Advances in Education 教育进展, 2023, 13(7), 4580-4587
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.137720

Hans汉斯

信息技术下概念教学中融入思政元素研究

——以弧度制概念为例

钊　蕊，张丽春*

北华大学数学与统计学院，吉林　吉林

收稿日期：2023年6月13日；录用日期：2023年7月11日；发布日期：2023年7月21日

摘　要

教育以立德树人为根本任务，概念教学应当思政化。APOS理论将数学概念学习分为四个阶段：操作、过程、对象、图式。本文以信息技术为助力，以APOS理论为基础，以课堂思政为要素，以弧度制教学为例，设计了4个阶段：操作阶段——雨课堂助力课前；过程阶段——GGB助力探究；对象阶段——立志而圣、化曲为直；图式阶段——体会数学之美，从而在信息技术支持下，实现了课堂思政化，润“生”细无声。

关键词

信息技术，课程思政，APOS理论，弧度制

Research on Integrating Ideological and Political Elements into Concept Teaching under Information Technology

—Taking Radian System Concept as an Example

Rui Zhao, Lichun Zhang*

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

Received: Jun. 13th, 2023; accepted: Jul. 11th, 2023; published: Jul. 21st, 2023

Abstract

The fundamental task of education is to cultivate morality and cultivate people, and concept teaching should be ideological and political. APOS theory divides mathematical concept learning into four

*通讯作者。

文章引用: 钊蕊, 张丽春. 信息技术下概念教学中融入思政元素研究[J]. 教育进展, 2023, 13(7): 4580-4587.
DOI: 10.12677/ae.2023.137720

stages: operation, process, object and schema. With information technology as the assistance, APOS theory as the foundation, classroom ideological and political education as the element, and curved teaching as an example, four stages were designed: the operation stage—rain classroom assistance before class; Process stage—GGB assisted exploration; Object stage—aspire to be holy and transform the melody into straightness; Schema stage—experiencing the beauty of mathematics. Thus, with the support of information technology, the ideological and political ideology in the classroom can be realized and the moral quality of students can be subtly affected.

Keywords

Information Technology, Curriculum Ideology and Politics, The APOS Theory, Radian System

1. 引言

动态几何软件如：几何画板、GeoGebra 等跟踪、迭代、滑动条等功能可以有效的提升教学效果，更好的实现课堂思政化。传统的概念教学有两种方式：概念形成和概念同化。概念反应了事物的本质属性，对于本质的揭露和理解必然是逐步达成的。而 APOS 理论呈现了概念建构的层次性，逐步深入建构起完整的图式。

弧度制作为高中数学中的基础性概念，是针对角的一种新的度量制。课标中明确提出让学生体会引入弧度制的必要性[1]。然而，许多师生对其引入的必要性存在误解[2]，这些误解在弧度制教学的课堂上几乎比比皆是，主要集中在：角度制下的度量值所采用进制是否是 60 进制，三角函数概念是否必须以弧度制为前提才能满足高中函数的定义[3]。其实，角度制与弧度制的对比如表 1 所示[4]。而为了让计算和表现形式更简洁，现代数学在弧度制下研究三角函数。

Table 1. Radians and angles
表 1. 弧度制与角度制

弧度制	角度制
适用于高等数学	适用于初等数学
简化了诸多公式 (泰勒公式、微分公式、积分公式等)	

有关弧度制教学的研究更多的注重数学史的融入[5]，而对信息技术的使用仅限于其基本功能[6]，没有深挖其跟踪功能和迭代功能，也没有融入课堂思政。

2. APOS 理论、信息技术的应用以及思政的融入

2.1. 信息技术

高中数学相对初中数学、小学数学具有更高的抽象性，更大的综合性，更强的复杂性。概念教学可分为课前、课中、课后三个环节，如表 2 所示。

Table 2. The use of information technology
表 2. 信息技术的使用

课前	课中	课后
课前预习， 回顾知识， 阅读材料。	数形结合 化静为动	课后讨论 完成小组作业
雨课堂的发布试题功能	几何画板和 GeoGebra 等 跟踪、迭代、滑动条等功能	雨课堂的线 上讨论功能

