

HPM视角下中学数学可视化教学设计与实践

——以“球的体积公式”为例

周慧敏, 陆海华

南通大学理学院, 江苏 南通

收稿日期: 2023年4月25日; 录用日期: 2023年5月23日; 发布日期: 2023年5月31日

摘要

HPM视角下的数学教学的基本方法就是借鉴历史、重构历史、追求自然的发生教学法。“可视化”是指通过可以觉察的视觉方式将思维进行外化呈现的方式。在教学中, 通过可视化的载体建构模型, 结合学生的认知结构, 促进学生形成清晰明确的知识结构。本文从HPM的视角下重新对球的体积内容进行整合, 以可视化的方式呈现, 探索符合学生认知规律且顺应球的体积历史发展规律的教学设计并付诸于教学实践, 采用借鉴、重构历史的方式, 让数学史自然而然地融入到球的体积的教学过程中去。

关键词

HPM, 可视化, 球的体积, 教学设计, 教学实践

Teaching Design and Practice of Mathematics Visualization in Middle School from the Perspective of Mathematics History and Mathematics Education

—Taking the “Volume Formula of a Ball” as an Example

Huimin Zhou, Haihua Lu

School of Science, Nantong University, Nantong Jiangsu

Received: Apr. 25th, 2023; accepted: May 23rd, 2023; published: May 31st, 2023

Abstract

The basic method of mathematics teaching from the perspective of HPM is to draw on history, re-

construct history, and pursue the occurrence of nature. "Visualization" refers to the way in which thoughts are externalized through perceptible visual means. In teaching, through the visual carrier construction model, combined with students' cognitive structure, promote students to form a clear and definite knowledge structure. This paper re-integrates the volume content of the ball from the perspective of HPM, presents it in a visual way, explores the teaching design that conforms to the laws of students' cognition and conforms to the historical development law of the volume of the ball, and puts it into teaching practice, and adopts the method of borrowing and re-constructing history, so that the history of mathematics can be naturally integrated into the teaching process of the volume of the ball.

Keywords

HPM, Visualization, Ball Volume, Instructional Design, Instructional Practice

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)》中提出了六大数学学科核心素养,并指出在数学核心素养培养过程中要注重数学文化的渗透;并要求教师在教学中应有意识地结合相应的教学内容,引导学生了解数学的发展历程,感悟数学的价值[1]。数学史融入数学教学的研究是数学教学研究的重要组成部分,是 HPM (History and Pedagogy of Mathematics, 数学史与数学教育)领域的重要方向之一[2]。

HPM 视角下的数学教学的基本方法就是借鉴历史、重构历史、追求自然的发生教学法[3]。本文从 HPM 的视角下对球的体积内容进行整合,探索符合学生认知规律且顺应球的体积历史发展规律的教学设计,采用借鉴、重构历史的方式,让数学史自然地融入到教学过程去。

2. 可视化教学的内涵

“可视化”来源于英语“visualization”,是指通过可以觉察的视觉方式将思维进行外化呈现的方式。在教学中,往往通过可视化的载体建构模型,结合学生的认知结构,促进学生形成清晰明确的知识结构。教师可以为学生呈现直观化的知识,使得学习内容艺术化,加深学生对知识的掌握程度;通过对学生学习数据的分析,优化“教”的过程,为学生提供个性化的指导;将其作为一种评价学生的手段,进行总结性评价和过程性评价[4]。

尽管不同的学科对“可视化”有着不同的理解,其实质都是通过深入浅出的方式,用更加直观的手段,帮助人们理解事物的本质和事物之间的联系。可视化教学在历经传统教学时代的板书、信息时代的幻灯片,到如今的网络媒体时代,其内涵、环境、模式等都已发生变化。归根结底,可视化教学的任务始终是将抽象的教学内容具体化,将相应的教学活动内化为学习者认知结构。

3. HPM 视角下的可视化教学设计

立体几何主要研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系,学生通过探索和认识空间几何体的结构特征以及对基本图形位置关系的判定、性质的探索,获得立体几何知识,发展几何直观、空间想象和逻辑推理能力,提升直观想象素养。直观性与形象性是可视化教学的最大特点,这与立体几何的教学目

