

# 《泛函分析》教学的几点思考

晁锦涛, 徐洁琼\*

广西大学数学与信息科学学院, 广西 南宁

收稿日期: 2023年5月9日; 录用日期: 2023年6月7日; 发布日期: 2023年6月14日

## 摘要

《泛函分析》是数学专业的一门基础课程。在数学相关专业本科生的培养中起到重要的作用。本文探讨了《泛函分析》教学过程中遇到的一些问题, 并分析了原因, 最后针对如何提高课堂教学效果分别对学生和任课教师给出了相关建议。

## 关键词

《泛函分析》, 教学方法, 教学改革

# Reflections on the Teaching of *Functional Analysis*

Miantao Chao, Jieqiong Xu\*

School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi

Received: May 9<sup>th</sup>, 2023; accepted: Jun. 7<sup>th</sup>, 2023; published: Jun. 14<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

*Functional Analysis* is a fundamental course in mathematics. It plays an important role in the cultivation of undergraduate students majoring in mathematics. This article explores some problems encountered in the teaching process of *Functional Analysis*, and analyzes the reasons, and finally, some suggestions are given to students and teachers on how to improve classroom teaching effectiveness.

## Keywords

*Functional Analysis*, Teaching Method, Teaching Reform

\*通讯作者。



## 1. 引言

《泛函分析》是数学专业的一门基础课程。在数学相关专业本科生的培养中起到重要的作用。本文探讨了《泛函分析》教学过程中遇到的一些问题,并分析了问题出现的原因,最后初步给出了解决方案。关于《泛函分析》课程建设和教学改革,国内外已有相当多的研究。此处仅列举一些近期的国内文献。代国伟和刘舞龙探讨了将五步学习法引进到《泛函分析》教学过程中,以帮助学生提高学习《泛函分析》的能力和自信,并达到较好的教学效果[1]。方莉等以西北大学数学学院《泛函分析》课程的思政教育改革为例,阐述了地方综合院校数学专业基础理论课程挖掘思政要素的几种教学思路[2]。陈正争结合自身的教学实践,从选择合适的教材、优化教学内容、改进教学方法和手段以及注重应用实例教学等方面提出了《泛函分析》课程教学改革的几点建议,以提高教学效果[3]。赫海龙分析了学习者在使用国内常用《泛函分析》教材学习时产生主要困惑的原因,并给出若干教材与教学方法上进行改进的建议,并探讨了相关数学物理背景的介绍在教学中的重要性[4]。吴正等通过对《泛函分析》课程的特点分析,从优化教学内容,改进教学方法,加强课后练习与辅导等方面,提出《泛函分析》教学改革的设想与建议[5]。杨子亮探讨了 HPM 视角下的《泛函分析》个性化教学,把《泛函分析》课堂教学和数学史统一整合,反映前沿性和时代性[6]。这些研究从教材、教学内容选择和思政教学角度对《泛函分析》课程教学改革提出了非常有益的建议。我们在一线的教学过程中发现:《泛函分析》的教学效果很难达到一个满意的效果,大多数学生学习《泛函分析》感觉吃力。本文就《泛函分析》教学过程中遇到的一些问题进行探讨,并尝试给出解决方案。

## 2. 教学过程中遇到的问题

### 2.1. 课程内容抽象, 学习吃力

由于《泛函分析》课程内容具有高度的抽象性且注重公理化体系的建立。需综合运用到几何、代数、分析等学科。在数学各专业课程中被认为是一门很难学的课程,在学生及教师的心目中已经形成一种思维定势。所以,在教师的教学及学生的学习过程中,有一种畏难心理。

### 2.2. 课程内容丰富, 忽视先修课程在学习中的作用

《泛函分析》的理论内容非常丰富,同时其与先修课程数学分析、解析几何、高等代数、实变函数等具有密切联系。《泛函分析》很多概念及理论都可以在这些先修课程中找到具体的例子。由于很多同学对先修课程所学内容掌握不牢,同时由于课时少、课程内容丰富等因素存在。任课教师及同学往往忽视先修课程在《泛函分析》学习过程中的作用。

### 2.3. 教学资源不够丰富

《泛函分析》是数学专业一门专业基础课。不像高等数学、线性代数、概率论与数理统计等公共数学课程,网上有丰富的数学资源。《泛函分析》网上教学资源没有那么丰富。网上虽然有一些教学资源但相对较陈旧,同时不太适合授课对象的具体情况,实用性差。由于缺少传承及早期偏向板书教学,目前都没有适合的课件。如何结合教师及学生具体情况构建相关教学资源是一个需要进一步完善的工作。国家高等教育智慧教育平台有相关课程三门:西北大学孙宜民老师主讲针对本科生的《〈泛函分析〉—