2.2. APOS 理论

美国数学教育家杜宾斯基 EdDubinsky 认为学生对于数学概念的心理建构都会经历四阶段[7]，如图 1，这就是“APOS 理论”。在这四个阶段中，教学可以逐步深入，最终建构起完整的概念图式。

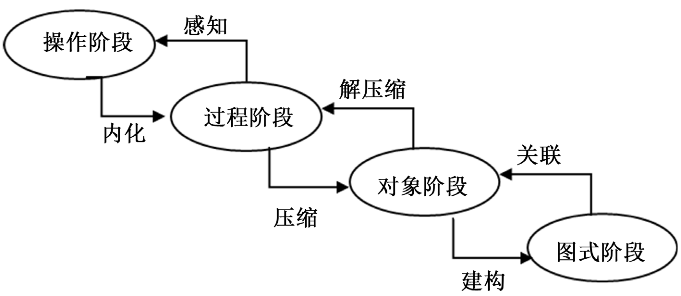

Figure 1. The APOS theory
图 1. APOS 理论图

2.3. 课堂思政

教育教学应当围绕着“立德树人”而展开，思政要素和知识技能、数学活动、素养的培养必须自然的融入到一起，在汲取知识的同时，获得精神力量。概念教学也要课堂思政化，润“生”细无声。在弧度制正负角的学习中，引导学生树立正确的人生航向，在图式阶段，通过两种度量值下公式的对比，体会数学之美的同时，引导学生简洁纯粹，服务人民。

3. 弧度制概念教学设计

3.1. 操作(Action)阶段——雨课堂助力课前

教师通过雨课堂发布阅读材料古希腊偏心轮模型问题[8]，如图 2 所示。

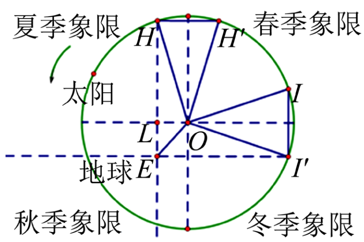

Figure 2. The eccentric wheel model
图 2. 偏心轮模型图

因为太阳一直在绕点 O 进行匀速圆周运动，所以从地球上来看，它相对于地球而言的位置是不同的，整个空间随着太阳的这种运动可以被分成四个不同的象限。古希腊人通过观测和计算得出了弧 HH' 和弧 II' 的准确长度。并利用托勒密所制作的弦表(如表 3)求出了偏心轮模型中地球 E 与太阳旋转中心 O 的距离。弦表是在半径固定的前提下制作得到，其中所有数据也都是采用的 60 进制。让学生小组合作完成如下三个小任务：1) 给出求 OE 的思路；2) 谈谈计算的困难之处；3) 请查阅资料谈谈在弧的度量方面，阿耶婆多和欧拉在托勒密之后，做了哪些“火热的发明”。

Table 3. Part of the string table made by ptolemy
表 3. 托勒密所制的部分弦表

弧长/°	对弦长/°	弧长/°	对弦长/°
0.5	0; 31, 25	6	6; 16, 49
1	1; 2, 50	47	47; 51, 0
1.5	1; 34, 15	49	49; 45, 48
2	2; 5, 40	72	70; 32, 3
2.5	2; 37, 4	80	77; 8, 5

学生 1：先利用弦表，由弧长可得弦 OL 和弦 LE 的长度。最后，在△OEL 中，利用勾股定理求解。

学生 2：六十进制下，数值的计算较繁难。

师：今天我们来学习度量角的另外一种方式。请大家计算圆心角 $\alpha = 30^\circ$ 时，不同半径下的弧长 l，完成表 4。

Table 4. Calculated arc length
表 4. 计算弧长 l

$\alpha = 30^\circ$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$
l			

学生完成表格。

设计意图：通过“操作阶段”学生可亲身感受弧度制概念的天文学背景，以及六十进制下，数值的计算的繁难。借助课前的阅读材料，初步通过弦表明白半径固定时，弧长和弦长可以对应起来。进而，可以转化为半径固定时，角的大小与弦长可对应。通过填写表格，发现角的大小、弧长与半径三者之间的紧密联系。

