

数学运算核心素养视角下高考数学 三角函数试题分析研究

丁佳竹, 薛雨欣, 苗佳晶, 刘海明*

牡丹江师范学院数学科学学院, 黑龙江 牡丹江

收稿日期: 2023年2月17日; 录用日期: 2023年3月16日; 发布日期: 2023年3月27日

摘 要

在全国高考及数学课程变革稳步推动的前提下, 数学试题的命制逐渐注重学生核心素养的形成。本文首先对三角函数单个知识点进行了界定, 之后确定了数学运算核心素养水平划分, 其次对2016~2022年黑龙江省高考数学卷中的三角函数试题所考察知识点进行归类, 并对数学运算核心素养分析进行说明, 最后依据数学运算核心素养水平划分探究试题中所蕴含核心素养的变化趋势及考查情况, 最后对高中三角函数教学提供了教学建议, 希望能对三角函数教学有所帮助。

关键词

数学运算, 三角函数, 试题分析

Analysis and Research on the Mathematical Trigonometric Function Test Questions of College Entrance Examination from the Perspective of Mathematical Operation Core Literacy

Jiazhu Ding, Yuxin Xue, Jiajing Miao, Haiming Liu*

School of Mathematics and Science, Mudanjiang Normal University, Mudanjiang Heilongjiang

Received: Feb. 17th, 2023; accepted: Mar. 16th, 2023; published: Mar. 27th, 2023

*通讯作者。

文章引用: 丁佳竹, 薛雨欣, 苗佳晶, 刘海明. 数学运算核心素养视角下高考数学三角函数试题分析研究[J]. 教育进展, 2023, 13(3): 1233-1240. DOI: 10.12677/ae.2023.133195

Abstract

Under the premise of the steady promotion of the national college entrance examination and mathematics curriculum reform, the system of mathematics test questions gradually pays attention to the formation of students' core literacy. This paper first defines a single knowledge point of trigonometric function, and then determines the division of the core literacy level of mathematical operation. Secondly, it classifies the knowledge points examined in the trigonometric function test questions in the college entrance examination of Heilongjiang Province from 2016 to 2022, and explains the analysis of the core literacy of mathematical operation. Finally, according to the division of the core literacy level of mathematical operation, it explores the change trend and examination situation of the core literacy contained in the test questions. Finally, it provides teaching suggestions for trigonometric function teaching in senior high school, hoping to help trigonometric function teaching.

Keywords

Mathematical Operation, Trigonometric Function, Item Analysis

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学核心素养是在实现数学课程目标过程中学生逐渐具备的重要能力,能够帮助个人更好适应现代社会生活,获得 21 世纪所需的关键能力,并能提升个人数学思维品质,增强构建完整数学知识体系的能力,其体现了学生的态度和价值观。数学运算能力则是数学核心素养中的一项,数学运算能力可以帮助学生加大对数学运算对象的深入理解,掌握更多的运算技巧与程序,从而获得对逻辑思维的训练,增强数学的应用能力[1]。三角函数是高中数学的重要内容,包含着数量较大的数学知识,在学习上具有一定的难度,对于提高学生的思维和数学知识能力具有重要的作用,并且三角函数涉及大量的计算内容与技巧,对于学生的计算能力提出了挑战。因此可以通过分析高考试题中蕴含的数学运算核心素养,借助学习三角函数来提高学生的数学运算能力,以期实现人才的培养,为教学提供更多的建议。

2. 数学运算核心素养水平划分

首先对三角函数单个知识点进行界定。将三角函数考察的知识点可以分为三大部分,第一部分是有关三角函数数值计算的知识点,包括同角三角函数关系、三角函数诱导公式、二倍角公式、和与差公式、半角公式与辅助角公式,第二部分是突出函数特性的知识点,包括三角函数值域、单调性、图像变换、周期与零点等,第三部分是正弦定理与余弦定理的考察。上述各部分知识点均涉及到数学运算,将每部分下的小知识点计为单个知识点。

