

高中数学教科书中“阅读与思考”栏目教学 实践研究

——以“中国古代数学家求数列和的方法”为例

张 琪

黄冈师范学院，数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2023年5月12日；录用日期：2023年6月8日；发布日期：2023年6月15日

摘 要

高中数学教科书中的“阅读与思考”栏目蕴含着丰富的教学价值与育人功能。作为教科书中的拓展性栏目，“阅读与思考”不仅能拓宽师生视野，也是教师教学中极佳的教学素材。基于此，文章以人教A版高中数学教科书中的“阅读与思考——中国古代数学家求数列和的方法”为例，通过对此内容进行详尽地解析，对其使用提供切实可行的建议，从而将其有效地融入实际教学中，使应有的价值得到充分发挥。

关键词

高中数学教科书，阅读与思考，数列求和

Research on the Teaching Practice of the “Reading and Thinking” Column in High School Mathematics Textbooks

—Taking “the Method of Chinese Ancient Mathematicians to Find the
Sum of Sequence” as an Example

Qi Zhang

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal College, Huanggang Hubei

Received: May 12th, 2023; accepted: Jun. 8th, 2023; published: Jun. 15th, 2023

Abstract

The “Reading and Thinking” column in high school mathematics textbooks contains rich teaching value and educational functions. As an expanding column in textbooks, “Reading and Thinking” not only broadens the horizons of teachers and students, but also serves as an excellent teaching material for teachers. Based on this, the article takes the “reading and thinking—the method of Chinese ancient mathematicians to find the sum of number sequences” in the senior high school mathematics textbook of People’s Education A Edition as an example, and through detailed analysis of this content, it provides practical suggestions for its use, so as to effectively integrate it into the actual teaching and give full play to its due value.

Keywords

Mathematics Textbooks, Reading and Thinking, Sum of Sequence

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017 版)》中指出, 教科书内容的呈现方式应丰富多样, 要增强教科书的可读性与亲和力。教科书每一章节后增加“阅读与思考”“探索与发现”“信息技术应用”是供师生拓展视野的拓展性栏目。“阅读与思考”栏目作为数学教科书中的有机组成成分, 在充分挖掘数学课程资源的多元价值中担任不可或缺的角色, 能帮助学生充分感受数学的人文精神、思维特点、培养与时俱进的创新精神。它篇幅短、内容新、阅读性强, 集知识性、科学性、趣味性、教育性于一体, 且根植于学生知识与能力地最近发展区, 能很好地激发学生学习数学地兴趣, 增强其应用数学地能力, 进而提高学生的修养[1]。

2. 具体内容解读

《中国古代数学家求数列和的方法》这一篇“阅读与思考”材料位于人教 A 版高中数学选择性必修二第四章《数列》章节的章末, 是对教科书数列内容的拓展与延伸。主要向大家介绍了我国古代数学家对于数列及其求和知识发展的贡献。

这篇阅读材料包含着丰富的数学知识以及数学历史文化。是数学史相关内容的呈现, 也是数学知识在实际生活中应用的典型案例。但是文章只是简单介绍了不同数列和的计算公式, 关于其来龙去脉并没有具体说明, 如果仅仅只是当成一篇课外读物供学生进行自主阅读, 学生并不能完全理解其中所包含的内容以及数学思想方法, 那么这篇内容就会稍显“浪费”。这就要教师去研究与材料相关的文献资料, 厘清古代数列求和的来龙去脉, 揭示隙积术、垛积术等原理及联系[2]。下面就首先对文章中所提到的与中国古代数学家求数列和的相关知识进行讲解, 为一线教师的教学以及学生自主学习提供一定的参考。

(1) 刘徽与等差数列求和

材料中最先提到了魏晋时期数学家刘徽, 在对《九章算术》进行注解的时候利用了等差数列的求和公式。《九章算术》“盈不足”章的第 19 问是一道与等差数列求和相关的问题: “今有良马与驽马发长

安至齐。齐去长安三千里。良马初日行一百九十三里，日增十三里。弩马初日行九十七里，日减半里。良马先至齐，复还迎弩马。问：几何日相逢及各行几何？”

