Advances in Education 教育进展, 2023, 13(6), 3953-3959
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.136629

Hans汉斯

综合法、分析法、反证法与数学归纳法在高等代数中的应用

郜　博，谭希丽*，孙佩宇

北华大学数学与统计学院，吉林　吉林

收稿日期：2023年5月20日；录用日期：2023年6月18日；发布日期：2023年6月26日

摘　要

综合法、分析法、反证法、数学归纳法在高等代数中经常出现，是本篇文章讲述的重点。本文通过给出概念、直观理解，到举例应用、加深理解，再到归纳特征、做出总结的方式向学生们讲述。

关键词

数学推理方法，高等代数，思维能力，文化素养

The Application of Synthesis, Analysis, Proof by Contradiction and Mathematical Induction in Advanced Algebra

Bo Gao, Xili Tan*, Peiyu Sun

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

Received: May 20th, 2023; accepted: Jun. 18th, 2023; published: Jun. 26th, 2023

Abstract

Comprehensive method, analytical method, paradoxical method and mathematical induction often appear in higher algebra, which is the focus of this article. This article explains to students by providing concepts, intuitive understanding, example application, deepening understanding, and then summarizing features and making summaries.

*通讯作者。

文章引用: 郜博, 谭希丽, 孙佩宇. 综合法、分析法、反证法与数学归纳法在高等代数中的应用[J]. 教育进展, 2023, 13(6): 3953-3959. DOI: 10.12677/ae.2023.136629

Keywords

Mathematical Reasoning Methods, Advanced Algebra, Thinking Ability, Cultural Literacy

1. 引言

高等代数的开设一般在大一时期，从高中到大学的知识跨度，可能使学生短期内还不能更好地了解和掌握。因此为了使同学们能更加透彻地掌握高等代数的知识[1]，从数学推理方法的角度去帮助同学们更加快速和深刻地学习它。就代数学本身而言，便于学生理解高等代数的知识，形成更加有条理的框架，促进解决线性方程组和学习它。就代数学本身而言，便于学生理解高等代数的知识[2]，形成更加有条理的框架，促进解决线性方程组和高次一元方程组的问题上能有更大的突破和创新；同时使其不仅仅在代数学上[3]，以及在几何学、分析数学上能提供相似的研究方法，促进数学各分支间的联系，推动整个数学的发展；最后，在综合法和分析法、反证法、数学归纳法的研究中，从中吸取学习方法培养学生的数学素养、数学思维能力，形成踏实肯干、严谨求实的数学文化素养。

数学作为基础学科，从幼儿园到博士每天都在接触。解决好数学问题才能更好地推动人类社会的进步。学生们通常在解题的过程中常常没有思路，无法下笔，基于此，本文从数学推理方法在高等代数应用的学习出发[4]，帮助学生分析题目，解答题目，培养学生的数学思维，提高数学文化素养。

2. 综合法和分析法

2.1. 综合法、分析法概念

综合法：根据命题的条件或者定义、定理、公理等，运用逻辑推理能力推理，最后达到要证明结论的方法，就称为综合法或者由因导果法。

分析法：根据要求的结论，经过步步探索，最后达到命题的已知条件或者是定义、定理、公理等，就称为分析法或者执果索因法。

2.2. 综合法、分析法的区别与联系

区别：综合法采用正推的方式，将已知的条件作为因为，推理的结果作为所以；分析法采用逆推的方式，将要求的结论作为因为，推理的结果作为所以。若记 P 为条件或者定义、定理、公理等，Q 为要证明的结论，则综合法为若 P 则 Q；分析法为若 Q 则 P。

联系：综合法与分析法常常相互联系，贯穿同一题中。恩格斯曾经说过“没有分析就没有综合”，两者之间是对立的，也是统一的。综合法与分析法体现在证明充要问题时，综合法寻找必然性，分析法寻找充分性。

2.3. 综合法与分析法在高等代数中的应用实例

在实际生活中，综合法与分析法密不可分，此处选取高等代数中经典实例，让同学们更好地体会数学推理方法的思想。

例 1 子空间的直和的充分必要条件：设 V_1、V_2 是线性空间 V 的子空间，证明下列条件等价：
(V_1+V_2)是直和；$\alpha_1+\alpha_2=0$，$\alpha_i\in V_i\left(i=1,2\right)$只有 α_i 全为零时才成立(零向量的分解式唯一)；

$$V_1\cap V_2=\{0\};$$

$$\dim V=\dim V_1+\dim V_2 .$$

求解如下：

引理 1 设 V_1、V_2 是线性空间 V 的子空间，如果(V_1+V_2)中每个向量 α 的分解式 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$ 是唯一的，这个和就称为直和，记为 $V_1\oplus V_2$。

