

# 基于问题链的数学概念教学设计

——以“二元一次方程组”为例

吴帆<sup>1</sup>, 周鑫<sup>2</sup>

<sup>1</sup>伊犁师范大学数学与统计学院, 新疆 伊犁

<sup>2</sup>伊犁师范大学应用数学研究所, 新疆 伊犁

收稿日期: 2023年4月28日; 录用日期: 2023年5月11日; 发布日期: 2023年6月19日

## 摘要

数学概念是筑起整个数学大厦的基石, 反映了数学对象的本质属性及内在联系。而数学概念教学则是揭示概念生成、促进学生理解概念本质的有效途径。本文以“二元一次方程组的概念教学”为例, 依据学科思维、教学目标及学生认知水平, 以层层递进的问题链漾起学生思维的涟漪, 启发学生思考, 推进教学进程, 进而提升学生的数学学科核心素养。

## 关键词

问题链, 概念教学, 二元一次方程组, 教学设计

# Mathematical Concept Teaching Design Based on Problem Chain

—Taking “System of Linear Equations in Two Unknowns” as  
an Example

Fan Wu<sup>1</sup>, Xin Zhou<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yili Xinjiang

<sup>2</sup>Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yili Xinjiang

Received: Apr. 28<sup>th</sup>, 2023; accepted: May 11<sup>th</sup>, 2023; published: Jun. 19<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

Mathematical concept is the cornerstone of the whole mathematical edifice, reflecting the essential attributes and internal relations of mathematical objects. The teaching of mathematical con-

文章引用: 吴帆, 周鑫. 基于问题链的数学概念教学设计[J]. 教育进展, 2023, 13(6): 3716-3722.

DOI: 10.12677/ae.2023.136589

cepts is an effective way to reveal the generation of concepts and promote students to understand the essence of concepts. This paper takes "the concept teaching of System of Linear Equations in Two Unknowns" as an example, and according to the discipline thinking, teaching objectives and students' cognitive level, the ripple of students' thinking is rippled by the step-by-step question chain, which inspires students to think, promotes the teaching process, and then enhances students' core literacy in mathematics.

## Keywords

Problem Chain, Concept Teaching, System of Linear Equations in Two Unknowns, Instructional Design

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

数学概念是整个数学知识体系的基础和核心[1]。正确地理解并内化数学概念,对于学生夯实数学基础,提高解题能力起着提纲挈领的作用。然而现如今概念教学还是采用“一个概念,几项注意”的方式一板一眼地进行着知识的浅层灌输,使得学生对于概念一知半解,含糊不清,对于概念的前世今生不求甚解,解题时总让自己陷入啼笑皆非的尴尬境地。追本溯源还是对概念的本质特征理解不够透彻,没有理解概念的来龙去脉。问题是数学得以发展的源头活水,如何利用问题驱动课堂教学这一话题已从最初的星星之火蔓延为燎原之势。而数学问题链教学便是这一话题催生出来的产物。唐恒钧、张维忠教授将问题链的内涵界定为教师在课外预设并在课上以多种方式呈现给学生的、有序的主干数学问题序列[2]。利用“问题链”组织数学教学过程,既能为学生提供数学学习的骨架,便于学生建构知识;又能加强数学课堂的逻辑性,将学生的思维引向数学学习的深水区,从而加深对数学概念内涵与外延的理解。本文将“二元一次方程组”为载体,设置层层递进的问题链诱发学生的深度思考,使学生体会方程思想,从而促进学生数学学科核心素养的发展。

## 2. 教学分析

### 2.1. 教材分析

《二元一次方程组》是人教版七年级下册第八章第1节的内容,属于数与代数领域的知识。在七年级上册,学生已经学习过依据实际情境中的等量关系列出一元一次方程,体会了方程是刻画现实世界等量关系的有效模型,为本节课的学习奠定了基础。本节课的学习也是后续学习三元一次方程组,用待定系数法求一次函数的解析式以及一次函数与二元一次方程两者关系的奠基石。由此,本节课的学习起到了承上启下的作用已然彰明较著。通过本节课的学习,让学生经历从问题情境中抽象出等量关系,进而建立二元一次方程组的过程,培养学生的数学抽象素养。本节课类比一元一次方程的学习路径,通过创设情境,引导学生找到题目中蕴涵的等量关系,继而列出二元一次方程组,再通过观察、概括归纳出二元一次方程组的相关概念,渐进体会方程的模型思想。

