

逆向思维在解决数学问题中的运用

李程伟, 刘 君

北华大学数学与统计学院, 吉林 吉林

收稿日期: 2023年4月27日; 录用日期: 2023年5月24日; 发布日期: 2023年5月31日

摘 要

由于当代人对文化教育事业的认知度增加, 反向思维便是某种和正向思维恰恰相反的思维方式逐步在教學研究中广泛应用。特别是在数学这一课程中, 绝大多数中学都开始培养学生从数理逻辑结论揭秘原因的技能, 这一技能便是逆向思维能力。借助反向思维方式开展数学的教學活动可以令学生愈发体会到数学的别具一格之处, 因此学生理应学会充分利用这一思维模式解决数学中的疑难问题。

关键词

逆向思维, 数学解题, 应用

Application of Reverse Thinking in Solving Mathematical Problems

Chengwei Li, Jun Liu

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

Received: Apr. 27th, 2023; accepted: May 24th, 2023; published: May 31st, 2023

Abstract

Due to the increasing awareness of contemporary people's understanding of culture and education, reverse thinking is a way of thinking that is the opposite of positive thinking and is gradually widely used in teaching and research. Especially in the mathematics course, most middle schools have begun to develop students' skills to reveal the reasons from mathematical logic conclusions, which is reverse thinking ability. Teaching mathematics with the help of reverse thinking can make students more and more realize the unique features of mathematics, so students should learn to make full use of this thinking mode to solve difficult problems in mathematics.

Keywords

Reverse Thinking, Mathematical Problem Solving, Application

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

中学生早已逐步构成了己身的主观因素, 面对数学难题时也会有他们自己的数学观念, 这就致使中学生在试图破解某些数学疑难问题时可能会产生思维定式, 造成中学生认知逻辑能力发展深受制约, 高中数学教师课堂教学进程中, 要进一步深化学生认知逻辑系统的锻炼, 使得学生从逆向思维逻辑层面做出求解, 摒弃学生惯用的思维定式, 提高学生的数学解题本领, 进一步强化学生对高中数学疑难问题的认知, 培植出符合国家需求的高技术创新型专业高级人才。

2. 正向思维

思维的方式反映了人们大脑的运行机制, 影响着人们的言行举止, 它的变化与发展影响着社会的进步与发展[1]。早在 2000 多年前, 孔子就曾提到过, 死记硬背而不思考不理解, 就做不到活学活用、融会贯通, 即使记忆力再好成绩也不会太好, 只是善于思考而没有学习的行动, 即使逻辑思维能力强也会因为知识积累的匮乏而限于空想失败。可见古人早已意识到思维与学习之间密不可分的关系。最早出现的思维方式就是正向思维, 也称顺向思维或常规性思维。正向思维是一类常规性的、传统的思维形式, 指的是大家按照自上而下, 由近及远、从左到右、从可知到未知等一般而言的线性方向做出探究问题的思维途径[1]。

在破解数学难题时, 大家常常惯于遵循旧式的、常规性的观念途径去实施探求, 这就是指正向思维观念。倘若此种常规性的思维模式对其他相象的、特殊的结构性问题催生了相当强烈的认知, 就会演化成定向思维认知。世人难免利用某些数学解题方式或分析方法来加强此种思维定势[2], 使之根深蒂固, 从而利用思维定势的积极面, 使得很多数学问题得以快速高效地解决。

当然, 这种正向思维方式存在其弊端。长期地、单一地采用这种传统的思维方式, 容易形成单一化、模式化的思考问题趋势, 会导致思维僵化, 不易变通, 创造能力和创新思维也有所降低。可见, 正向思维具有一定的局限性。

3. 逆向思维

对于那些很难从已知条件出发, 即按照常规逻辑的思维序列方向很难解决或根本无法解决的问题, 仅仅运用正向思维可能已经无法解决现有的问题, 此时另一种思维方式——逆向思维应运而生。因此, 逆向思维的内涵是在正向思维内涵的基础上衍生而来的[3]。

郑君文、张恩华在《数学学习论》[4]中明确指出: 反向思维是指在剖析、破解数学难题进程中, 可以灵活转换思维方向, 从常规思维的相反方向出发进行探索的思维方式, 比如正向思维无法解决问题时可反其道而行采取逆向思维, 直接证明有困难时可采用间接证明。

任樟辉在《数学思维论》[5]中认为, 逆向思维是沿着事物发展轨迹回溯探究, 也就是从结论出发, 启发式探寻前提条件与论断对应关系, 这是与正向思维朝向恰恰相反的思维模式, 是逆着逻辑系统的常

规性实施逻辑推理的方法手段。

3.1. 逆向思维的特点

3.1.1. 普遍性

逆向思维作为一种应用广泛的思维方式, 体现在实际生活中的诸多领域[5]。其中, 很多自然科学中的推导和证明都离不开逆向思维的运用, 例如数学、物理、化学等科目。此外, 随着社会生活的不断进步, 逆向思维在投资理财、医学和广告领域也极其重要。