其次进行数学运算核心素养水平划分。为对三角函数中的数学运算素养进行量化分析,需要建立评价指标体系。首先以李爽、杨泽恒、王彭德研究得到的与数学运算相关的部分核心素养评价体系为基础[2],结合 SOLO 分类理论,增加 C4 结构层次,并且依据高中三角函数知识对每一种核心素养水平层次进行解释,如表 1 所示。

Table 1. Evaluation index system of mathematical operation core literacy**表 1.** 数学运算核心素养评价指标体系

数学运算评价层次	数学运算评价层次水平内涵
C1	在熟悉的题目中, 能根据 1 个知识点, 例如三角函数相关公式、法则等进行简单的相关计算。
C2	在新情境中, 题目中涉及 2 个或 2 个以上的三角函数相关知识, 学生能通过知识点的简单应用进行题目的计算。
C3	题目中涉及 3 个或 3 个以上的三角函数相关知识, 学生需对知识点有一定的把握程度, 能够通过三角函数公式或法则的综合运用得到难度较高的三角函数问题的计算结果, 理解运算的意义。
C4	题目中涉及较多知识点, 学生可以独立的对三角函数题目进行分析, 能过运用计算结果得到问题的解释, 并且得到一定的解题规律或较为抽象或较为一般的结论, 最终实现计算水平的提高。

3. 三角函数试题分析

3.1. 确定三角函数高考试题知识点

黑龙江省在 2016 至 2020 年中高考试卷采用全国卷 II, 在 2021 年至 2022 年中高考试卷采用全国乙卷, 通过对历年试卷(理科)分析发现, 对于三角函数试题的考察可以分为专门考察三角函数知识和在解题过程中涉及三角函数知识两类题目, 黑龙江省自 2016 至 2022 年所考高考试卷中对于选择题、填空题及解答题各类题型的三角函数考察知识点如表 2 所示:

Table 2. Knowledge points of trigonometric function in the college entrance examination papers of Heilongjiang Province from 2016 to 2022**表 2.** 黑龙江省 2016~2022 年高考试卷中三角函数各题型考察知识点

年份	三角函数考察分类	选择题知识点	填空题知识点	解答题知识点
2016	专门考察三角函数知识	三角函数图像变换, 二倍角公式, 三角函数诱导公式	三角函数恒等变换, 正弦定理, 同角三角函数关系	无
	在解题过程中涉及到三角函数知识	同角三角函数关系	无	同角三角函数关系
2017	专门考察三角函数知识	无	同角三角函数关系, 三角函数值域	和与差公式, 半角公式, 余弦定理
	在解题过程中涉及到三角函数知识	余弦定理, 三角函数定义	无	同角三角函数关系, 和与差公式, 二倍角公式, 辅助角公式
2018	专门考察三角函数知识	二倍角公式, 余弦定理, 辅助角公式, 三角函数单调性	同角三角函数关系, 和与差公式	无
	在解题过程中涉及到三角函数知识	无	同角三角函数关系, 特殊角三角函数值	无
2019	专门考察三角函数知识	三角函数图像变换, 二倍角公式, 同角三角函数关系	余弦定理	无
	在解题过程中涉及到三角函数知识	无	无	同角三角函数关系

Continued

2020	专门考察三角函数知识	二倍角公式, 三角函数符号, 特殊角三角函数值	无	正弦定理, 余弦定理, 特殊角三角函数值, 三角函数单调性, 诱导公式, 同角三角函数关系
	在解题过程中涉及到三角函数知识	特殊角三角函数值	特殊角三角函数值	无
2021	专门考察三角函数知识	三角函数值域, 三角函数图像变换	余弦定理	无
	在解题过程中涉及到三角函数知识	无	无	同角三角函数关系
2022	专门考察三角函数知识	无	三角函数周期、零点, 诱导公式	和与差公式, 正弦定理, 余弦定理
	在解题过程中涉及到三角函数知识	同角三角函数关系	无	和与差公式, 特殊角三角函数值