基于上述分析,我确定本节课的教学重点为学会列出二元一次方程组,理解二元一次方程组解的概念。

## 2.2. 学情分析

在此之前, 学生已经学习了一元一次方程的定义及解的含义, 经历了由实际问题列出一元一次方程的过程, 初步体会了方程是刻画现实世界等量关系的有效模型, 积累了借助方程可以解决实际问题的经验。然而这往往也会给学生学习本节课造成干扰, 一般地, 由于一元一次方程的学习已经在学生头脑中占有一席之地。所以, 当给出一个问题情境时, 学生会不由自主的设一个未知数, 列一元一次方程去解决。所以, 在学习本节课的过程中, 学生会产生困惑: 既然能够用一元一次方程解决的应用题, 为何还要多此一举, 设两个未知数列二元一次方程组去解决呢?

基于上述分析, 我确定本节课的难点是, 从问题情境中找出等量关系列二元一次方程组。

## 3. 教学目标

- 1) 经历对问题情境的分析, 能列出二元一次方程组, 归纳总结出二元一次方程组的概念。
- 2) 理解二元一次方程组解的意义, 能判断一组数是不是二元一次方程组的解。
- 3) 在分析、揭示问题情境中的数量关系, 并把实际问题转化为数学模型的过程中, 感受方程是刻画现实世界中的等量关系的工具, 体会模型思想。

## 4. 实施教学过程

### 活动一: 问题引入

问题 1: 大约一千五百年前, 我国古代名著《孙子算经》记载了一道数学趣题: “今有鸡兔同笼, 上有三十五头, 下有九十四足, 问鸡兔各几何?”

追问 1: 试着用自己的语言, 描述这一问题情境。

追问 2: 尝试用简洁的图表, 表示这一问题情境。

追问 3: 借助图表, 你能说出这一问题情境中的等量关系吗?

追问 4: 依据等量关系, 你能尝试着列出方程吗?

**设计意图:** 通过我国古代名著《孙子算经》中的一道经典例题引入, 子问题 1 让学生用自然语言阐述问题情境, 子问题 2 是让学生借助图形或者表格表达问题情境, 子问题 3 让学生说出题目中的等量关系(鸡头 + 兔头 = 35, 鸡足 + 兔足 = 94)再将此等量关系数学化, 用数学符号语言表示, 进而解决问题。子问题设计环环相扣, 层次递进, 为学生搭建解决问题的“脚手架”。读懂题意的设计亮点在于借助自然语言和或半符号语言(图形)弄清题意, 明确题目中的已知条件、未知条件以及两者之间的关系。

问题 2: 唐朝的高彦休在《唐阙史》中讲述了这样一则故事, 尚书杨损在选拔官员时出了一道数学题: 一位行人傍晚经过一片树林, 忽听得林间有人在说话, 细听方知是群窃贼在讨论分赃之事, 只听得窃贼说: 每人 6 匹, 则多出 5 匹; 每人 7 匹又少了 8 匹。试问: 窃贼共有几人? 赃物共有几匹?

追问 1: 题目中涉及的已知量是什么, 未知量是什么?

追问 2: 题目中存在怎样的等量关系?

追问 3: 你能列出哪些方程来解决此问题?

**设计意图:** 此问题与《九章算术》中的“盈不足”问题类似, 可用算术法、一元一次方程解决, 亦可选用二元一次方程组解决, 但用一元一次方程解决更为简便。通过让学生比较算术法、一元一次方程及二元一次方程组三种解法, 体会方法越简单, 思考越复杂。用算术法解最复杂; 用二元一次方程组思考简单, 解法复杂; 用一元一次方程则比较均衡。

问题 3: 中国清代算书《御制数理精蕴》中有这样一道题: “马四匹、牛六头, 共价四十八两; 马三匹、牛五头, 共价三十八两。问马、牛各价几何?”

追问 1: 说出题目中的等量关系。

追问 2: 请同学们尝试列出方程。

设计意图: 主问题 3 相较于主问题 1 和 2, 难度略显增加, 而且列出一元一次方程不容易, 倒是设两个未知数, 列二元一次方程组易如反掌, 让学生意识到学习二元一次方程组的必要性。鉴于前面设置的两个主问题, 学生已经大致清楚了解决应用题的思路, 所以此主问题下的子问题便可以直击问题的核心。

**活动二:** 探究二元一次方程的概念

问题 4: 观察前面问题 1~问题 3 所列出的方程, 你能发现它们有什么共同特征吗?