3.1.2. 批判性

正向思维是相对常规的、传统的思维方式。与正向思维恰恰相反, 逆向思维是对习以为常的惯例、常识、经验等的疑问与挑战, 有助于打破思维定势, 提出新的观点或问题, 便于改变过分依赖经验或习惯而导致的僵化的认识模式。

3.1.3. 新颖性

我们循规蹈矩地按照正向思维去思考问题, 往往会有两种情况: 一是难以解决问题; 二是可以解决问题, 但其解决思路与方案缺乏新意, 很难实现解题上的创新与突破。而运用逆向思维恰当地分析、解决问题, 往往会有茅塞顿开、焕然一新的感觉。

因此, 我们在尊重正向思维的逻辑性和合理性的同时, 更应该重视逆向思维在解决问题时的潜在可能性。

4. 正向思维与逆向思维的关系

在数理逻辑中, 反向思维与正向思维彼此间是对立统一的。再者, 正向思维与反向思维是对立的。从逻辑推理的路径角度来讲, 正向思维是由可知前提条件逻辑推理到论点的过程; 逆向思维则大多是从结论入手, 逐步逆向推理论证, 理清结论与条件之间的逻辑关系, 进而顺利解题。另一方面, 正向思维与逆向思维是统一的[6]。逆向思维是在正向思维概念的基础上形成的, 当然, 逆向思维过程中也往往体现着正向思维, 比如在运用分析法思考问题时, 通常先逆向考虑问题, 理清解题思路, 随后需借助综合法, 将解题过程按照逻辑的正常顺序呈现出来。这两种思维方式在数学学习中相辅相成, 共同影响着学生逻辑思维的发展。然而, 在学习中学生往往习惯于正向思维, 弱化了逆向思维的应用, 因此教师应该善于引导学生形成逆向思考、反向推理的习惯, 引导学生在解题时根据具体的问题情况, 运用合适的思维方式去分析思考问题, 最理想理清思路并解决问题[7]。

在数学中, 解题即“解决问题”, 准确地讲就是寻求数学问题的答案, 这里的答案在数学中也可以叫做“解”, 因此解决数学问题的过程就是一种找出数学问题的解的活动。

数学解题中的两个解题要素分别是已知条件与结论, 条件是已知的信息或解题依据, 结论是未知的、待求解的问题, 而解题过程就是已知条件与未知结论之间的桥梁为了全面、科学地对高中生基于逆向思维的解题情况进行调查研究, 并有针对性地总结出运用逆向思维解题的方法或策略, 笔者以思维发展理论、波利亚解题理论、元认知理论以及建构主义理论等作为理论基础, 开展基于逆向思维的现状调查与解题研究。

4.1. 培养逆向思维的重要性

4.1.1. 培养逆向思维有助于高中学生对专业学科知识的切身感受。

高级中学时代的学生对于数学课程的感知尚且保持在低级的发展阶段, 届时他们对数学的探知水平就是自身对数学基本概念的认知程度[8]。值此时期, 有关于概念的研习是学生习得数学的着力点。不断

提升他们对数学基本概念的认知水平就能大幅增加高中数学的总体教学水平。在高中数学课堂教学研究中通过反向思维模式可强化学生对数学基本概念涵义的认知和掌控, 切身感受某些概念的实际用处, 能够为学生在未来研习更高难度的数学知识和方法论奠定扎实的根基。

4.1.2. 逆向思维有助于提高学生剖析问题的本领以及拓展想象空间。

在中学数学教学中, 反向思维大多应用在解题进程中。学生在做数学题目的时会自由选取双向思维的方式方法[9]。在高中数学教研当中, 建议学生洞悉诸多对立统一的公理、运算公式等深化双向逻辑思维能力的发展, 这也是一类启发式思想在数学教学中的应集成反映。不仅如此, 教员在开展数学课堂教学时, 具体来说会从基本概念着手对学生实施引导, 届时学生已然把握概念内容, 再指导他们如何借助逆向思维完成探索, 如此就能够防止学生被固定思想方法制约, 不断提升他们对数学问题的洞察力和计算能力, 以此提高学生们的解题水平。

4.1.3. 逆向思维有助于提升学生的创新能力。

现阶段不少学生依赖使用固有的思想方法去剖析解决问题, 喜欢用原本掌握的认知方法去解决困难, 但并非绝大部分的问题能够借助此种观念去化解, 因此指导教师务必帮助学生养成遇到困难学会借助反向思维观念去破解难题的习惯, 让学生们会从不同的视角去审视问题[10]。经由此种途径可以使他们愈发得心应手地破解问题。让中学生在正视问题时可以从不同的维度去思考, 能够自由选取最优的手段使问题得已解决。在中学生建构出此番思想后, 一般来说便会基于某一道题催生出多种各异的解题策略, 进而大幅增强学生的解题能力[11]。