3.2. 过程(Process)阶段——GGB 助力探究

师：请大家观察表格，发现了什么规律？

生：角 α 确定时，r 越大，l 越大，此时，$\frac{l}{r}$ 是定值。

追问：那么是否 $\frac{l}{r}$ 只和 α 有关呢？

师生活动：教师借助 GeoGebra 软件，设置半径的滑动条[8]，选中角所对弧的“显示轨迹”，如图 3 所示，让学生直观的看到，角 α 确定时，其所对的弧长随半径的变化情况。从而猜想：$\frac{l}{r}$ 只和 α 有关。

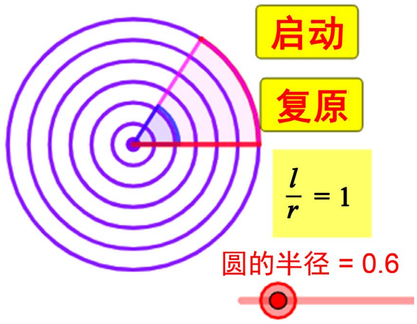

Figure 3. The ratio of arc length to radius
图 3. 弧长与半径比值探究图

追问：你能推理论证这个结论吗？

生：借助初中所学的公式 $l=\dfrac{n\pi r}{180}$ 可得，$\dfrac{l}{r}=\dfrac{n\pi}{180}$。

设计意图：在“过程阶段”中，学生对之前所完成的表格进行思考，发现规律。学生通过观察表格，猜想 $\dfrac{l}{r}$ 是定值，后在 GeoGebra 环境下，反复改变半径大小，观察数(弧长与半径比值)以及形(圆弧、半径)两方面的变化。学生观察 $\rightarrow$ 猜想 $\rightarrow$ 验证结论。

师：在制定一种度量制时，需要选定 1 个单位作为度量标准，然后再用它度量其他的量。比如：角度制下，周角被平均分成 360 份，选定其中 1 份作为 1 个单位，称为 1°。度量长度时，选定 1 段长度作为 1 个单位，称为 1 米。

追问：我们是否可以利用刚才发现的圆心角所对弧长和半径之间的关系帮助我们去选定度量标准呢？

生：我们可以选定 $\dfrac{l}{r}=1$ 时，弧所对的角是 1 个单位。

教师顺势给出 1rad 的角的定义。

3.3. 对象(Object)阶段——立志而圣、化曲为直

3.3.1. 正负角探究——立志而圣则圣矣

问题：弧度制下，在半径为 r 的圆中，弧长 $l=2r$ 的圆心角的大小是多少弧度？弧长 $l=3r$ 的圆心角呢？长度 $l=kr$ 的弧所对的圆心角呢？请依次回答。

生：2 rad，3 rad，k rad.

师：是否是这样呢？我们来看这两个角，如图 4，图 4 中的两个角所对的弧长都是半径的 2 倍，那么他们都是 2 弧度吗？

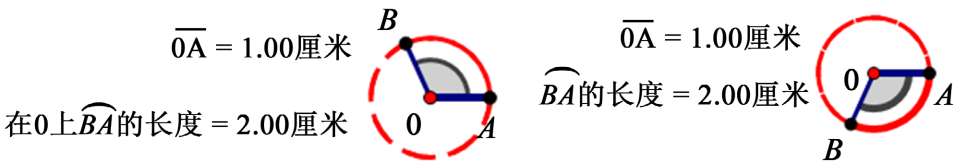

Figure 4. Positive angle and negative angle
图 4. 正负角探究图

生：应该有所区分。

追问：这两个角有什么区别？

生：所属象限不同，左边的角可看做 OA 沿逆时针方向旋转而成，右边的角可看做 OA 沿顺时针方向旋转而成。

教师顺势给出 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 的定义。

师：图 3 中，左边的角是+2 rad，右边的角是-2 rad.我们可以看到：这两个角尽管大小的绝对值相等，仅仅是因为终边旋转方向的不同，却产生了一个+2，一个−2,可见方向的重要性。人生亦是如此。立志极为重要，一失足成千古恨，我们要把握好自己的人生航向。