1)推 2)，2)推 1)证明：

必要性 根据引理 1 直和的定义可知，其对于任何向量的分解式都是唯一的，则零向量的分解式也是唯一的，这是显然的。(综合法)

充分性 要证零向量的分解式唯一时，V_1+V_2 是直和，则只需证明 $\alpha\in V_1+V_2$，它有两个分解式 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2,\alpha_i\in V_i,\beta_i\in V_i\left(i=1,2\right)$ (分析法)

综上根据零向量分解式唯一，即 $0=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2$，则 $\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2$，则零向量的分解式唯一，由引理 1 知，这个和为直和。

2)推 3)，3)推 2)证明：(可作为学生练习)

必要性 根据 2)中已知 $\alpha_1=\alpha_2=0,\alpha_i\in V_i\left(i=1,2\right)$ 显然 $V_1\cap V_2=\{0\}$。(综合法)

充分性 由 $V_1\cap V_2=\{0\}$，要证 $\alpha_1=\alpha_2=0,\alpha_i\in V_i\left(i=1,2\right)$，则只需证 $\alpha_1=\alpha_2=0=V_1\cap V_2,\alpha_i\in V_i\left(i=1,2\right)$，即 $\alpha_1=-\alpha_2=0$。(分析法)

3)推 4)，4)推 3)证明：

引理 2 V_1、V_2 是线性空间 V 的子空间，则

$$\dim\left(V_1+V_2\right)=\dim\left(V_1\cap V_2\right)=\dim V_1+\dim V_2 \tag{1}$$

必要性 由 $V_1\cap V_2=\{0\}$，则 $\dim\left(V_1\cap V_2\right)=0$，由引理 2 的维数公式成立。(综合法)

充分性 由引理 2 可知，$\dim\left(V_1\cap V_2\right)=0$，即 $V_1\cap V_2=\{0\}$。(综合法)

2.4. 综合法与分析法总结

综合法与分析法体现了演绎推理过程，与合情推理中的“猜想”不一样，因为它的步步推理都是严密的，从而得到的每一个结论都是正确的，同学们需要大量练习，认真体会综合法和分析法。

3. 反证法

3.1. 反证法的概念

以否定命题不真实达到肯定论题真实性的方法，先假设命题结论不成立，经过严密推理，推导出与定义、定理、公理等相矛盾的结果，推翻假设命题，原命题成立。反证法也称为归谬法[5]。

3.2. 反证法在高等代数中的应用实例

证明：若 $f\left(x\right)g\left(x\right)=0$，则 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 中至少有一个为零多项式。

求解如下：

假设 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 都不是零多项式，则 $f\left(x\right)$ 的次数大于零，$g\left(x\right)$ 的次数也大于零，那么 $f\left(x\right)g\left(x\right)$ 的次数也大于零，则 $f\left(x\right)g\left(x\right)$ 不为零多项式与题干矛盾。

综上，$f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 中有一个为零多项式。(反证法)

3.3. 反证法总结

在具体题型中可从以下五大方面考虑利用反证法解题[6] [7]：

1) 直接证明没有办法下手，但反向证明有思路时；

2) 命题的结论中有“至少存在”，它的反面“必定不存在”，此时若简单即可采用反证法；

3) 命题的结论有否定词语，它的反面是肯定判断时，肯定时证明起来简单时；

4) 命题的结论含有唯一，只要反证找出不唯一即可；

5) 命题中含有“无限形式”的结论，借助“有限”的推理证明时。

4. 数学归纳法

4.1. 数学归纳法的概念

数学归纳法由 1575 年的莫罗利科(Maurolico)出版的《算数》(Arithmeticorum libri duo)中提到的，其后经发展又将其分为第一数学归纳法、第二数学归纳法、倒推归纳法(反向归纳法)、螺旋式归纳法[8]。

1) 第一数学归纳法

当 $n=n_0$ （n_0 一般取 0 或 1)时，命题成立；假设 $n=n_k$ （$k\ge n_0$，k 为自然数)时命题成立，再利用 $n=n_k$ 时成立的命题去证明 $n=n_{k+1}\left(k\ge n_0\right)$ 时命题成立。因此，对任意自然数，命题都成立。