标不谋而合。

从知识上讲,球是一种高度对称的基本空间几何体,同时它也是进一步研究空间组合体结构特征的基础;从方法上讲,提供另外一种求空间几何体体积的思想方法;从教材编排上,更重视学生的直观感知和操作确认,为螺旋式上升的学习奠定基础。课程标准中指出,学生要知道球的体积公式,能用公式解决简单的实际问题。在教学提示中特意指出,教师可以使用信息技术、探究活动、几何学发展的历史资料等合理安排教学。因此,球的体积公式的教学“可视化”,将结合球的特殊性、高中生的特点以及课程标准的培养目标,从教学目标、教学内容、教学过程等三个方面展开。

3.1. 教学目标可视化

根据高中生的培养定位以及年龄特点,教学目标的可视化是让学生快速、明确地理解学习目标,提前进入学习状态的有效教学手段。HPM 不仅可以为教学目标的设计指明方向,其真实性也可为教学目标的合理性提供参照标准[5]。通过创设数学史的问题情境,采用 GeoGebra 软件展示图象的形成过程,让学生在情境中产生疑问,使教学目标可视化,让学生提前感受球的体积的“模样”,明确这门课最终要完成的学习任务,带着任务去推导公式,让教和学都可以有的放矢。

教学目标即是“学习目标”,完成目标的第一步是找出《九章算术》中的错误结论,理解牟合方盖的设计过程;第二步是掌握祖暅原理的实质,利用祖暅原理构造新的几何体,体会用已知探索未知的思想;最终通过利用图形理解和解决球的体积问题,建立数与形的联系。掌握球的体积公式及其推导过程作为本节课的重要目标,学生在进行球的体积公式的推导时,需要掌握以下几个知识点:理解祖暅原理的实质——几何体在同高处的截面积相等,熟悉柱体、锥体的体积公式并构造新的几何体。在此过程中,合理渗透数学史,小组成员之间通力协作推导球的体积公式,培养空间想象能力和逻辑推理能力,发展逻辑推理素养和直观想象素养。

3.2. 教学内容可视化

本节内容出自人教 A 版普通高中数学教科书必修二第八章立体几何初步第三节简单几何体的表面积和体积[6]。考虑到授课班级学生为高中生,如果采用普通的讲授方式,如直接告知学生球的体积公式,势必收效甚微,不仅无法让学生理解公式的由来,甚至会引起学生反感。因此,针对高中生已有的认知结构和知识结构,对于球的体积公式的推导过程采用视听、实践两个“可视化”步骤,收效显著。

理论知识的“可视化”,是实现教学目标的第一步,同时,它也是将教学内容与课程标准相对接的关键一步。视听,即利用网络媒体和 GeoGebra 软件,选取动画和声音相结合的视频资源,将《九章算术》中的结论、牟合方盖可视化,利用动态几何画板软件操作将祖暅原理可视化,生动地展现球的体积的发展过程,契合学生的兴趣点。

在实践教学方面,动手操作是球的体积公式“可视化”教学的实现方法之一。由于在操作过程中,学生会有一定困难,因此,GeoGebra 软件本身作为可视化媒介,对于知识的呈现起到至关重要的作用。教师通过几何图形截面面积的变化,提示学生学会观察面积关系,结合柱体、锥体的截面面积变化特征,发现同高处的球体、柱体、锥体的面积关系。为验证学生是否理解到位,在“实践”步骤,通过学生小组合作利用柱体、锥体去构造新的几何体,考查学生是否能将球体、柱体、锥体的体积联系起来,从而验证“视听”步骤的有效性。通过观察学生的操作过程,以此判断其对祖暅原理的实质模糊的地方,教师进一步启发,加深学生对祖暅原理的理解。学生将未知的球体转化为已知的几何体,直观感知祖暅原理的实质,感受数形统一的辩证性,感悟转化的数学思想,发展直观想象素养。

3.3. 教学过程可视化

可视化教学依托视觉表征优势, 借助于图像、动画等视觉符号将数学对象进行封装, 相比文字符号等更形象、更直观、更富有表现力。教学过程可视化, 即将教学过程转化为学生的学习过程, 通过学生每个环节的学习情况, 将学习成果可视化, 从而实现每一个过程的学习目标。