设计意图：“对象阶段”是对弧度制下角的弧度值赋予形式化的定义及符号，依据终边旋转方向的不同定义正负角。利用几何画板激发学生的认知冲突，进而主动思索，从而帮助其剖析公式中的绝对值。同时，自然融入思政要素——立志而圣则圣。

3.3.2. 度量值的互化——化曲为直

师：以后，我们在度量角的时候就既可以用角度制又可以用弧度制，那么它们之间有没有什么联系？

生：必然有联系。

追问：两种度量制之间的联系是什么？

师生活动：教师用动态几何软件呈现单位圆由曲变直的过程(如图 5)，帮助学生理解 $180^\circ = \pi\ \text{rad}$。在角度制下，对周角的度量过程是用圆周长自身的 $\frac{1}{360}$ 作为一个单位去度量它自身，因此自然会得到 360 份(度)，而在弧度制下，用半径 r 作为一个单位去度量圆周长 $2\pi r$，因此自然而然得到 2π 份(弧度)。因为度量的对象是同一个，所以得到 360 份= 2π 份，$360^\circ = 2\pi\ \text{rad}$，

$$180^\circ = \pi\ \text{rad} \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\text{rad} \\ 1\ \text{rad} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ \end{cases}.$$

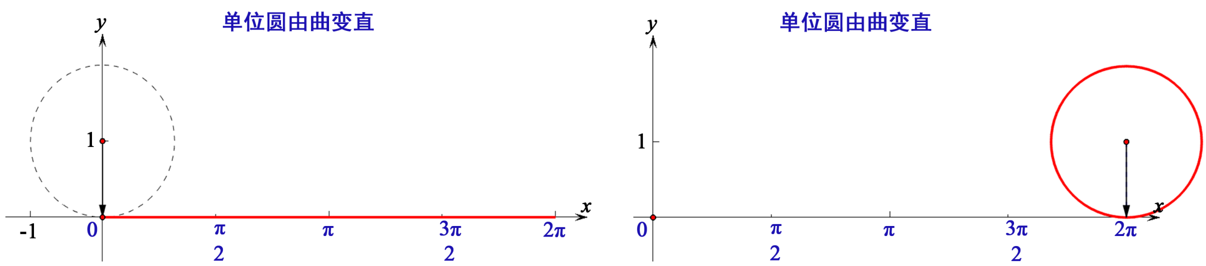

Figure 5. Diagram of from curved to straight
图 5. 由曲变直图

设计意图：理解是学会互化的前提。张奠宙先生曾强烈反对，在数学教学中摒弃概念和符号的深刻理解，而选择死记硬背、机械套用[9]。”采用 GeoGebra 软件，化静态的圆为滚动的圆，为展开的直线，更好的呈现“化曲为直”。

雨课堂发布如下例题。例 1：填写下表。

度	0°	30°	45°			$67^\circ30'$
弧度				$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	