可以看出, 对于专门考察三角函数知识的题目三部分都会涉及到, 在解题过程中涉及到三角函数的知识点主要包括同角三角函数和特殊角三角函数值, 其他部分偶有出现, 除此之外, 同角三角函数关系是每年必考的知识点, 在选择题、填空题和解答题中均有出现, 因此对于这部分知识点需要引起重视。

3.2. 确定高考试题数学运算核心素养水平

Table 3. The core literacy level of each question in the trigonometric function in the college entrance examination papers of Heilongjiang Province from 2016 to 2022

表 3. 黑龙江省 2016~2022 年高考试卷中三角函数各题型中每题核心素养水平

年份	三角函数考察分类	选择题题号及核心素养水平	填空题题号及核心素养水平	解答题题号及核心素养水平
2016	专门考察三角函数知识	题号为 7, 核心素养水平为: C2 题号为 9, 核心素养水平为: C2	题号为 13, 核心素养水平为: C3	0 道
	在解题过程中涉及到三角函数知识	题号为 11, 核心素养水平为: C1	0 道	题号为 19, 核心素养水平为: C1 题号为 23, 核心素养水平为: C1
2017	专门考察三角函数知识	0 道	题号为 14, 核心素养水平为: C2	题号为 17, 核心素养水平为: C3
	在解题过程中涉及到三角函数知识	题号为 10, 核心素养水平为: C2	0 道	题号为 19, 核心素养水平为: C1 题号为 22, 核心素养水平为: C3
2018	专门考察三角函数知识	题号为 6, 核心素养水平为: C2 题号为 10, 核心素养水平为: C2	题号为 15, 核心素养水平为: C2	0 道
	在解题过程中涉及到三角函数知识	0 道	题号为 16, 核心素养水平为: C2	0 道

Continued

2019	专门考察三角函数知识	题号为 9, 核心素养水平为: C2 题号为 10, 核心素养水平为: C2	题号为 15, 核心素养水平为: C1	0 道
	在解题过程中涉及到三角函数知识	0 道	0 道	题号为 17, 核心素养水平为: C1
2020	专门考察三角函数知识	题号为 2, 核心素养水平为: C3	0 道	题号为 17, 核心素养水平为: C3 题号为 21, 核心素养水平为: C3
	在解题过程中涉及到三角函数知识	题号为 10, 核心素养水平为: C1	题号为 13, 核心素养水平为: C1	0 道
2021	专门考察三角函数知识	题号为 3, 核心素养水平为: C1 题号为 7, 核心素养水平为: C1	题号为 15, 核心素养水平为: C1	0 道
	在解题过程中涉及到三角函数知识	0 道	0 道	题号为 18, 核心素养水平为: C1
2022	专门考察三角函数知识	0 道	题号为 15, 核心素养水平为: C3	题号为 17, 核心素养水平为: C3
	在解题过程中涉及到三角函数知识	题号为 11, 核心素养水平为: C1	0 道	题号为 22, 核心素养水平为: C2

首先依据先前制定的数学运算评价指标体系,对黑龙江省自 2016 至 2022 年所考高考试卷中涉及三角函数知识点题目分析其数学运算核心素养水平。在高考试题中对于数学运算的考察更为灵活,主要包括对数学公式及法则的掌握情况、对运算对象的处理方法、对运算方法和运算程序的熟练程度、对运算结果的理解能力等,且同学只有通过数学运算过程才能得到最终的答案[3],实现问题的解决,因此数学运算类试题出现频率较高,考察知识点较为丰富,下面以 2022 年填空题的第 15 题为例对数学运算核心素养分析进行说明。

题目:记函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 T ,若 $f(T) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点,则 ω 的最小值为_____。

分析:本题属于中档题,考查了三角函数的周期、零点与诱导公式,本题需要一定的运算思维,首先要知道周期 T 的运算公式,其次根据 $f(T)$ 具体数值以及题目中给出的 φ 的范围,通过诱导公式计算出 φ 的值,由于已知 $f(x)$ 的一个零点,则可通过列方程及数学运算得出 ω 的取值规律,并且由于 ω 为整数,且取最小值,得到最终的答案为 3。本题在计算中运用到了方程思想,共涉及 3 个知识点,并且需要考虑到各个未知数的取值范围,否则就会出现计算错误的现象,难度较高,要求学生综合掌握三角函数知识点,因此其数学运算核心素养水平为 C2。