数学家刘徽的解答过程：用“平行数 ± 中平里”来计算良马与弩马 15 日所行里数，相当于使用了等差数列的求和公式。其中刘徽使用的 15 天是“假令”的天数，如果按 15 天计算，那么良马 15 天共走了 4260 里，会返回迎接弩马 1260 里，而弩马 15 天走了 1402.5 里， $1260 + 1402.5 = 2662.5$ (里)，比 3000 里少了 337.5 里；如果按照 16 日来算，良马需要返回迎弩马的路程为 1648 里，劣马此时行了 1492 里，路程相加，多了 140 里。所以可以判断相遇的时间为 15 天多一点。然后再按照“盈不足”的方法，先算出两匹马在 15 天所行的路程。以良马为例，良马 15 天所行的总路程为：

$$\begin{aligned} & 193+193+13+193+193\times 2+\dots+(193+193\times 4) \\ & =193\times 15+(1+2+3+4+\dots+14)\times 13 \\ & =2895+(1+14)\times \frac{14}{2}\times 13 \end{aligned}$$

其中 193×15 为良马的平行数， $(1+14) \times \frac{14}{2} \times 13$ 为良马的“中平里”。

(2) 沈括的“隙积术”

北宋数学家沈括博学多才，善于观察。据说有一天，他走进一家酒馆，看见了垒起的酒坛(图 1)，不禁想到：“怎么求这些酒坛的总数呢？”文中提到了“沈括‘用刍童法求之，常失于数少’”。“刍童(图 2)”这个名词，原来是草堆的意思，古代用它作为长方棱台的专业术语[3]。在《九章算术》中给出了“刍童”的体积计算公式，用字母可以表示为： $V = \frac{h}{6}[(2a+c)b+(2c+a)d]$ 。但是酒坛堆放在一起，中间会有空隙，利用这种方法计算出的结果肯定是与实际不一致。于是他根据“刍童”体积公式的推算方法并且结合实际进行试验，推导出了关于有空隙的堆积物(图 3)的个数计算方法，也就是“隙积术”，用字母可以表示为： $V = \frac{n}{6}[(2a+c)b+(2c+a)d] + \frac{n}{6}(c-a)$ 。



Figure 1. Pile of wine jars
图 1. 堆积的酒坛

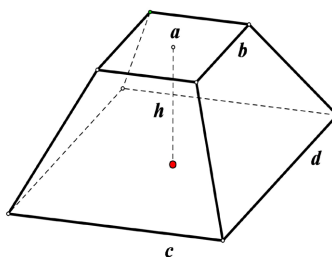


Figure 2. Haystack
图 2. 刍童垛

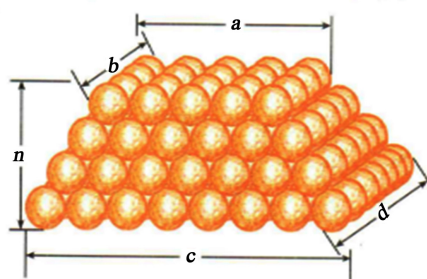


Figure 3. Pile with voids
图 3. 有空隙的堆积物

(3) 杨辉的“垛积术”

南宋的数学家杨辉提出的“垛积术”是在“隙积术”的基础上进一步发展的。杨辉在《详解九章算法》《商功》篇阐述了三角垛、方垛，刍甍垛以及刍童垛的计算方法。

“垛积”就是指“堆垛求积”的意思。一些“垛”的堆积方式比较特殊，层与层之间满足某种数量关系，于是，就把这些“垛”抽象为一列数，用这列数之和来表示“垛”中物体的总数[4]。

材料中指出了“顶层放 1 个，第二层放 3 个，第三层放 6 个……第 n 层放 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个物体堆成的堆垛”称为“三角垛”(图 4)。



Figure 4. Triangular pile
图 4. 三角垛

在杨辉的数学著作《详解九章算术》中有这样的记载：“三角垛，下广，一面一十二个，上尖，问：计几何？”就是问堆积为 12 层三角垛的物体一共有多少个？他通过类比求体积的“鳖臑(图 5)法”，给出了计算结果为 364 个。研究认为他是利用图形拼凑的方法来解决问题的。

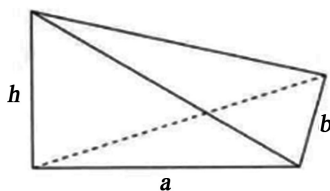


Figure 5. Tetrahedron with four right angles
图 5. 鳖臑

关于 12 层三角垛物体个数的计算，有记载古代数学家是这样进行的：将三角垛每层不同位置的物体数量在圆圈中用数表示出来，如图 6 所示。然后继续将图 7 逆时针旋转得到图 8。

