学生的学缺少目标意识，将直接导致教学质量变低，学生的思维缺乏动力等情况。通过从高中数学解题教学的角度出发，可以说明数学教学中教师对学生进行目标意识引导的重要性。

关键词

高中数学，解题，目标意识

On the Cultivation of Goal Consciousness of Senior High School Students in Solving Mathematical Problems

Gulisitan·Reheman, Chuanyan Hou*

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jan. 3rd, 2023; accepted: Feb. 1st, 2023; published: Feb. 8th, 2023

Abstract

In mathematics teaching, teachers should have the effective guidance of goal consciousness, so that students can establish correct goal consciousness and develop the habit of active thinking when solving problems, so as to really cultivate their interest in mathematics learning. In mathematics example teaching, if teachers' teaching and students' learning lack goal consciousness, it will directly lead to lower teaching quality and students' lack of thinking motivation. From the

*通讯作者。

文章引用: 古力斯坦·热合曼, 侯传燕. 例谈高中生在数学解题中目标意识的培养[J]. 教育进展, 2023, 13(2): 488-494.
DOI: 10.12677/ae.2023.132079

perspective of mathematics problem-solving teaching in senior high schools, the importance of teachers' guiding students' goal consciousness in mathematics teaching can be illustrated.

Keywords

High School Mathematics, Problem Solving, Goal Consciousness

1. 引言

目标意识是主体对目标重要性的认识。目标意识对数学思维有着推动和调控作用，没有目的就没有思维[1]。数学是通过对概念的分析、生成和组织，对命题的严密逻辑推理而形成的互相联系的系统化的有机整体[2]。作为数学教师，不能被动地等待学生在学习数学时的自觉感悟，而要在教学中对学生进行目标意识的有效引导，让学生发现数学知识之间的关联。事实上，进行目标意识的引导是让学生认识到学习新知识的意义和目的、学习的新知识和已有知识之间的联系、数学知识中一些规定的合理性以及这个知识蕴含的数学核心素养。教师对数学教学过程有了目标意识，教学就会变得更精准；学生对数学学习有了目标意识，学习就会变得更加高效。换言之，目标意识可以使教与学的质量得到全面提升。

2. 例谈目标意识培养的重要性

在应试教育的背景下，教学中仍然存在只关注高分的情况，因此在数学教学中往往有着轻过程重结果的情况。但是知识的产生往往贯穿于教学过程，因此目标意识也应该存在于教与学的全过程。由于教师有教学自主权，这也体现在对教学的加工处理上，这说明教师不能单纯地追求学生汲取知识的结果，讲授知识要从知识的本质出发，并且要更注重教学中的过程性评价，学生才会更好地理解问题。对于例题教学，教师要让学生感受到：这道题是怎么解的？为什么要这么解？如何想到这样的解题方法？这样才能让学生学会自己独立解题。

学生在学习数学时要做到知其然，更要知其所以然。如果学生在解题时没有真正意义上的理解某一种解题方法，或者没有掌握在不同的解题方法中每个步骤所要达到的目的，就会产生对数学的不敏感性。一旦学生对数学失去敏感性，那么当问题发生一些变化时就会无从下手。对于大部分学生来说，对数学题目产生不敏感现象主要是因为他们试图在联想教师讲解过的方法，或者是在想自己之前是否做过类似的题目，从而通过模仿或者机械的套用公式来进行思考和解题；而对于比较优秀的学生来说，他们具有较强的目标意识，因此在解题时可以很快的进行对数学知识的探索，可以联立起条件与结论之间的联系和差异，从而进行正确解题。下面将通过有关高中数学常用的两个知识点的相关例题，来说明教师在解题教学中进行目标意识引导的重要性。

2.1. “1”的妙用

“1”在不同的题目中有不同的作用，教师在讲解此类问题时要说明意图。数字“1”对于有些题不仅具有化简为繁的作用，还有化繁为简的作用。

例 1 已知正数 x, y，满足 $2x+3y=xy$，求 $5x+6y$ 的最小值。

对于本题来说，学生已有的知识是基本不等式。因此大部分学生的常规思路是直接利用基本不等式，即 $xy = 2x + 3y \geq 2\sqrt{2x \cdot 3y}$，令 $t = \sqrt{xy}$，则 $t^2 \geq 2\sqrt{6}t$，解得 $t \geq 2\sqrt{6}$，则 $5x + 6y \geq 2\sqrt{5x \cdot 6y} \geq 2\sqrt{30} \cdot 2\sqrt{6} = 24\sqrt{5}$。这种解法利用了两次基本不等式，因此错误之处就在于学生忽略了两次取等的条件是否同时成立。教师如果不对错误进行分析，而是直接否定学生的这种解法，那么当学生再次遇到此类型的题时还会犯类似的错误。