2) 第二数学归纳法

当 $n=n_0$ （n_0 一般取 0 或 1)时，命题成立；假设 $n_0\le n\le n_k$ （$k\ge n_0$，k 为自然数)时命题成立，再利用 $n_0\le n\le n_k$ 时成立的命题去证明 $n=n_{k+1}$ （$k\ge n_0$)时命题成立。因此，对任意自然数，命题都成立。

- 倒推归纳法(反向归纳法)

当 $n=n_0$ （n_0 一般取 0 或 1)时，命题成立；假设 $n=n_{k+1}$ （$k\ge n_0$，k 为自然数)时命题成立，再利用 $n=n_{k+1}$ （$k\ge n_0$)成立的命题推导出 $n=n_k$ 时命题成立。因此，对任意自然数，命题都成立。

- 螺旋式归纳法

当 $n=n_0$ （n_0 一般取 0 或 1)时，$P\left(n_0\right)$ 命题成立，假设 $P\left(n_k\right)$ （$k\ge n_0$，k 为自然数)时命题成立，得到 $Q\left(n_k\right)$ （$k\ge n_0$，k 为自然数)成立，再由 $Q\left(n_k\right)$ （$k\ge n_0$，k 为自然数)成立推导出 $P\left(n_{k+1}\right)$ （$k\ge n_0$，k 为自然数)成立的命题，在此过程中命题 $Q\left(n_k\right)$ （$k\ge n_0$，k 为自然数)相当于中间的桥梁。因此，对任意自然数，命题都成立。

4.2. 数学归纳法在高等代数中的应用[9]

第一数学归纳法实例：假设对于一切实数 a、b，等式 $f\left(a+b\right)=f\left(a\right)+f\left(b\right)$ 成立，试证明对于一切有理数 k 来说，都有 $f\left(ka\right)=kf\left(a\right)$。

求解如下：

1) 令 $a=b$，根据等式 $f\left(a+b\right)=f\left(a\right)+f\left(b\right)$ 得

$$f\left(2a\right)=f\left(a\right)+f\left(a\right),$$

$$f\left(3a\right)=f\left(a\right)+f\left(2a\right)=3f\left(a\right),$$

则对于一切自然数 k，$f\left(ka\right)=f\left(a\right)+f\left[\left(k-1\right)a\right]=kf\left(a\right)$ 成立。(数学归纳法)

2) 对于分数 $\frac{m}{n}$ （m、n 互质，$n>1$）

$$mf\left(a\right)=f\left(ma\right)=f\left(n\frac{m}{n}a\right)=nf\left(\frac{m}{n}a\right) \tag{2}$$

则 $\frac{m}{n}f(a)=f\left(\frac{m}{n}a\right)$。

3) $a=-b$ 有 $f(a)+f(-a)=0$ 则 $f(-a)=-f(a)$，由此可知，对于一切有理数 k 该命题恒成立。

第二数学归纳法实例：证明 A 是属于数域 P 上的 n 级矩阵，$f(x),f_1(x),\cdots,f_s(x)\in p[x]$，$f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$，且 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 两两互素，设线性方程组 $f(A)X=0,f_1(A)X=0,\cdots,f_s(A)X=0$ 的解空间分别为 $V_1,V_2,\cdots,V_s$，则

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s \tag{3}$$

求解如下：

当 $s=2$ 时，$f(x)=f_1(x)f_2(x)$，由 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 互素，则存在 $u(x)$、$v(x)$ 使

$$u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x)=1 \tag{4}$$

将矩阵 A 带入上式有

$$u(A)f_1(A)+v(A)f_2(A)=E \tag{5}$$

因此，对于任意的 $\alpha\in P^n$ 有

$$u(A)f_1(A)\alpha+v(A)f_2(A)\alpha=\alpha \tag{6}$$

记 $\alpha_1=u(A)f_1(A)\alpha,\alpha_2=v(A)f_2(A)\alpha$，便有 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$，当 $\alpha\in V$ 时有 $f(A)\alpha=f_1(A)f_2(A)\alpha=0$，则 $f_2(A)\alpha_1=f_2(A)u(A)f_1(A)\alpha=u(A)f_1(A)f_2(A)\alpha=0$。即 $\alpha_1\in V_2$，同理 $\alpha_2\in V_1$，显然 $V_1\subseteq V,V_2\subseteq V$，则 $V=V_1+V_2$，又对任意的 $\alpha\in V_1\cap V_2$，有 $f_1(A)\alpha=f_2(A)\alpha=0$，则得到