- (1)  $x + y = 35$             (2)  $2x + 4y = 94$             (3)  $6x + 5 = y$   
 (4)  $7x - 8 = y$             (5)  $4x + 6y = 48$             (6)  $3x + 5y = 38$

**设计意图:** 依据问题情境中所列出的方程, 发现它们所共有的特征, 水到渠成, 从而产生知识的“滚雪球”效应。从问题情境列出方程, 接下来自然要给他们起名字, 让它们有属于自己的标签, 即如何定义它们。但这几个方程还不足以揭示二元一次方程的本质属性, 进而接下来进行概念的进一步深化。

问题 5: 你能找到一个标准, 将下面所给的方程进行分类吗? 说说你的依据?

- (1)  $x + y = 35$             (2)  $2x + 4y = 94$             (3)  $6x + 5 = y$   
 (4)  $7x - 8 = y$             (5)  $4x + 6y = 48$             (6)  $3x + 5y = 38$   
 (7)  $y = 3x^2 + 1$             (8)  $2x + y = z$             (9)  $xy + 2 = y$   
 (10)  $\frac{1}{y} + x = 5$             (11)  $x + 5 = 8$

**设计意图:** 通过对比问题 1~问题 3 所列出的 6 个方程, 很容易归纳出它们含有两个未知数的特征, 但是对于“二元一次方程是整式方程, 且含有未知数的项的次数都是 1”会存在困难, 进而新增了(7)~(11)几个方程, 加深对于方程中“元”和“次”的理解, 以及注意“方程两边必须是整式”, 让学生对于二元一次方程概念的内涵和外延掌握清楚。

问题 6: 判断下列方程哪些是二元一次方程, 哪些不是, 并说明理由?

- (1)  $x^2 + y = 6$             (2)  $3x + y = 9$             (3)  $z + 2y - 5 = x$   
 (4)  $\frac{x-1}{2} + 5 = y$             (5)  $xy - 4 = 0$             (6)  $\frac{1}{2x} - y = 4$

**设计意图:** 通过解决问题 6, 让学生巩固二元一次方程的概念, 对方程中“元”的“次”的认识更进一步。

问题 7: (1) 若关于  $x$ 、 $y$  的方程  $x^{m+2} - y^{n-1} = 5$  是二元一次方程, 则  $m = \underline{\quad}, n = \underline{\quad}$ 。

(2)  $(k+2)xy + 9x + 5y^{n-3} = 11$  是关于  $x$ 、 $y$  的二元一次方程, 则  $k = \underline{\quad}, n = \underline{\quad}$ 。

**设计意图:** 问题 7 的设置难度递进, 通过解决问题 7, 教师可以了解学生是否真正理解并掌握了二元一次方程的概念, 学生也可以进行自审自查。

**活动三:** 探究二元一次方程的解的概念

问题 8: 请同学们回忆一下, 我们是如何学习一元一次方程的?

追问 1: 类比一元一次方程的学习顺序, 你能猜到接下来我们该学习什么了吗?

追问 2: 二元一次方程中含有几个未知数呢? 如果让你试着求出方程  $2x + y = 4$  的一个解, 你觉得你求出的解一定和其他人一样吗? 若不一样, 原因是什么呢?

追问 3: 当求解方程  $2x + y = 4$  时, 你是先给  $x$  赋值的还是先给  $y$  赋值的呢? 当  $x$  确定之后,  $y$  的值是否唯一确定呢? 当  $y$  确定之后,  $x$  的值是否唯一确定的? 你会怎么表示你求出的一组解呢?

追问 4: 参考方程的解的定义, 你能给二元一次方程的解下个定义吗?

**设计意图:** 通过设计主问题并进行追问, 让学生了解学习二元一次方程的顺序与一元一次方程的顺序是趋于一致的(方程的定义-解的定义-解方程-应用), 使学生体会类比的思想, 为今后学习其他方程埋下伏笔。问题 2 的设计让学生将求出的解与其他同学作比较, 自然而然的发现二元一次方程的解不唯一。追问 3 不仅让学生体会到二元一次方程中未知数的值是成对出现的, 且是相互联系, 相互制约的关系, 除此之外, 研究过程中还蕴含了变化的思想, 为学习一次函数做铺垫。追问 4 让学生类比方程的解的定义, 归纳、概括二元一次方程的解的定义, 提高学生的数学语言的表达能力。

问题 9: (1) 判断  $\begin{cases} x=8 \\ y=-6 \end{cases}$  是不是方程  $x+y=5$  的一个解。

(2) 请写出方程  $x+y=5$  的所有正整数解。

**设计意图:** 让学生学会判断一组解是不是二元一次方程的解的思路(将所给的解代入到方程中, 再判断方程左边和右边是否相等), 同时理解尽管二元一次方程有无数组解, 但在具体情况下, 二元一次方程的解也会成为有限个或被确定下来。

**活动四:** 探究二元一次方程组的概念

问题 10: 对于问题 3 所列出的方程,  $4x+6y=48$ ,  $3x+5y=38$ ; 你觉得未知数  $x$ 、 $y$  在这两个方程中的含义分别相同吗?