在对所有题目进行分析过后,最终划分结果如表 3 所示。

3.3. 数学运算核心素养视角下高考试题考察分析

首先对历年试题进行了解。如图 1 所示,可见历年三角函数题型总数在 4~6 道题之间,2021 年~2022 年黑龙江省试卷改为全国乙卷,题目数量相较以前并未有太大变化,并且逐渐稳定在 4 题,其中选择题

多为 2 题，且两题考察类型多为专门考察三角函数知识，偶尔会在第 10 或第 11 题设置在解题过程中涉及到三角函数知识；填空题则多为 1 题，并且多在第 15 题设置专门考察三角函数知识的题目，7 年间仅出现 2 次解题过程中涉及三角函数知识，占比较小；解答题多在 1~2 题之间波动，通常情况隔一年会在 17 题设置专门考察三角函数知识的题目，同时在选考题目中有时会涉及到三角函数。

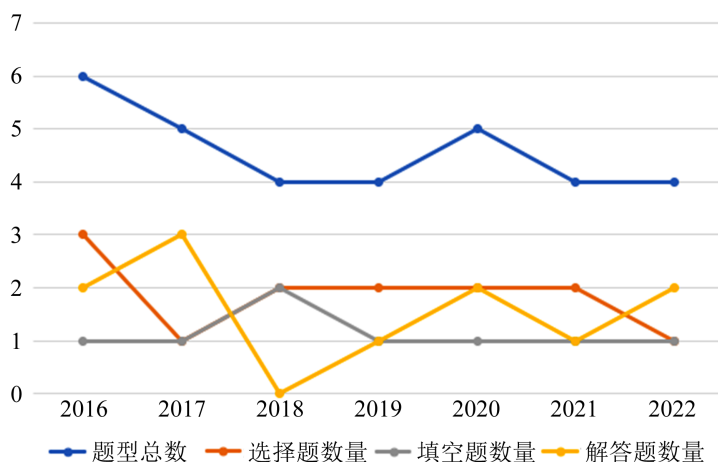


Figure 1. Number of questions of trigonometric function in 2016~2022
图 1. 三角函数 2016~2022 年各题型数量

其次通过对历年数学运算核心素养水平进行总体汇总分析发现，核心素养水平为 C1 的题共有 12 道，为 C2 的题共有 10 道，为 C3 的题共有 8 道，三者数量相差不大，分布较均衡，由此可见，对于三角函数部分数学运算的考察从低到高难度的试题学生均需有所把握，尤其对于基础知识点的內容需要熟练掌握，不可大意；除此之外，可以看到历年数学运算核心素养水平分布均有所差异，其中 2022 年高考数学试题核心素养涉及 C1、C2、C3 共 3 个水平，要求学生不仅要掌握简单知识点的处理，而且会综合运用不同知识点解决问题，对学生的运算能力要求较高，而 2021 年对于三角函数运算的考察则均处于 C1 水平，考察难度较小，2020 年难度相较于 2021 年又有所提升，位于 C3 水平的题目数量有所提升，可见近年来三角函数题目在偶数年份运算难度会较奇数年大，会更看重对于运算的综合处理和重点知识的运用。