本题的主要思路是利用常数代换法，对 $2x + 3y = xy$ 两边同时除以 xy，有 $\frac{2}{y} + \frac{3}{x} = 1$，目标式子就变为求 $(5x + 6y) \times 1 = (5x + 6y) \cdot \left(\frac{2}{y} + \frac{3}{x}\right) = \frac{10x}{y} + 27 + \frac{18y}{x}$ 的最小值，最后再用基本不等式求出最小值即可。

将代数式代换为常数其实是一个求简的过程，这是正向思维的过程。而将常数代换为代数式是一个化简为繁的过程，这是逆向思维的过程[3]。上述题中我们用数字“1”代换了 $\frac{2}{y} + \frac{3}{x}$，其实就是化简为繁的过程，这样更有利于我们进行解题。教师应该给学生解释常数代换法的由来，不能让学生认为这是神来之笔，并且要让学生深入理解这种“无中生有”的解题方法。

例 2 如图 1，在四面体 S-ABC 中，已知 $AB \perp SB$，$AB \perp BC$，$\angle SAB = \angle BAC$，证明：$\cos\angle SAC = \cos^2\angle SAB + \cos\angle SBC \cdot \sin^2\angle SAB$。

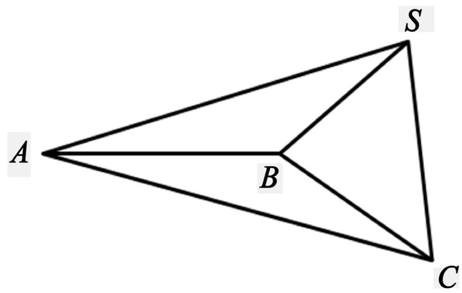

Figure 1. Example 1
图 1. 例题 1

本题要证明的结论中存在三角函数值之间的关系，学生会想到利用余弦定理有 $\cos\angle SAC = \frac{SA^2 + AC^2 - SC^2}{2 \cdot SA \cdot AC}$，又因为 $AB \perp SB$，$AB \perp BC$，根据勾股定理有 $SA^2 = AB^2 + SB^2$，$AC^2 = AB^2 + BC^2$，则上式可以改写为

$$\cos\angle SAC = \frac{AB^2 + SB^2 + AB^2 + BC^2 - SC^2}{2 \cdot SA \cdot AC} = \frac{2AB^2 + SB^2 + BC^2 - SC^2}{2 \cdot SA \cdot AC}。$$

对于目标意识较强的学生来说，这时很快就可以联想到要将式子中的几个边与 $\angle SAB, \angle SBC$ 的三角函数值联系起来，即利用条件 $\angle SAB = \angle BAC$ 可以写出 $\cos\angle SAB = \frac{AB}{SA} = \frac{AB}{AC}$，$\sin\angle SAB = \frac{SB}{SA} = \frac{BC}{AC}$，$\cos\angle SBC = \frac{SB^2 + BC^2 - SC^2}{2 \cdot SB \cdot BC}$，所以

$$\cos\angle SAC = \frac{AB}{SA} \cdot \frac{AB}{AC} + \frac{SB^2 + BC^2 - SC^2}{2 \cdot SB \cdot BC} \cdot \frac{SB}{SA} \cdot \frac{BC}{AC} = \cos^2\angle SAB + \cos\angle SBC \cdot \sin^2\angle SAB。$$

上述的这个解法对于尖子生来说是很容易想到的，但是对于一些对解题的目标意识不强的学生来说，他们想不到这种方法，并且这种解法不能提升学生的创新性思维。因此对于此题来说，利用余弦定理有