一空间理论》，该课程仅涉及到空间理论部分，没有涉及算子理论内容；长安大学张太雷等三位老师主讲的《泛函分析》；青岛大学于静老师主讲针对研究生的《高等〈泛函分析〉》。上述教学资源由于选材及授课对象的不同，不一定适用于所有高校。

## 2.4. 部分同学对《泛函分析》学习不感兴趣

虽然《泛函分析》在数学学科本身以及其他科技领域有广泛的应用，但由于教学内容为纯理论，部分同学不感兴趣，甚至是不喜欢。不知道学习这种抽象的理论有什么用。如何提高学生的学习兴趣是一个急需解决的问题。

## 2.5. 教师精力有限，团队协作不足

上好一门课程需要投入大量的时间研究教材教法，同时结合课程及授课对象的特点有针对性的备课教学。不是单个教师能够从容应对的。但是在教学工作的过程中由于教师个人的科研及教学任务繁重，大家在同一门课程教学上的协作不够。

# 3. 问题的原因分析

## 3.1. 课程本身原因

《泛函分析》是综合运用几何、代数、分析的方法和观点研究分析问题，其产生的概念、定理和方法就更为广泛和深刻。这也决定了《泛函分析》具有以下特点：

1) 课程知识本身具有高度的抽象性。注重公理化体系的建立和结构分析。《泛函分析》是现代数学的基础学科之一，它是综合了代数、几何和分析等学科而形成的。将之前的相关概念代数结构及几何问题进一步抽象，使得该门课程的抽象性很强。

2) 证明方法的技巧性较强。构造性证明在《泛函分析》中非常常见，这决定了证明过程具有较强的技巧性。如要证明距离空间的完备化定理：要先构造一个距离空间，即原距离空间中的所有 Cauchy 列其全体；其次，证明原空间与新构造空间中的一个稠密子空间等距；然后，证明所构造新距离空间完备；最后，证明在等距意义下完备化空间具有唯一性。验证  $L^p (p \geq 1)$  空间的完备性及可分性时需用到 Hölder 及 Minkoski 两个证明技巧非常强的不等式。抽象性和证明的技巧性对该门课程的教和学都提出了更高的挑战。

3) 与先修课程联系紧密。《泛函分析》与数学分析、高等代数、解析几何、实变函数等课程有紧密联系。特别是空间理论及算子理论部分很多例子都需要用到实变函数的知识。实变函数本身是一门比较抽象的课程。熟悉并能应用实变函数相关知识，对大多数同学来说具有一定的挑战性。需要任课教师对先修课程有一个充分且细致的了解。同时要求同学熟悉实变函数相关知识。但由于教师的精力及教授课程限制等原因不一定能够很好的与先修课程建立起联系。

## 3.2. 学生原因

由于招生规模逐年扩大，教学班人数较多。《泛函分析》基本开设在入学后的第五个学期，学生对先修课程的掌握程度参差不齐。所以任课教师要在课堂上照顾到绝大多数同学的学习情况，很难做到因材施教。大多数同学经过几个学期的数学学习，有些同学由于前期基础没有打好，会逐渐失去对数学的学习兴趣，加上《泛函分析》课程的抽象性会影响到部分同学的学习积极性。

## 3.3. 教师原因

《泛函分析》课程设及知识面较广，对任课教师要求较高。要求任课教师对数学学科本身要有一个

比较全面的认识。但由于任课教师的知识背景及科研兴趣不一定能够非常清楚《泛函分析》在整个数学学科中的地位。同时教材版本较多, 网上很难找到合适的课件等教学资源, 需要教师投入大量的时间制作适合所选教材及授课对象的 PPT。但是由于制作 PPT 工作量大, 目前缺乏制作精美的 PPT 课件。

## 4. 教学建议

### 4.1. 对学生建议

1) 课前预习。由于《泛函分析》课时量少课程内容多的原因, 课堂教学内容多且内容抽象, 要想在课堂从容跟上任课教师的节奏, 课前预习是必不可少的环节。预习可以帮助发现课程的难点并记录自己遇到的问题, 带着问题听课, 可以很好的提高课堂听课效率。

2) 多做习题。做题的过程中, 采取先看书然后做题, 遇到实在解决不了的问题, 再回头看书, 然后再尝试解决, 采取如此反复的过程直到问题解决。通过做题检验对书本知识的理解, 通过看书发现知识的盲区。整个反复的过程就是对书本知识深入学习思考的过程。