最后通过对各题型数学运算核心素养水平进行汇总，如图 2 所示，可见选择题中 C2 水平的题最多，各水平间题型数量差异较大，由此可见选择题中三角函数运算更侧重于单个知识点的考察和对两个知识点综合运用的考察，要求学生会三角函数的公式和法则，学会对题目简单的应用和处理，单个知识点考察通常包括同角三角函数关系、三角函数图像变换及特殊三角函数值，且通常是在解题过程中涉及到，这说明高考试题注重学生对基本公式的计算应用，而两个知识点的考察则一般将三角函数恒等变换与余弦定理计算或者相结合，除此之外，三角函数恒等变换与图像变换相结合的题目也常出现，这说明高考试题注重数形结合，利用计算解决几何变换问题，锻炼直觉思维能力；填空题中 C2 水平的题最多，各水平题型数量分布较为均衡，但相较于选择题，填空题中 C3 水平的题目开始增多，难度开始增大，更进一步的考察运算程序和方法的掌握，其中单个知识点的考察主要为余弦定理计算，考察两个知识点的题目则大多将同角三角函数计算与其他知识的计算相结合，这说明高考试题注重计算思维的考察；解答题中 C3 和 C1 水平的题最多，C2 水平的题占比不高，且选择题、填空题和解答题三类题型中，C3 水平的题目数量在解答题中是最多的，其中 C3 水平的解答题常涉及到正弦定理和余弦定理，考察知识点包括大部分三角函数内容，计算程度较为复杂，可见学生需要理解运算的意义，并增强对三角函数运算公式的运用，开阔运算思维。

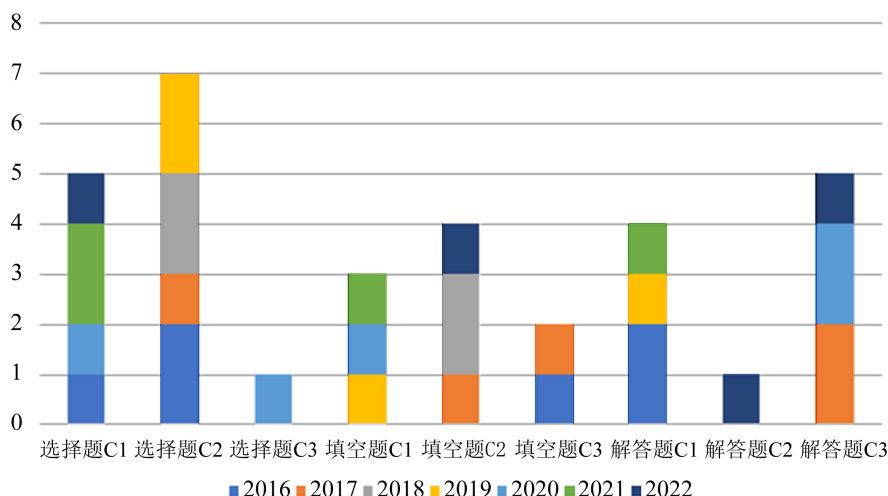


Figure 2. Number of core literacy levels of each question type of the three functions in 2016~2022
图 2. 2016~2022 年三角函数各题型核心素养水平数量

综上所述, 三角函数在高考试题中十分重要, 不仅每一年都会专门考察三角函数知识点, 而且在其他题目中也会出现这部分知识点的考察, 若三角函数知识点掌握不牢靠, 对于其他题目的解决也会出现障碍, 因此学生必须打好基础, 增强对三角函数知识点的理解。在高考试题中, 会更看重对于运算的综合处理和重点知识的运用, 例如三角函数恒等变换与正弦定理相结合的题目、同角三角函数计算与其他知识的计算相结合等, 考察知识点包括大部分三角函数内容, 计算程度较为复杂, 说明高考试题考察学生掌握基础公式的熟练程度及基础知识在不同题型和题目下的变换应用; 在高考试题中常出现数形结合的思想方法, 或利用计算解决几何变换问题, 或利用几何解决计算问题, 如三角函数恒等变换与图像变换相结合、三角函数符号象限图与恒等变换相结合的题目, 这就锻炼直觉思维能力; 由于 C3 水平的题目在解答题中数量较多, 而解答题分值较大, 难度较高, 说明高考试题考察学生的计算思维水平和对运算意义的理解。