复杂的数形关系和多变的几何位置关系是本节课学习的一大难点, 因此需要构建动态联系的视觉化情境, 让学生在动态演示中找寻规律。在理解刘徽所设计的牟合方盖时, 仅用语言表述“当一正立方体用圆柱从纵横两侧面作内切圆柱体时, 两圆柱体的公共部分就叫牟合方盖”, 学生会不明所以, 若利用 GeoGebra 软件中的 3D 绘图区将立体图形进行动态呈现, 构建“所见即所得”的学习情境, 形成数学“可见形式”与“抽象形式”的联系通道。如图 1 所示, 利用软件实现从静态到动态的转化, 不仅有助于学生认识“牟合方盖”, 更可有效推进球的体积的深度学习。

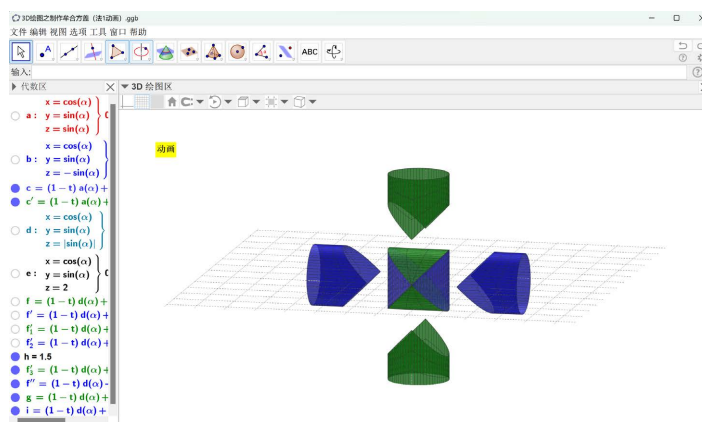


Figure 1. Visual presentation of the square cover
图 1. 牟合方盖的可视化呈现

在对祖暅原理进行可视化呈现时, 3D 绘图区的立体图形帮助学生球的体积与圆柱、圆锥的体积关系整体把握, 利用平面视图中的数值刻画可以使学生观察入微, 如图 2 所示, 通过“启动动画”操作按钮将祖暅原理中“几何体在同高处的截面积相等”的实质可视化, 不仅有效突破本节课的教学难点, 亦可有效推进“幂势既同, 则积不容异”的深度学习。

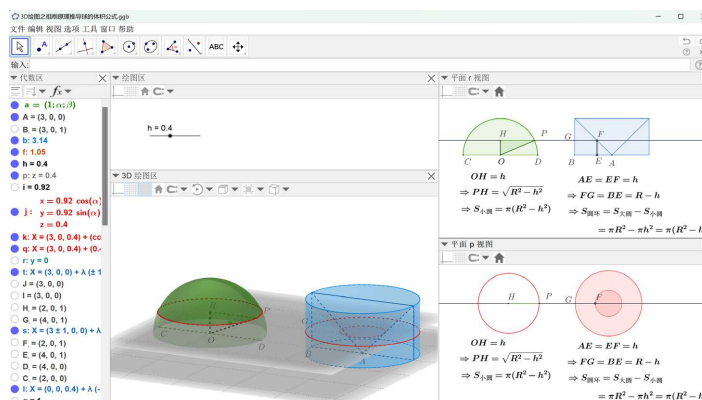


Figure 2. Visual demonstration of Zu Wei's principle
图 2. 祖暅原理的可视化演示

4. HPM 视角下的可视化教学实践

4.1. 设计思路

球是一种高度对称的空间几何体, 是高中数学中研究空间组合体结构特征的基础, 在实际生活中有着广泛的应用。教材中利用“极限”的思想推导出球的体积与表面积公式, 在探究与发现中介绍了祖暅原理。祖暅原理不仅可以让学生理解柱、锥、台的体积为何与侧面形状无关这个问题, 还可以用来推导球的体积公式, 学生更易理解球的表面积公式的推导。因此, 本设计将改变原有的课时安排, 单独用一节课来介绍球的体积公式推导的发展历程, 学生们可以理解数学家们的思想, 对空间几何体的体积有更深的理解。教学设计流程如图3所示。