$\cos\angle SAC=\dfrac{SA^2+AC^2-SC^2}{2\cdot SA\cdot AC}$，这时最重要的是要将式子中的三个边表示出来，因为 $\cos\angle SAB=\dfrac{AB}{SA}=\dfrac{AB}{AC}$，这时可以设 $AB=1$，则 $SA=AC=\dfrac{1}{\cos\angle SAB}$，又因为 $SC^2=SB^2+BC^2-2\cdot SB\cdot BC\cdot\cos\angle SBC$，这时需要表示出边 SB,BC，注意到 $\tan\angle SAB=\dfrac{SB}{AB}=\dfrac{BC}{AB}$，则 $SB=BC=\tan\angle SAB$，代入上式有 $SC^2=2\tan^2\angle SBC-2\cdot\tan^2\angle SBC\cdot\cos\angle SBC$，这时只需将边 SA,AC,SC 的表达式代入后化简就可以证明 $\cos\angle SAC=\cos^2\angle SAB+\cos\angle SBC\cdot\sin^2\angle SAB$。设 $AB=1$，这样就相当于少了一个未知数，这时可以利用三角函数值来表示另外三个边 SA,AC,SC，最后就可以将 $\angle SAC$ 与 $\angle SAB,\angle SBC$ 的三角函数值联系起来，也就达到了化繁为简的作用。

对于这两道题，数字“1”分别起到了化简为繁和化繁为简的作用。高中数学中还有很多有关数字“1”的妙用的例题，比如数字“1”可以当作中间变量来比较两个数的大小，也可以在三角函数的题目中当作中间变量进行一系列的化简和计算。那么这时学生可能就会产生疑惑：“1”到底是什么？我到底怎么用数字“1”？教师在进行解题教学时，要举例说明数字 1 在不同的问题中可以进行不同的转换，让学生体会到这种无中生有的方法。并且教师要让学生学会在自己的思维中积累和归纳总结这些方法，从而提高学生的发散思维能力，最重要的是让学生体会到数字“1”在数学解题中的灵活性。

2.2. 辅助线的巧作

在高中解三角形的试题中，构造辅助线来解题可以很好的培养学生一题多解的能力，并且提升学生“数化形”的解题思路。利用已知条件学会建立数与形的联系，有利于培养学生创新性思考。但是构造辅助线也要有明确的目标意识。在考虑新图形的相关性质之后，要看是否可以和已知条件进行关联。在充分利用已知条件的基础上对问题进行适当的转换，才可以达到一箭双雕的目的，使得减少计算步骤。对于解三角形的问题，与其机械的套用正弦定理和余弦定理，不如根据图形中特殊角和边的性质，利用辅助线构造出特殊的三角形，并且通过新的图形揭示出三角形中隐含的边或角度的大小，将已知条件变为过渡性的推论。

例 3 在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$\sin(B-A)=\cos C$，

$$\tan C=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$$

1) 求 $\angle A,\angle C$。

2) 若 ΔABC 的面积为 $3+\sqrt{3}$，求 a,c。

方法一：1) 将 $\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$，化简后有 $\sin(C-A)=\sin(B-C)$，所以 $\angle C-\angle A=\angle B-\angle C$ 或 $\angle C-\angle A=\pi-\angle B-\angle C$ (舍)，从而得出 $\angle C=\dfrac{\pi}{3}$。因为 $\sin(B-A)=\cos C$，求得 $\angle A=\dfrac{\pi}{4}$。

2) 由(1)可知 $\angle A=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle C=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle B=\dfrac{5\pi}{12}$，求得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，在 ΔABC 中，利用正弦定理有 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}c$，再根据 $S=\dfrac{ac\sin B}{2}=3+\sqrt{3}$，解得 $c=2\sqrt{3}$，$a=2\sqrt{2}$。

方法二(巧作辅助线)：1) 同法一。

2) 如图 2 所示，在边 AC 上作一点 D，使得 $\angle ABD=\angle A$，连接 BD。

因为 $\sin(B-A)=\sin\angle DBC=\cos C$，则 $\angle DBC=\dfrac{\pi}{6}$，或 $\angle DBC=\dfrac{5\pi}{6}$ (舍)。