5. 逆向思维在解题中的运用

5.1. 针对逆用思维解法

要充分依托概念的描述, 对其实施逆向思维的灵活运用, 从而实现化简问题的实际效果[12]。

例 1 已知对 $|2-a|-|a-6|$ 进行化简得出 $2a-8$ 求 a 的取值范围。

若想高效率地求解出这道数学题目, 需要充分运用逆向思维的分析方法, 借以做到绝对值概念的逆用, 根据题目的理解可以得出 $|2-a|-|6-a|=|2a-8|$, 与此同时运用逆推思维方式得出 $2-a \leq 0, 6-a \leq 0$, 由此可以得出最终解 $2 \leq a \leq 6$ 。

相比之下逆用推论还是逆用公式, 均在正向利用概念和表达式做题受到阻碍时能够发挥作用的, 对公式和定义、定理等的反向建构, 通常能弱化解题难度, 还可以致使学生拓展思维空间, 使学生受益匪浅。

5.2. 反证法和正难则反

利用反证法解决相关问题在高中数学中, 针对数学命题公理的证明方式方法核心有直接法与间接法, 其区分界定依照主要是针对其所证明的对象。

例 1 求证 $\sqrt{2}$ 是无理数

何不先预设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则普遍存在互素的整数 a, b 致使 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, 即 $a = \sqrt{2}b$, 则 $a^2 = 2b^2$, 故而 a^2 是偶数, 所以 a 必是偶数, 故设 $a = 2k$ (k 为正整数), 由此有 $4k^2 = 2b^2$, 所以 $b^2 = 2k^2$, 如此可得 b^2 也是偶数, 那么 a^2 与 b^2 都是偶数, 这与 a, b 互素的预设相对立, 因此假定不成立, 而 $\sqrt{2}$ 是无理数的论点成立。

5.3. 运用正难则反解决问题

正难则反是做题进程中一类首要的思维方式, 当碰到的难题从正向思索难以化解时, 能够借助于反

向思维, 从问题的反面出发, 逆向利用专业知识来解决困难[13]。

例 1 设有两个实数 a 和 b , 若 $a^2 + b^2 = 0$, 则 a 和 b 必须同时为零。

证明: 设 a, b 至少存在一个不为 0, 则有 $a^2 + b^2 > 0$, 这与可知对立冲突, 因此推论不成立, 原论点成立, 即 $a = b = 0$ 。

正因如此, 借助利用逆向思维, 能够解决用常规正向思维无法成功化解的难题, 通过运用正难则反的方法, 常常可以精简对问题的解析, 进而开辟出新的求解问题的途径[14]。

总之, 在平时教学中要深挖教材, 引导学生认知逆向思维在解答高中数学命题中的作用, 多找点顺逆方法论的习题来以此强化训练, 侧重于发展学生逆向思维的技能, 对培育创造型人才毫无疑问是极为关键的。

参考文献

- [1] 舒春阳. 高中生数学逆向思维能力的调查研究[D]: [硕士学位论文]. 沈阳: 沈阳师范大学, 2021. <https://doi.org/10.27328/d.cnki.gshsc.2021.000589>
- [2] 曹金敏. 浅谈数学证明中的反证法[J]. 现代交际, 2010(12): 162.
- [3] 谈敏. 逆向思维在高中数学解题中的一些应用[J]. 语数外学习(数学教育), 2013(12): 72.
- [4] 董向东, 李瑞霞. 浅谈初中学生逆向思维能力的培养[J]. 中学数学教学参考, 2020(Z3): 52-53.
- [5] 雷彩. 基于逆向思维的高中数学解题研究与实践[D]: [硕士学位论文]. 石河子: 石河子大学, 2022. <https://doi.org/10.27332/d.cnki.gshzu.2022.000116>
- [6] 郑辉龙, 姚丽萍. 数学思维能力培养系列谈③正向思维与逆向思维[J]. 福建教育, 2014(15): 34-36.
- [7] Hu, C.G. and Li, H. (2022) Reverse Thinking: The Logical System Research Method of Urban Thermal Safety Pattern Construction, Evaluation, and Optimization. *Remote Sensing*, **14**, 6036. <https://doi.org/10.3390/rs14236036>
- [8] 赵忠伟. “倒过来看世界”——浅析逆向思维在高中数学解题上的应用[J]. 数学学习与研究, 2020(10): 146-147.
- [9] 孙永增. 浅谈高中数学教学中学生创新能力的培养[J]. 数学大世界(教学导向), 2012(8): 49.
- [10] 廖洪波. 浅谈新课程标准下高中数学教学中学生创新能力的培养[J]. 全国商情(理论研究), 2011(2): 99.
- [11] 徐洁. 逆向思维在高中数学解题教学中的应用[J]. 中学数学, 2022(11): 67-68.
- [12] 罗静彦. 浅谈高中数学教学中学生逆向思维能力的培养[J]. 数学学习与研究, 2017(7): 61
- [13] 徐奋. 高中数学解题中“正难则反”思想的应用[J]. 数理天地(高中版), 2022(11): 56-57.
- [14] 刘晓翠. 数学解题中的正难则反思想及其教学实践研究[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 湖南师范大学, 2014.