4. 三角函数教学建议

4.1. 熟练掌握三角函数公式, 加强变式训练

通过对三角函数试题考察范围分析发现高考试题中涉及到的公式、定理等基础知识颇多, 例如选择题中要求学生掌握三角函数的公式和法则, 学会对题目简单的应用和处理, 知识点考察通常包括同角三角函数关系、三角函数图像变换及特殊三角函数值等基础知识, 这些知识点包括诸多三角函数公式, 数量多且繁杂, 当学生对公式产生记忆错乱时, 就会导致数学运算产生错误, 而变式训练可以巩固学生对公式的记忆, 通过不同题目情景下的练习, 提高数学运算能力, 因此在课堂中, 应注重基础知识的教学及讲解, 并通过变式训练, 促进数学思维发展, 加强对知识的理解, 注重三角函数与其他知识的结合 [3], 增强熟练程度, 同时在课堂教学中, 可以开展自主探究、小组汇报学习等教学活动, 让学生自主展开变式题目的练习, 增强对变式题目的理解, 总结数学公式及运算技巧。

4.2. 掌握计算方法, 提升运算思维

通过三角函数试题核心素养分析可以发现, C2 和 C3 水平的题颇多, 多个知识点结合的考察在高考试题中是非常重要的, 因此对运算对象的处理就显得十分重要, 需要学生掌握一定的运算方法和技巧, 这样就会达到事半功倍的效果。而要掌握运算方法和技巧, 就要进行适度的数学运算训练, 首先教师需

要将三角函数运算方法分为基础和进阶两类，并将运算方法教给学生，其次进行对应的习题训练，习题设置需要适量并具有典型性，以此来提升运算技巧，丰富运算思路，同时，也要提高学生的运算思维，防止计算思路混乱，增强对题目的理解程度，对此，教师要了解学生在计算时产生的思维障碍，并针对该障碍产生相应的教学策略，帮助同学突破思维壁垒，提升运算能力和数学核心素养。

4.3. 提高综合素质，增强学生兴趣

由于 C3 水平的题目在解答题中占比最多，并且解答题分数较高，因此也需要在教学中适当增强题目的运算难度，加强各知识点的紧密结合，增加运算维度、逻辑思维和推理能力，提高学生的数学综合素质。为了达到这个目的，就需要激发学生的学习兴趣，在课堂中启发学生积极思考，营造良好的探究氛围，通过自主探究，让学生增强推理能力，以良好的推理思维减少运算步骤和难度，将题目分析透彻，来增强数学运算和解决问题的能力。同时也可以将较高难度题目作为锻炼学生推理能力的工具，增强学生的综合运用能力，开阔思维，提升数学运算核心素养，提高综合素质[4]，实现问题解决。

5. 结论

数学运算核心素养的考察在三角函数高考试题中占有较大比例，高考数学试题需要通过数学运算得到最终的答案，因此在平时教学中不可忽略对数学运算能力的培养，加强理解与推导[5]，提高计算方法和技巧。由于数学运算核心素养各水平分布较为均衡，因此在注重基础知识掌握的同时，需要适当提高题目难度，注重理性思维[6]，增强对三角函数各知识的综合运用能力，培养运算思维。

基金项目

黑龙江省大学生创新创业训练计划项目(S202210233060)。

参考文献

- [1] 许雅楠, 黄在堂, 孙艳雷, 陈美贤. 数学运算核心素养视角下的“三角函数”试题分析——以 2016-2020 年五年天津高考理科数学试卷为例[J]. 数学教学通讯, 2022(6): 32-35.
- [2] 黄浩宇. 核心素养视角下高考数学试卷研究[D]: [硕士学位论文]. 合肥: 合肥师范学院, 2021.
- [3] 樊双. 核心素养视角下的高考试题分析——以 2021 年新高考 I 卷“三角函数”为例[J]. 数学之友, 2022, 36(24): 95-97.
- [4] 刘志凤, 李珂, 张玉环. 核心素养视角下 2020、2021 年 14 套高考数学试卷的比较分析[J]. 中学数学教学参考, 2022(13): 62-66.
- [5] 王建华. 核心素养视角下初中学生数学运算能力培养[J]. 数理天地(初中版), 2022(24): 18-20.
- [6] 张玉环, 周侠, 陈爽. 核心素养视角下中法高考数学试题的比较研究——基于 2015-2020 年中国和法国高考数学试卷[J]. 数学教育学报, 2021, 30(1): 42-48+73.