$$\alpha=u(A)f_1(A)\alpha+v(A)f_2(A)\alpha=0 \tag{7}$$

那么 $V_1\cap V_2=\{0\}$，因此 $V=V_1\oplus V_2$。

假设命题对 $2\le s\le k$ 个多项式成立，则 $s=k+1$ 个多项式，记 $g(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x)$，则 $f(x)=g(x)f_{k+1}(x)$，设 $g(A)X=0$ 的解空间为 W，由归纳假设有 $W=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$，显然 $g(x)$、$f_{k+1}(x)$ 互素，根据引理 $V=V_1\oplus V_2$，其中 $V_1=V_{11}\oplus V_{12}\oplus\cdots\oplus V_{1s}$，$V_2=V_{21}\oplus V_{22}\oplus\cdots\oplus V_{2s}$，则有

$$V=V_{11}\oplus V_{12}\oplus\cdots\oplus V_{1s}\oplus V_{21}\oplus V_{22}\oplus\cdots\oplus V_{2s} \tag{8}$$

则此处 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_{k+1}$。

综上所述，线性方程组 $f(A)X=0,f_1(A)X=0,\cdots,f_s(A)X=0$ 的解空间分别为 $V_1,V_2,\cdots,V_s$，满足已知条件时，则 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ (对任意 s 均成立)。

特别地，对于维数有 $\dim V=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_S$，即

$$n-r(f(A))=n-r(f_1(A))+n-r(f_2(A))+\cdots+n-r(f_s(A)) \tag{9}$$

$$r(f_1(A))+r(f_2(A))+\cdots+r(f_s(A))=(s-1)n+r(f(A)) \tag{10}$$

若 $r(f(A))=0$ 等价于 $f(A)=0$ (只有零矩阵的秩为零)，则 $r(f_1(A))+r(f_2(A))+\cdots+r(f_s(A))=(s-1)n$ 等价于 $f(A)=0$。

4.3. 数学归纳法总结

数学归纳法是一种与 N^+ 有关的命题：先证明 $P(n_0)(n_0\in N^+)$ 成立；再假设 $P(n_k)(k>0,n_k\in N^+)$ 成立，最后证明 $P(n_{k+1})(k>0,n_{k+1}\in N^+)$ 也成立。针对以上数学归纳法的总结，在具体的高等代数学习中，

用的较多的是第一数学归纳法和第二数学归纳法，倒推归纳法和螺旋式归纳法不常见，同学们可以加以了解。

5. 综合法和分析法、反证法、数学归纳法的推广

代数学发展到高级阶段便称为高等代数，先初步学习初等代数，再扩充研究对象，例如集合、向量和线性空间等。相同之处都是数的运算，但在高等代数中数的运算比初等代数要更繁琐、更复杂。纵观代数学的发展，它研究的对象不仅是数，还有矩阵、向量、向量空间、线性空间的变化等，这些对象也都可以进行加减乘除乘方开方等运算，并将这些运算的一些集合称为代数系统，比如群论、环论、域论等。数学可划分为代数学、几何学和分析数学，在其各个分支中都需要基本的数学方法去解题，其中所使用的数学推理方法大都是通用的，即是同一种逻辑思维，因此本篇文章所论述的综合法、分析法、反证法与数学归纳法适用于整个数学分支的研究中。

通过分析以上高等代数例题中所蕴含的数学推理方法[10]，将综合法和分析法、反证法以及数学归纳法做出更加详细的整理，加深了学生对数学推理方法的理解，便于在解决数学问题时从这些方法下手，大大提高了解题效率。从高等代数的研究中发现，综合法分析法在解题过程中都会用到，特别在出现“充分条件”、“必要条件”、“充要条件”时，有时综合法和分析法也会分开使用，学生应该形成一种灵活性思维，不局限一个过程；反证法多有限制性字眼，比如：“有限”、“无限”、“唯一”、“不唯一”、“至少”、“多于”等等，学生遇见此类问题时可以考虑，但并不绝对，有时利用反证法也并不简单；数学归纳法在小学应该就有接触，那时以找规律的题型出现，经过一步步往上的学习，不断深入，便演变了以上四大分类，在高代的习题中，应用第一数学归纳法和第二数学归纳法比较多，由特殊到一般的思想。

本文只列举了高等代数中常见的四种推理方法，还有同构思想方法、类比思想方法、化归思想方法、构造思想方法等，这些方法在高等代数的学习中都很重要，同学可以这种学习方法做出整理归纳。另外再掌握这些数学推理方法之后，将这些数学思想方法运用至几何学和分支数学的学习中，将整个数学分支联系起来，做到举一反三，融会贯通。