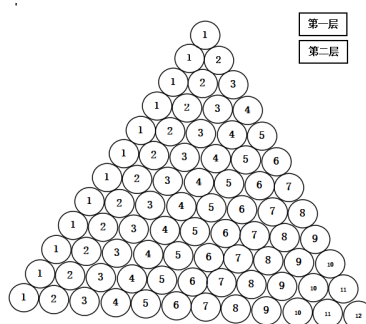


Figure 6. Number of objects in different positions in a triangular pile
图 6. 三角垛中不同位置物体的个数图

再将图 6 逆时针旋转得到图 7。图 7 继续逆时针旋转得到图 8。

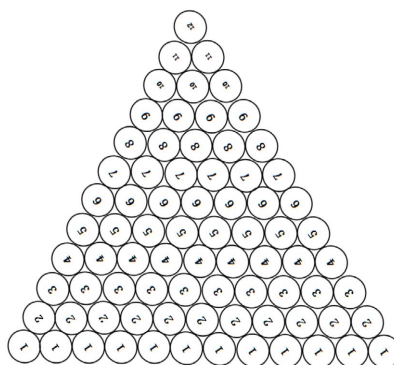


Figure 7. Rotate figure 6 counterclockwise
图 7. 将图 6 逆时针旋转

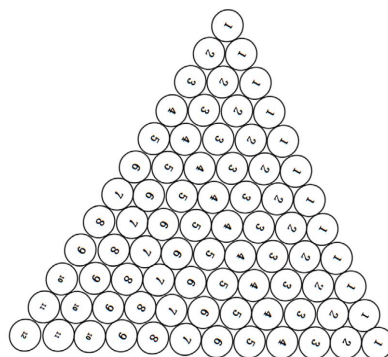


Figure 8. Rotate figure 7 counterclockwise
图 8. 将图 7 逆时针旋转

这三张图中，每张图都有 78 个圆圈，这可以通过将每层的圆圈数相加可得到，即 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 12 = 78$ 个，并且通过三张图不难发现，三张图中相同位置圆圈中数的和都为 14 (如最顶层 $1 + 12 + 1 = 14$ ；第六层从左往右的第四个 $4 + 7 + 3 = 14$)。于是关于这个三角垛的计算就可以写成：

$$\begin{aligned}
 & 1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+12) \\
 &= (1+2+3+\dots+12) \times 14 \div 3 \\
 &= 364
 \end{aligned}$$

进一步推广到 n 层三角垛,仍然是按照相同的方法,将物体数量表示在圆圈中,逆时针旋转两次,得到的三种图中,每种都有 $(1+2+3+\dots+n)$ 个圆圈,并且每张图相同位置的数的和为 $n+1+1=n+2$ 。可以得到总数的计算公式为:

$$\begin{aligned} S &= 1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+n-1+n) \\ &= (1+2+3+\dots+n)\times(n+2)\div 3 \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\times(n+2)\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

关于三角垛的计算,我国古代数学家还有另外的方法:

三角垛: 1, 3, 6, 10, 15, ... ①

① 左右作差: 2, 3, 4, 5, ... ②

② 左右作差: 1, 1, 1, ... ③

经观察研究发现,①中的每一项,都可以用1, 2, 1(三个数列的首项)来表示,例如:①中 $3=1\times 1+2\times 1+1\times 0$; $6=1\times 1+2\times 2+1\times 1$; $10=1\times 1+3\times 2+1\times 3$...进一步归纳可以发现 $\frac{n(n+1)}{2}=1\times 1+(n-1)\times 2+\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; 并且还发现,①中的第“ $n+1$ ”项,都比②中前 n 项的和多1。

例如:①中的第三项6,比②中前两项2与3的和5多了1。由此想到了构造一个首项为0的新数列 $\{b_n\}$,并且新数列的第“ $n+1$ ”项就是①中数列前 n 项的和。

b_n : 0, 1, 4, 10, 20, 35, ...

三角垛: 1, 3, 6, 10, 15, ... ①

①左右作差: 2, 3, 4, 5, ... ②

②左右作差: 1, 1, 1, ... ③

b_n 的每一项仍然可以用几个数列的首项0, 1, 2, 1来表示,例如: $1=1\times 1+2\times 0+1\times 0$; $4=0+1\times 1+2\times 1+1\times 1$; $10=0+1\times 1+2\times 3+1\times 3$...进一步归纳可以发现 $b_{n+1}=0+1\times 1+n+2\times \frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\times 1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$,也就是 $1+3+6+10+\dots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 。

方垛(图9)是指每层都堆积成正方形,自下而上每层每边都减少一个,最上一层只有一个的堆垛形状,也就是第一层放1个,第二层放 2^2 个,第三层放 3^2 个……



Figure 9. Square pile
图9. 方垛

关于方垛堆积物的总数,他当时给出的计算方法,可以总结为这样一个公式: $S = \frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$, 推导方式与三角垛类似。