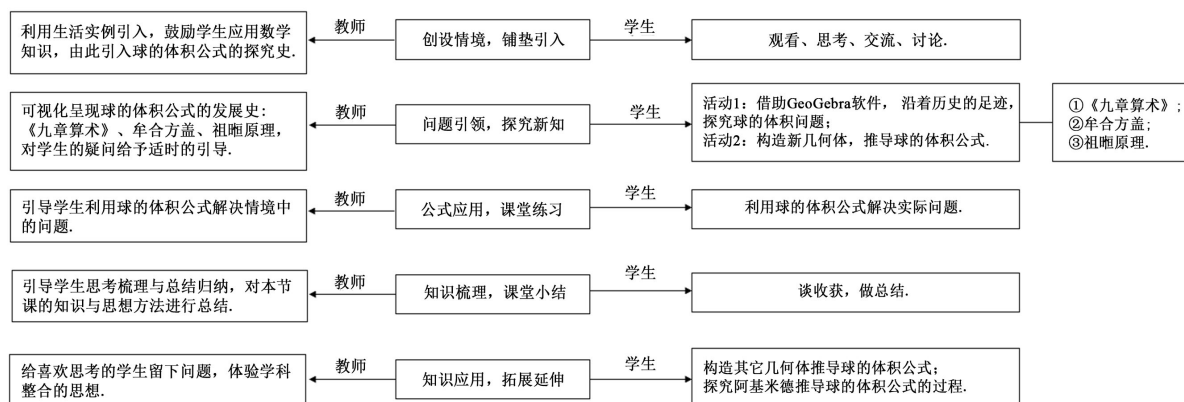


Figure 3. Instructional design flow chart

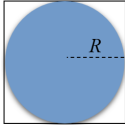
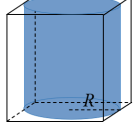
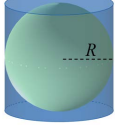
图3. 教学设计流程图

第一, 创设情境, 铺垫引入。针对本节课的内容, 利用生活实例设置情境引入新课, 培养学生发现问题、解决问题的能力, 渗透“实践第一”的思想。

第二, 问题引领, 探究新知。在给出《九章算术》中球体积的相关公式后, 如表1所示[7], 引导学生探究球的体积公式是有误差的, 请学生帮古人修正公式中的系数。

Table 1. Conclusion of Chapter 9 Arithmetic

表1. 《九章算术》的结论

图形			
面积/体积比	$\frac{S_{\square}}{S_{\text{正方形}}} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{V_{\square\text{柱}}}{V_{\text{正方形}}} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{V_{\text{球}}}{V_{\square\text{柱}}} = \frac{\pi}{4}$

刘徽根据由已知立体解决等高的未知立体的体积的思想设计出牟合方盖[8], 如图4所示。

祖暅从计算“牟合方盖”的体积来突破, 推导出球的体积公式[10]。在推导公式时, 分解问题、针对引导、及时概括, 让学生发挥空间想象能力, 构造新几何体, 如图5所示。利用 GeoGebra 软件可视化演示, 帮助学生理解“几何体在同高处的截面积相等”, 有效突破本节课的教学难点。