师生活动：完成仪表盘模型(图 6)。

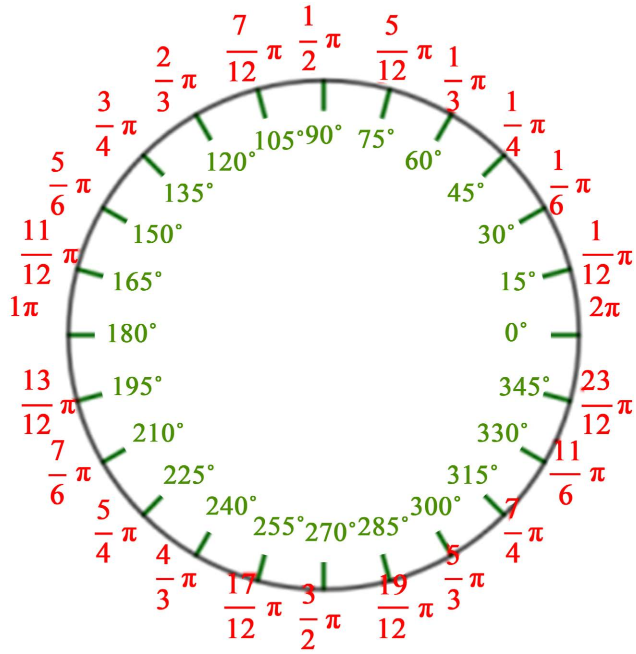

Figure 6. Diagram of the dashboard model
图 6. 仪表盘模型图

3.4. 图式(Scheme)阶段——体会数学之美

3.4.1. 数学之美——简洁纯粹服务人民

例 2：利用弧度制证明下列公式：

1) $l=\alpha r$；2) $S=\frac{1}{2}\alpha R^2$；3) $S=\frac{1}{2}lR$。

其中，$\alpha\left(0<\alpha<2\pi\right)$是圆心角，$R$ 是半径，S 是扇形面积，l 是扇形弧长。

师：其实，在高等数学中，弧度制下的诸多公式同样的也会变得很简单。如：重要极限，泰勒展开式等。如表 5 所示。

Table 5. Formulas under different metric values
表 5. 不同度量值下的公式

度量制	弧长公式	扇形面积公式	重要极限	泰勒展开式
角度制	$l=\frac{n\pi r}{180}$	$S=\frac{n\pi r^2}{360}$	$\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{180}{\pi}$	$\sin x=Cx-\frac{C^3x^3}{3!}+\frac{C^5x^5}{5!}+\cdots$
弧度制	$l=\lvert\alpha\rvert r$	$S=\frac{1}{2}\lvert\alpha\rvert r^2=\frac{1}{2}lr$	$\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$	$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$

设计意图：“图式阶段”需要引导学生从整体上把握所学，将弧度制与初中所学公式、重要极限、泰勒展开式建立紧密的联系。首先让学生在现有的基础上，自主学习，独立证明例 2。之后教师通过表 5，让学生感悟数学简洁之美，领悟人生之道。

3.4.2. 小结升华——雨课堂线上讨论

1) 本节课中，我们是怎样开展对弧度制的研究的？

2) 你如何理解 $180^\circ = \pi\ \mathrm{rad}$ ？

3) 利用弧度制我们可以解决怎样的问题？

师生活动：在教师的合理组织，精心分组下，学生水到渠成般地自主总结所学。

3.4.3. 布置作业——设计度量制

个人作业：教材第 175 页练习 2、5 题；小组作业：设计一种新的度量制，可度量长度、面积或角。

基金项目

2022 年吉林省高等教育教改研究重点课题：信息技术与大学数学课堂深度融合的改革研究与实践(JLJY202284029153)；2022 年吉林省高教学会科研课题：以学生为中心的数字化混合教学模式研究——以大学数学课程为例(JGJX2022C50)。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 王姿婷, 朱一心, 王安. 关于弧度制中几点误读的分析[J]. 数学通报, 2021, 60(12): 23-27.

[3] 朱一心. 弧度制教学中相关问题的问答[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2020, 41(2): 52-59.

[4] 李忠. 为什么要使用弧度制[J]. 数学通报, 2009, 48(11): 1-3.

[5] 常春艳, 白慧超, 汤志娜. 基于数学教学"二重原理"的弧度制教学设计形成研究[J]. 数学教育学报, 2020, 29(4): 34-37.

[6] 林伟芬. 基于四个理解的"弧度制"教学设计[J]. 中国数学教育, 2022(Z2): 55-62.

[7] 吴华, 周鸣. GeoGebra 环境下基于 APOS 理论的数学概念教学研究——以导数概念为例[J]. 数学教育学报, 2013, 22(2): 87-90.

[8] 江灼豪, 何小亚. 弧度制发展的历史溯源[J]. 数学通报, 2016,55(7): 14-17.

[9] 张奠宙, 朱成杰. 现代数学思想讲话[M]. 江苏: 江苏教育出版社, 1991.