经过分析不难发现，这篇阅读材料每部分的内容都是环环相扣，逐步递进的。教师首先是教学活动的组织者与引导者，要想使教科书每一部分的价值被充分发挥，打造高效课堂，就需要教师将这部分内容仔细研读清楚，弄清每一种方法的实质，更重要的是需要根据学生认知水平合理选取这些内容进行教学，并且思路要明确，逻辑要连贯。

3. 教学设计思路

3.1. 课前准备

“提倡积极主动、勇于探索的学习方式”是高中数学新课程的基本理念之一，“阅读与思考”课正是实现这一理念的有效途径[5]。那么作为教科书后的一则阅读材料，可以让学生带着问题去阅读思考，有目的地去进行探索，适当地查阅资料。教师可以给学生列出这样的问题：这篇文章主要讲了什么内容？文章中提到的我国古代数学家对于数列的求和问题具体有怎样的贡献？文中提到的具体求和方法是如何得到的？你从中体会到了数学家们的哪些思想方法以及精神？还有哪些地方存在疑问？

对于数学学习者来说，数学知识的建构除了与逻辑推理有关联，还受其他因素的影响，其中之一就是阅读。阅读往往对应着主动学习的过程，通过阅读可以激发学生的学习的主动性，也能强化学生对于数学学习的动机。学生带着问题阅读，启发学生思考。

3.2. 合作交流

正式上课时，可以分小组，以上述需要思考的问题为依据，在一定的时间内先请小组成员讨论交流，整理各成员得到的结论信息以及还存在的疑问，再分小组进行汇报。这样可以锻炼学生的信息处理能力，对于学生表达能力的培养也有一定的帮助。

关于学生们提出的疑问，由于每位学生都对相关内容查阅了一定的资料，所以可以先由学生们互相进行解读，部分学生进行补充，鼓励学生大胆展示自己，教师帮忙完善。

这样设计能促进全体学生积极思考，对于“阅读与思考”的内容，甚至于对数学的学习都有激励作用。全体学生通过合作去解决问题，有助于培养学生团结、积极向上乐观的精神。

3.3. 重点讲解

文中刘徽与等差数列求和公式，沈括的“隙积术”以及杨辉的“垛积术”是文章的主体，除此之外数学家们对于数学问题研究所体现的思想方法也是讲授的重点。

首先刘徽对《九章算数》注解中提到的这个问题可以直接请学生先自己进行解决，学生要想解决这个问题首先就得会将文言文翻译成“白话”，这个问题既包含了等差数列求和的知识，也涉及到了行程问题，是对学生综合能力的一种考察。

在学生完成之后，教师再提出刘徽给出的计算方法，讲解其方法与等差数列求和公式之间的联系。但是对于其方法一定要仔细讲解，比如材料中提到的“15天”，“平行数”以及“中平里”等。

关于“垛积”相关的内容，我国古代有着较为成熟的发展，是我国古代十分了不起的数学成就，教师可以根据其发展过程以及学生的认知水平有选择性地展开讲解。

沈括与“隙积术”。“隙积术”的推导，沈括在其著作《梦溪笔谈》中并没有具体说明，被后世认为是结合前人经验以及实验得到的，所以教师不需要对公式的推导进行说明，可以适当变式训练。重点是介绍沈括在探究“隙积术”时所体现的数学思想，从总的方面看，“隙积术”是用几何求积的方法来解决级数求和的代数问题，即用连续的方法来处理不连续的问题。这种连续与间断的辩证的转化，“是数学科学的最有力的杠杆之一”[6]。他通过观察生活中常见的情景，运用类比、归纳的方法，想出了用

连续模型来解决离散问题。让学生们能够体会到沈括的创新精神，也让学生们能够感受到数学方法解题技巧是可以实在地解决生活中的实际问题，理解数学广泛的应用性。

杨辉与“垛积术”。关于“垛积术”可以重点讲解，“垛积术”往上可追溯到等差数列求和公式，往下可以迁移拓展为“裂项求和法”，学生容易理解与掌握，具有较大的教学价值[4]。

通过展示材料中提到的三角垛堆积方式，可以先请学生们自己先进行推导求和公式。引导学生观察再结合已有的知识经验，部分学生是可以自行得出求和公式。再给学生介绍杨辉以及我国古代数学家其他的方法，带领学生一起去感受古代数学家们探究的过程。最后还可以请有兴趣的同学们课余时间继续查阅与“垛积术”有关的资料。