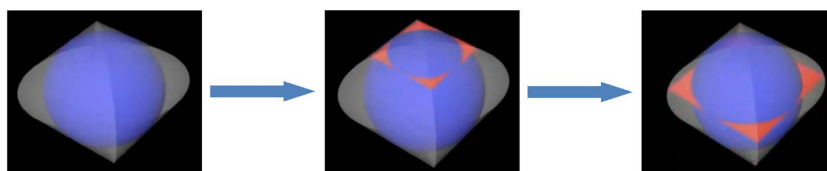


Figure 4. The formation process of the square cover
图 4. 伞合方盖的形成过程



Figure 5. The process of constructing new geometry
图 5. 构造新几何体的过程

第三, 公式应用, 课堂练习。以层层递进的例题设计为学生的思维搭架子, 学生可体验应用球体积公式解决问题的乐趣。

第四, 知识梳理, 课堂小结。让学生思考梳理与总结归纳, 对本节课的知识与思想方法有更好的理解和认识, 如图 6 所示。

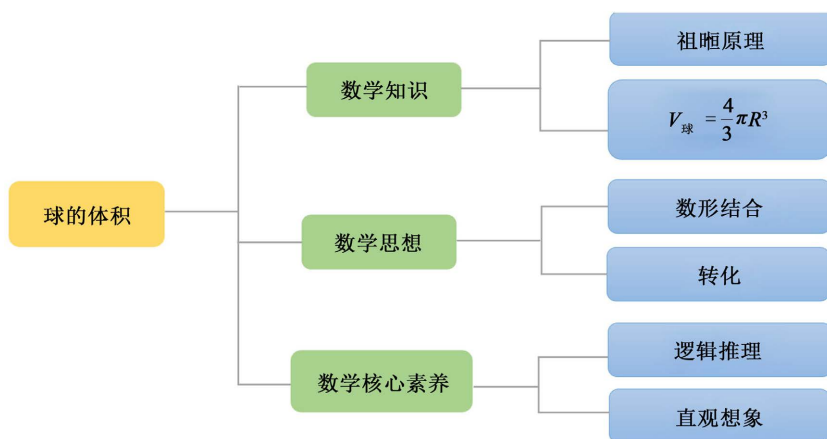


Figure 6. Lesson summary
图 6. 课堂小结

第五, 知识拓展, 课堂延伸。给喜欢思考的学生留下问题, 学生可以体会物理数学的相互支撑促进作用, 体验课改中学科整合的思想。

4.2. 教学效果分析

数学史是数学教学的指南[9]。本节课将数学史渗透于球的体积公式的推导过程, 使球的体积公式的教学自然发生, 学生可以感受新建构过程及其应用价值, 体会数学文化的博大精深与数学思想的深邃, 发展数学核心素养。

实践证明, 利用可视化工具将数学史融入数学课堂教学, 学生更容易认识公式发展的来龙去脉, 感

受到球的体积公式是历史发展的产物。通过《九章算术》、牟合方盖、祖暅原理推导出球的体积公式, 学生从中体会到数学知识的起源与发展, 构建“知识之谐”。学生合作探究发现《九章算术》中的错误结论, 营造“探究之乐”, 借助圆柱与圆锥推导出球的体积公式, 利用动态几何画板可视化对其进行验证, 彰显“方法之美”。学生经历公式的推导过程, 培养逻辑推理和直观想象素养以及创新意识, 实现“能力之助”。通过球的体积公式的历史源流、不同时空数学家的贡献, 展示了数学的“文化之魅”。球的体积公式经历缓慢而艰辛的产生和发展过程, 既有助于学生树立动态的数学观, 又揭示了公式背后所蕴含的数学家的理性精神, 达成“德育之效”。

5. 结论与建议

本研究从学生的认知起点出发, 借鉴并重构球的体积公式的发展历史, 凸显其发生发展过程, 将抽象的立体图形可视化呈现, 使学生在知识结构中建立形与数的动态联系, 发展数学核心素养。经过可视化加工后的数学内容生动形象、浅显易懂, 可以促进学生的数学理解, 但可视化只是手段和工具, 重要的是从促进学生对数学本质的理解和数学思想方法的感悟角度去实施可视化。因此, 以课本内容为基础, 以课程标准为指南, 借鉴并重构数学史, 在最近发展区内扩展学生学习的边界, 才能真正实现高阶思维的发展。

此外教师需注意, 真正影响教学效益的, 并非可视化技术本身, 而是可视化技术、数学内容、教学方法的融合。因此教师需要充分考虑具体内容的教学及课堂情境, 围绕可视化技术与知识的发展史来设计, 从促进学生的学、促进学生对数学本质的认识和数学思想方法的感悟出发去设计和实施教学, 实现深度学习的目标。

基金项目

国家自然科学基金项目(11501309); 2023 年江苏省研究生实践创新项目“单元教学促进高中数学深度学习的实践研究”。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 汪晓勤, 王苗, 邹佳晨. HPM 视角下的数学教学设计: 以椭圆为例[J]. 数学教育学报, 2011, 20(5): 20-23.
- [3] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [4] 张金磊, 张宝辉, 刘永贵. 数据可视化技术在教学中的应用探究[J]. 现代远程教育研究, 2013, 126(6): 98-104+111.
- [5] 钟志华, 周美玲, 郝蕊. HPM 视角下的函数概念教学设计[J]. 数学教学通讯, 2021(9): 7-10.
- [6] 人民教育出版社课程教材研究所. 普通高中教科书数学必修第二册(A版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2019: 118.
- [7] 白尚述. 《九章算术》注释[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
- [8] 克莱因. 西方文化中的数学[M]. 张祖贵, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2006.
- [9] Fauvel, J. and Van Maanen, J. (2000) History in Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [10] Tzanakis, C. (2000) Presenting the Relation between Mathematics and Physics on the Basis of Their History. In: Katz, V.J., Ed., *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*, The Mathematical Association of America, Washington, 28-30.