3) 经常复习。每隔一段时间将前面所学内容重新复习一遍, 如此反复, 直至对知识完全掌握。

艾宾浩斯遗忘曲线发现人们在记忆的时候, 第一天记住的东西, 第二天就忘了一半, 第七天差不多全忘了。因此, 要对学过的知识及时复习。我们要求学生经常复习除了避免知识的遗忘, 还可以使同学们通过反复复习对大脑有一个不间断的训练, 增强自身的数学思维能力。

### 4.2. 对任课教师建议

1) 根据学生情况及教学大纲选取合适的教材。一本合适的教材对取得良好的教学效果必不可少。合适的教材有利于学生的学习, 也有利于任课教师的备课及教学。

目前, 各个高校普遍使用的《泛函分析》教材主要有: 背景应用讲的比较多的一本教材是张恭庆编著的《泛函分析讲义》(北京大学出版社)上册[7]; 刘培德编著的《泛函分析基础》(科学出版社) [8]对泛函分析基本内容阐述较为详细, 适合基础较好的学生; 另外一本, 内容十分丰富的教材是夏道行等编著的《实变函数与泛函分析》(高等教育出版社出版) [9]该书讲解细致, 适合初学者阅读; 内容相对丰富又兼具简洁的教材是刘炳初编著的《泛函分析》(科学出版社) [10]; 程其襄等编著的《实变函数与泛函分析基础》(高等教育出版社出版) [11]通俗易懂, 主要介绍了距离空间、赋范线性空间与内积空间, 以及线性算子与线性泛函的基础概念与基本定理泛函分析的核心内容。结合我校的实际情况及上述各教材的特点, 我们选用刘炳初编著的《泛函分析》作为教材。

2) 定期举行教学研讨会, 不同研究方向的任课教师团结协作讨论清楚《泛函分析》在数学学科的地位, 探讨教学教法。针对教学中的难点进行教学探讨, 提高教学效果。

例如, 我校承担《泛函分析》课程任务的老师, 有偏微分方程方向、最优化方向、概率论与数理统计方向等, 这些方向的老师可以结合《泛函分析》再各自领域的应用相互交流, 彼此丰富课堂讲课实例, 凸显这门课程的在数学领域的广泛应用。

3) 教师要不断学习, 充分了解先修课程。建立《泛函分析》知识点与先修课程相应知识点之间的联系。用旧知识帮助理解新知识。

例如, 在讲到距离空间中极限及收敛性概念的时候, 可以类比到数学分析中极限及收敛的概念, 前者是后者的推广。还比如, 在讲到距离空间完备化定理时, 定理的证明思想完全类似数学分析中实数集完备性分析。通过新旧知识的类比可以让同学更加轻松的理解新知识。

4) 采取多样化教学手段, 充分利用网络资源辅助教学。同时制作适合学情的精美 PPT 课件。我们在实践中发现, 制作精美且思路清晰的 PPT 课件, 可以很好地提高课堂的学习效果。

## 5. 总结

《泛函分析》是数学专业的一门重要基础课,是数学科研工作者必不可少的工具。加强《泛函分析》的教学改革,提高教学效果对数学相关人才培养将会起到十分重要的作用。本文探讨了《泛函分析》教学过程中遇到的一些问题,分析了相关原因。特别,针对如何提高课堂教学效果对学生及任课教师提出了相关建议。

## 基金项目

广西壮族自治区教育厅教改项目(2019JGA117);广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(2022KY1135)。

## 参考文献

- [1] 代国伟,刘舞龙.将五步学习法引入《泛函分析》教学的尝试[J].高等数学研究,2023,26(1):116-119.
- [2] 方莉,孙宜民,崔苗苗.泛函分析课程思政的教学改革探索[J].现代职业教育,2022(39):40-42.
- [3] 陈正争.泛函分析课程教学的探索与实践[J].邢台学院学报,2021,36(4):189-192.
- [4] 赫海龙.对泛函分析课程教学的若干思考[J].大学数学,2019,35(4):42-47.
- [5] 吴正,潘欣,王良龙.泛函分析教学改革探讨[J].合肥师范学院学报,2017,35(6):54-56.
- [6] 杨子亮.HPM视角下泛函分析教育的思考[J].当代教育实践与教学研究,2019(14):89-90.
- [7] 张恭庆,林源渠.泛函分析讲义[M].北京:北京大学出版社,1987.
- [8] 刘培德.泛函分析基础[M].北京:科学出版社,2011.
- [9] 夏道行,吴卓人,严绍宗.实变函数与泛函分析[M].北京:高等教育出版社,2010.
- [10] 刘炳初.泛函分析[M].第3版.北京:科学出版社,2015.
- [11] 程其襄,张奠宙,魏国强,胡善文.实变函数和泛函分析基础[M].第4版.北京:高等教育出版社,2019.