针对不同的命题，学生应该以命题的特点选择不同的推理方法去解题。这个过程需要学生大量地去练题，深刻体会数学不同方法的内涵，形成自己的知识框架，在见到类似题型时利用惯性思维解决问题。除此之外，注意每种数学推理方法并不是绝对的，可能套用方法之后并不能达到理想的效果，要及时归纳与总结。

6. 归纳与小结

本文主要对综合法和分析法、反证法以及数学归纳法的概念以及在高等代数中的应用列举了具体的实例，并分析总结了运用这些方法的一些题干提示。但在具体的高等代数的实践教学中效果并不是很理想。每个学生的知识积累、接受程度以及个性偏好都是不同的，因此在实际的教学过程中，如何让学生将这些好的方法吃透、保质保量的掌握，才是我们教学实践的真谛。

在高等代数整个的教学实践过程中[11]，应当让学生养成良好的学习习惯，几乎在高等代数的每节课的学习中，都有数学思想方法的踪迹。具体实践让学生准备一个笔记本课前安排学生进行预习，将下一节课的学习重难点发布给大家，在课堂开始的前十分钟进行收集意见，看看同学在高等代数哪些地方存在的问题比较多，在上课讲解的过程中，通过提高音量、抽查提问等方式引起学生兴趣，灵活运用学生自主分析、自主探究的教学手段，提高学生的逻辑思维能力和处理问题能力。

课中老师要根据学生的切实反应优化课堂教学质量，把握好课堂节奏。站在学生的角度想问题，数学可能乏味无趣，晦涩难懂，如何很好地解决这些问题，每个老师都该有自己的教学模式。此处，建议

老师从教学语言入手，通过问答式、启发式等暗示引导学生，在高等代数中渗透数学思想方法，应当细致、规范、严谨，让学生作为学习的主体。

课后，教师对这节课的内容应当做一个总结，特别注意这些思想方法的积累，提醒同学们做好总结，从开始学习高等代数到课程结束，让学生将预习不懂的问题，及其每节课学习的思想方法都记录下来，在之后的复习中重点看自己不会的地方，并将不同的思想方法进行分类、归纳、整理，在实际练习过程中套用这些方法，久而久之形成惯性思维，在面对陌生问题时能融会贯通，提高数学思维能力，形成良好的数学文化素养。同时，针对不同层次的学生应当分层次布置练习，在巩固过程中找出学生的不足之处，进行查漏补缺，争取做到每一位学生都不掉队。

在学习的道路上，教师作为学生的引路人，学生是学习的主体。数学作为基础学科，对教师的要求更高，而让学生爱上数学，就要培养好学生的数学思维能力，掌握好数学思想方法，需要在整个高等代数的学习中，不断渗透数学推理方法，不是一蹴而就的，是长久的，不能操之过急，要通过这些方法的学习，让学生的思想不仅仅局限于高等代数中，扩展到分析数学、几何学等领域，让数学的各个分支联系起来，使数学有更深一步的成果。

基金项目

项目号：吉林省教育科学“十四五”规划课题“新时代研究生教育质量评价体系与监管机制构建研究”(ZD21060)。

参考文献

[1] 李薇. 高等代数的发展历程和内容[J]. 数学园地, 2005(1): 46.

[2] 严谦泰, 王澜峰. 高等代数[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.

[3] 张继平. 新世纪代数学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002: 1-83.

[4] 梁瑛, 连冬艳, 许奥楠. 浅谈高等代数蕴含的哲学思想[J]. 科教文汇, 2022(13): 105-107.

[5] 马平. 数学反证法中的哲学思想[J]. 安庆师范学院学报, 2000, 6(1): 43-44.

[6] 李敏丽. 数学归纳法在高等代数教学中的应用策略探究[J]. 江西电力职业技术学院学报, 2022, 35(11): 40-42.

[7] 赵建勋. 怎样的命题适宜用反证法[J]. 教育与实践, 2002(12): 56-57.

[8] 吴恒飞. 数学归纳法原理及其在代数中的若干应用[J]. 亳州学院学报, 2020, 23(6): 60-64.

[9] 田金玲. 高等代数教学中数学归纳法的应用分析[J]. 江西电力职业技术学院学报, 2020, 33(12): 45-46.

[10] 郭微, 杨月婷. 数学思想方法在高等代数教学中的渗透[J]. 高等数学研究, 2009, 12(1): 105-106.

[11] 周潘岳. 高等代数课程教学的思考[J]. 产业与科技论坛, 2022, 21(1): 171-172.