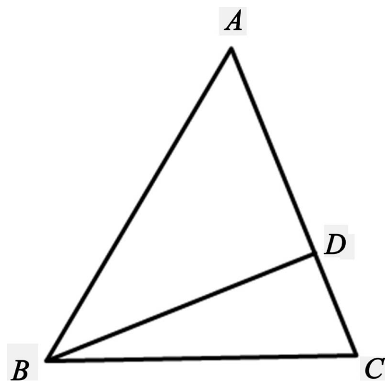

Figure 2. Example 2
图 2. 例题 2

由(1)可知 $\angle A=\angle ABD=\frac{\pi}{4}$， $\angle C=\frac{\pi}{3}$，令 $DC=x$， $BC=2x$， $BC=2x$，

$BD=AD=\sqrt{3}x$，$AB=\sqrt{6}x$，$S_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)x\cdot\sqrt{3}x}{2}=3+\sqrt{3}$，解得 $x=\sqrt{2}$，所以 $c=2\sqrt{3}$，$a=2\sqrt{2}$。

对于此题来说，题目中没有相关的边的长度，导致求三角形的面积时就会失去目标，因此需要尽快将目标明确。教师在讲解这道题时要有引导性的思考，题中出现了两角之差 $B-A$ 的形式，那么可以根据等角关系的性质，利用辅助线构造出与 $\angle A$ 相等的 $\angle ABD$，这时已知条件就转化为 $\sin\left(B-A\right)=\sin\angle DBC=\cos C$，这样就可以在解决第二问时根据图形的特殊性，利用直角三角形的面积公式求出 a,c。教师要利用特殊到一般的形式，来总结解这一类题的常用方法。因为此题已知三角形两角之差的条件，说明条件与结论之间的逻辑关系不清楚，那么可以根据等角关系的性质，利用辅助线构造出与其中一个角相等的角，这时就可以将新的图形中隐含的性质充分显示出来。通过添加辅助线把特殊角度的性质揭示出来，从而更好的发挥出特殊图形的性质，可以简化计算步骤。教师在讲解此题时要说明为什么要构造辅助线？从哪个条件可以看出需要构造辅助线？构造辅助线的意义何在？并且要理解这一类问题的常规解法与目标之间的关系，构造辅助线后与目标之间又存在什么关系。让学生体会到这两种方法之间的区别与联系。

波利亚曾说过：“聪明的读者不会满足于只验证推理的各步骤都是正确的，他们也想知道各个步骤的动机和目的。如果一条巧妙的辅助线和辅助图形突然出现在图形中，看不出任何动机，并且令人惊讶地解决了问题，那么聪明的读者会感到很失望，他们觉得上当受骗了[3]。”因此教师需要解释构造辅助线的原因，要说明我们是根据已知条件构造了特殊三角形，以便于将图形的特殊性质显示出来，从而充分发挥直角三角形和等腰三角形图形特点。同时对于一些分散凌乱的条件，通过作辅助线可以将已知条件集中到一个基本图形中，从而简化计算步骤。

3. 培养目标意识时需注意的问题

3.1. 在教学中注重新知识与学生已有知识的关联

对于数学学科来说，初中和高中的知识点都是有关联的。初中数学更多的是记忆和模仿，而高中数学需要发散思维和创新思维，因此经常会出现一题多解的情形。学生在高中阶段，对于一些知识的计算和证明都会频繁使用到初中学习过的知识，但是更多的是对初中知识的拓展。对于一些运算来说，高中

解题中的运算量较大，并且更加注重精准的计算，因此也离不开初中学习段中对运算能力的培养。换言之，初中阶段为高中的教学在知识、方法、思想等方面都作了相应的准备和铺垫，高中应以此为新知识教学的“生长点”，努力实现初高中数学教学的有效衔接[4]。比如，三角函数的知识点在初高中都会涉及。但是初中学习的三角函数是由直角三角形中引申出来的，只是为相似图形服务。在高中学习的三角函数是初中的三角函数定义的推广，它具有图象性质、周期性、最值等问题，属于真正系统的学习函数。再比如，初中学习的勾股定理，就是余弦定理的特殊情况。

奥苏贝尔曾经写道：“如果我们不得不将教育心理学还原为一条原理的话，我将会说，影响学习的最重要因素是学生已经知道了什么，我们应当根据学生原有的知识状况进行教学[5]。”他认为学生能否获得新知识，主要取决于学生个体的认知结构中是否已具有相关的概念。因此作为数学教师，也应多重视这一点，并根据学生已有的知识进行教学，促进学生更好的适应高中数学知识的学习。