追问 1: 若相同, 你会怎么表示它们呢。

追问 2: 你能给它们起个名字吗? 说说你的理由。

**设计意图:** 通过体会鉴于  $x$ 、 $y$  在这两个方程中的含义分别相同, 因而必须同时满足两个方程, 联立得到二元一次方程组, 从而引导学生自己总结出二元一次方程组的概念。

问题 11: 判断下列方程组是否是二元一次方程组, 并说出你的理由。

$$(1) \begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+z=4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x-3y=1 \\ x=2y \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x-y^2=2 \\ x+3y=4 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x+y=6 \\ x=-1 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} \frac{2}{x}+y=4 \\ 3x+y=5 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} 2a+3b=6 \\ ab-2b=8 \end{cases}$$

**设计意图:** 通过例题辨析概念, 掌握二元一次方程组的本质属性, 其中(4)和(6)是学生出错较多的, 教师要进行点评且为学生找到错误原因并加以强调, 进一步巩固对二元一次方程组的概念的理解。

**活动五:** 探究二元一次方程组的解的概念

问题 12: 学了二元一次方程组的定义, 你能把问题 2 中的方程写成二元一次方程组的形式吗?

追问 1: 你能找到一组  $x$ 、 $y$  的值, 使其同时满足方程  $6x+5=y$  和  $7x-8=y$  吗? 和同伴分享一下你的做法。

追问 2: 由于问题 2 是实际情境中的问题, 你觉得未知数  $x$ 、 $y$  有什么限制呢?

追问 3: 类比二元一次方程的解的定义, 你能总结出什么是二元一次方程组的解吗?

追问 4: 通过比较二元一次方程的解和二元一次方程组的解, 你能发现它们有什么异同点吗?

**设计意图:** 由于前面已经学了二元一次方程的解的定义, 而且也利用问题 9 让学生明白在具体情况下, 未知数  $x$ 、 $y$  值可以是有限个或者能被确定下来, 所以学生在解决问题 12 时, 便容易想到  $x$ 、 $y$  的值必须限制为正整数。由于问题 2 中的两个方程都可以看作用含  $x$  的代数式来表示  $y$ , 且两个方程中  $y$  的含义是相同的, 即可让两个方程左边相等, 消掉  $y$  来求解, 渗透“消元”思想, 为下节课学习解二元一次方程组做准备。追问 3 让学生类比二元一次方程的解的定义, 归纳总结出二元一次方程组的解的概念。追问 4 让学生对比二元一次方程的解和二元一次方程组的解, 从而发现它们的相同点和不同点。进一步

深化对方程解的认识。

问题 13: 判断  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$  是不是方程组  $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = -9 \end{cases}$  的解。

问题 14: 二元一次方程组  $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ y = 2x \end{cases}$  的解是( )。

A.  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 4 \end{cases}$

问题 15: 已知  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$  是关于  $x$ 、 $y$  的方程组  $\begin{cases} ax + 3y = 1 \\ 2x - by = 4 \end{cases}$  的解, 求  $a + b$  的值。

**设计意图:** 问题 13 和问题 14 是让学生巩固二元一次方程组的解的概念; 问题 15 是让学生在理解二元一次方程组的解的基础上, 将未知数  $x$ 、 $y$  的值代入到方程组中, 最终转化为两个一元一次方程的求解, 进而求出参数  $a$ 、 $b$  的值, 体现了“消元”和“转化”的思想。

问题 16: 课堂小结。

(1) 本节课你学到了哪些知识?

(2) 你是怎么学习这些知识的(思想方法)?

(3) 在学习这些知识的过程中, 对于概念的理解, 要注意什么, 你在哪个地方出现了错误? 今后如何避免再次出错呢?

(4) 你能为我们下节课的学习做一下预告吗?