在教师地引导下，学生们观察和发现规律，经历了思考的过程，理解就变得深刻，就更能够把握知识间的内在联系。

3.4. 巩固提升

文中提到的关于数列求和的内容，可以进一步延伸进行变式训练。这里给出几道我国古代数学名题作为参考：

例 1：我国古代数学著作《九章算术》中有如下问题：“今有金篋，长五尺，斩本一尺，重四斤，斩末一尺，重二斤，问次一尺各重几何？”意思是：“现有一根金杖，长 5 尺，一头粗，一头细，在粗的一端截下 1 尺，重 4 斤；在细的一端截下 1 尺，重 2 斤；问依次每一尺各重多少斤？”

例 2：数学家沈括经过酒楼门口时，看到门口堆有一堆空酒坛，其中最上层有长 2 宽 1 共 2 个木桶，每一层的长宽各比上一层多一个，共堆放 15 层，则木桶的个数有多少个？

例 3：根据求三角垛的方法，试着去推导“方垛”的计算公式。

4. 反思

《中国古代数学家求数列和的方法》这篇“阅读与思考”材料具有丰富的教学与育人价值，值得教师们去深入挖掘与精心设计。

首先，要想用好这篇材料，教师就必须去查阅相关文献资料。严谨是数学的特点之一。数学的严谨性在于他“讲理”，也就是数学中的任意一个数、一个算式或是一个结论都应该有理有据。因此，教师严谨地对待这篇文章中涉及到的内容方法是十分必要的，并且在这个过程中能传递给学生严谨的求学态度。在任何情况下都要让学生明确数学是严谨的。并且在教学中遵循知识的发展过程，比如“垛积术”的发展。同时也让学生体会到数学广泛的应用性，数学来源于生活，应用于生活。在潜移默化中培养学生“讲理”的德行，以及“守规”的态度。

数学的理性精神在于求善、求真、求美。数学家们能在对于数学的追求之中获得许多美好感受，学生们在数学学习的过程中也同样能获得这样的感受。本篇内容中介绍了我国古代数学家们对于数学知识的不断探索，以及巨大贡献。学生们在教师的引导之下，去感受数学家们发现问题，提出问题，分析问题以及解决问题的全过程，去感受数学家们对于真善美的追求，经历这样的探索过程远比只是进行一篇数学“阅读”，或是知道了几个求和公式有价值得多。

数学家们创新与创造精神是数学学科“立德树人”的重要内容。这篇材料中数学家们通过生活中常见的情景，经过类比与比较，想到了将求体积等连续问题转化为求离散的堆积问题，并且能够从“特殊”推广到“一般”。学生在这个过程中领悟数学家们的数学观念，以及思想方法。

教师对于这些内容地教学要有的放矢，作为阅读材料，最后也同样是最重要的，这些数学内容都是在解决实际问题的过程中发现提出的。数学广泛的应用性也体现于此。

5. 小结

“阅读与思考”栏目蕴含着丰富的价值，它能拓展师生视野，蕴含着数学中的理性精神，数学性的思维方式，数学的研究方法等，通过他们能够丰富学生的数学素养，让学生在发现问题、提出问题、分析与解决问题的能力得到提高。同时也能促进教师专业发展，促进教师向教育教学的研究者发展……那么如何将每一篇相关内容都能得到充分利用，发挥其应有的教学育人价值，就需要教师对每一篇内容都进行细致地阅读与分析。

参考文献

- [1] 李兵. 高中数学“阅读与思考”栏目教学研究[J]. 中学数学教学参考, 2021(31): 30-32.
- [2] 吕增锋. 高中数学教材“拓展栏目”的分布及功能分析[J]. 中小学教师培训, 2022(8): 60-63.
- [3] 许蕊舫. 从“芻童”求积谈到“隙积”和“四隅堦”级数[J]. 数学通报, 1965(2): 45-49.
- [4] 蒋吉林, 吕增锋. 数学文化教学: 从欣赏走向理解——以“中国古代数学家求数列和的方法”为例[J]. 中学数学教学参考, 2022(16): 67-70.
- [5] 谷荷莲. 高中数学“阅读与思考”栏目的教学实践与思考——以《圆锥曲线的光学性质及其应用》阅读与思考教学为例[J]. 数学教学通讯, 2020(9): 3-4+10.
- [6] 张伟. 沈括“隙积术”的数学思想创新[J]. 广东化工, 2015, 42(13): 297+303.