3.2. 在教学中重视学生个体差异性的存在

很多学者已经证明了解题者的解题习惯、解题经验、解题思考以及认知风格都是影响解题的重要因素。因此数学教师在解题教学中，要对不同学生的不同认知特点给予关注。另一方面学生的学情相对来说比较复杂，教学目标的确立要充分考虑学情，因此这也是课前备课中“备学生”的一个重要体现。比如，在例 2 中提到的解法对于不同学生来说，想到的解题方法和思路也不同。因此，教师需要持有“基于学生，为了学生发展”的态度进行教学。

教学过程不是一成不变的，数学教师可以根据学生的个体差异来安排解题教学的目标，提前预设学生的疑惑点，对知识进行由浅到深、由单方面到多角度的思考来进行教学。最好的方式是进行分层教学，即对于基础不太好的学生，可以多布置一些基础性强的作业题目，使他们抓牢基础知识；对于基础比较好的学生，可以引导他们多进行创新性的思考。

3.3. 目标意识要以《普通高中数学课程标准》为基础

高中数学课程是义务教育阶段后普通高级中学的主要课程，具有基础性、选择性和发展性。高中数学教学要以发展学生数学学科核心素养为导向，创设合适的教学情境，启发学生思考，引导学生把握数学内容的本质[6]。让学生养成良好的学习习惯，促进学生创新意识的发展是高中教师的责任。因此数学解题教学应该以六大核心素养为基础，引导学生真正成为学习的主人。教师在设计教学过程时，都应该执行《普通高中数学课程标准》，这样才会对所有的学生来说都是有益的。这也有利于目标研究的具体开展，可以让教师实实在在地基于课堂教学，并落实到实践中去[7]。

总的来说，优秀的数学教学应该建立在教师和学生之间的共同参与和发展的基础上。因此教师在进行例题教学的过程中，需要从学生已有知识、学生个体差异性和课程标准等三个方面来进行目标意识的引导，这样教师的教与学生的学都不会迷失方向，教学质量也会有相应的提高。

4. 反思与感悟

当遇到某一个数学问题时，学生首先会记忆自己是否做过类似的题目，即会和自己已有的知识进行连接，并且在头脑中会有不同的解题思路或解题方法，但是这些思路不一定就是正确的，这样就需要学生进行验证。但是一一验证不仅浪费时间而且很难保证正确性，因此就需要在平时的解题中积累一些解题经验。这就需要教师在解题教学中进行有效引导，引导学生掌握对解题方法的选择原则。解题是否成功很大程度上取决于学生对目标意识的选择程度，选择原则越清晰，那么学生的解题思维越具体，在题目上的应用就会越自觉，对解题过程的调节就越强，解题就越不容易偏离正确的轨道，到达目标的进程

就越顺利。由此可见数学解题的过程是一个需要不断对所发生的情况进行自我评估并随时加以调整的动态过程[8]。数学教师在进行例题教学时，就要通过对学生目标意识的培养，来让学生学会这种对动态过程的调整，从而使学生真正爱上数学。

基金项目

新疆维吾尔自治区一流本科课程建设项目。

参考文献

[1] 陶兆龙. 数学中等生与尖子生目标意识的差异及培养[J]. 数学通报, 2006(12): 42-45.

[2] 殷堰工. 基于结构思想的数学教学[J]. 苏州教育学院学报, 2013, 30(2): 98-101. https://doi.org/10.16217/j.cnki.szxbsk.2013.02.027

[3] 杨军. 追根溯源——数学中的为什么[M]. 西安: 世界图书出版西安有限公司, 2016: 171-186.

[4] 邓勤. 新课程背景下初高中数学教学的有效衔接——从函数概念的教学谈起[J]. 数学通报, 2011, 50(2): 33-35.

[5] 林松. 教学应三"懂"课堂方优效[J]. 中小学数学(高中版), 2019(10): 19-22.

[6] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.

[7] 张曜光, 楼中楠, 朱哲. 数学精准教学与目标意识[J]. 中学教研(数学), 2019(8): 1-5.

[8] 方小亚. 例析中学数学解题过程中的目标意识与思维监控[J]. 中学数学, 2010(3): 8-10.