**设计意图:** 通过回顾本节课的知识, 从而对学习脉络有一个认知, 让学生体会类比、转化、消元等数学思想, 发展学生概括归纳的能力。

## 5. 教学反思

### 5.1. 巧设问题链, 类比迁移探新知

数学问题链的设计, 应避免散乱无章, 碎片化。唐恒钧教授提出: “以关联为问题链设计的逻辑起点”, 并且他提到了“思考方法关联”, 即在同一领域内的学习内容因其通用性而能有效地促进学生实现知识的迁移[3]。在设计二元一次方程组这一课时, 笔者设计了有逻辑联系, 层次递进的问题链引导学生探究新知, 并且在探究“二元一次方程”、“二元一次方程的解的概念”、“二元一次方程组的概念”和“二元一次方程组解的概念”的过程中, 无不渗透着类比学习的思想方法, 引导学生类比“一元一次方程”的学习过程, 归纳概括出“二元一次方程组”的相关概念。借助已有的知识经验, 类比迁移学习新知识。

### 5.2. 关注数学史, 知识概貌可视化

了解数学史不仅可以看到数学知识发展的概貌, 而且对于数学问题、概念的来龙去脉也会了然于胸。华东师范大学的汪晓勤教授就给出了“HPM 视角下二元一次方程组的概念教学设计”, 他论述了历史上二元问题的发展历程, 从“鸡兔同笼”第一类二元问题到“盈不足”问题再到第三类问题“群物总杂, 各列有数, 总言其实”最后到第四类二元问题“骡子和驴”问题[4]。纵观历史上对于二元一次方程组的解决过程, 不难发现第一类和第二类二元问题既可以列出一元一次方程求解也可以列出二元一次方程组求解, 但是, 对于第三类和第四类二元问题再利用一元一次方程求解便显得无从下手, 从而便可以体现出学习二元一次方程组的必要性。本节课学生存在的困惑是“当给出一个问题情境的时候, 既然能够用

一元一次方程去解决,何必再大费周章的列二元一次方程组去解决”,而教师若是对二元一次方程组的数学史有大致地了解,便可以设计类似于第三类第四类二元问题去打消学生的困惑,突破学生原有的知识屏障,让新知识顺其自然的纳入到学生原有的认知结构中。

### 5.3. 精设辨析题,概念本质易凸显

在数学概念的形成过程中,与学生的实际生活或者学习经验相结合这是毋庸置疑的,但是如何让学生从这些“感性”材料中提炼、归纳总结出数学概念,并不是件轻而易举的事。这时候就需要教师对概念进行深入剖析,即辨析概念,让概念的本质属性显现出来,这也是教学中“一个定义,几项注意”的教学方式的由来。在二元一次方程的概念形成过程中,通过设置辨析题,让学生掌握“二元一次方程是整式方程,且含有未知数的项的次数是1”便显得至关重要,以及在二元一次方程组概念的形成过程中,让学生明白“在构成二元一次方程组的两个方程中,并不要求两个方程都必须是二元一次方程,只要满足两个方程中共含有两个未知数即可”。

### 5.4. 渗透数学思想方法,提升学科核心素养

唐恒钧教授说:“在知识爆炸的今天,知识高更新率与高折旧率并存”。在课堂教学中,不少教师对学生掌握了多少知识格外的关注。但是人脑并不是计算机,不能无限制的储存知识,学过的知识长时间不用便会遗忘,但如果能将数学思想方法深入骨髓,刻进思维。即便遇到难以解决的数学问题,也可以通过化归的思想,另辟蹊径将其转化为所熟悉的数学问题来解决。在学习二元一次方程的解的过程中,我们将一个确定的值代入方程,即可将方程消元转化为一元一次方程再通过等式的基本性质变形转化去求出另一个未知数的值,此过程便渗透了“化归”的数学思想方法。张莫宙教授曾说:“一堂数学课,能够使学生会到其中的数学思想和方法,属于高品位的数学教学”[5]。将数学思想方法渗透于初中数学课堂教学中,对培养学生的高阶思维,实现课堂的优质高效,促使核心素养落地生根有着极其重要的重要性。

## 参考文献

- [1] 刘晓燕. 高中数学概念教学中培养数学抽象素养的研究[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2017.
- [2] 唐恒钧, 张维忠. 数学问题链教学的内涵与特征[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2021(1): 8-12.
- [3] 唐恒钧, 张维忠. 数学问题链教学的理论与实践[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2021: 74, 77.
- [4] 汪晓勤. HPM 视角下二元一次方程组概念的教学设计[J]. 中学数学教学参考, 2007(10): 48-51.
- [5] 张莫宙, 宋乃庆. 数学教育概论[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2016: 95.