

高中数学三角函数概念教学的研究

白冰^{1,2}, 赵雪¹

¹北华大学, 数学与统计学院, 吉林 吉林

²长春市九台区第一中学, 吉林 长春

收稿日期: 2023年6月13日; 录用日期: 2023年7月14日; 发布日期: 2023年7月21日

摘要

三角函数是高中数学教学中较难的章节, 同时也是解题中非常重要的函数之一。三角函数在数学及其他科学中应用非常广泛。如高考物理解题中也常用其表达。同时, 它也广泛应用于日常生活之中。正因如此, 在高中阶段学好三角函数及其应用对学生来讲是重中之重的任务, 我们也应对于其在实际问题中的重要作用深有体会。三角函数是高考热门考点, 其重点主要包括: 三角函数辅助角公式, 正、余弦函数, 正、余割函数, 正、余切函数的图象和性质, 三角函数的最值问题, 三角函数解不等式中的应用等。

关键词

三角函数, 高中数学, 概念教学

Research on the Concept Teaching of Trigonometric Function in High School Mathematics

Bing Bai^{1,2}, Xue Zhao¹

¹College of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

²No. 1 Middle School of Jiutai District, Changchun Jilin

Received: Jun. 13th, 2023; accepted: Jul. 14th, 2023; published: Jul. 21st, 2023

Abstract

Trigonometric function is a difficult chapter in high school mathematics teaching, and it is also one of the very important functions in solving problems. Trigonometric functions are widely used in

mathematics and other sciences. Such as college entrance examination physics problems are also commonly used in the expression. At the same time, it is also widely used in daily life. Because of this, it is a top priority for students to learn trigonometric functions and its application in high school. We should also have a deep understanding of its important role in solving practical problems. Trigonometric function is a popular subject in the college entrance examination, which mainly includes: trigonometric function auxiliary Angle formula, positive and cosine function, positive and cosecant function, positive and cotangent function image and property, trigonometric function maximum value problem, trigonometric function solution inequality application and so on.

Keywords

Trigonometry, High School Mathematics, Concept Teaching

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

三角函数是高中数学教学中必需的知识储备,其内容比较难以理解,但具有非常广泛的应用。三角函数的主要内容包括:周期函数的最值、单调性等问题,可以应用原有公式来进行直接的求解;诱导公式、二倍角公式的直接应用;正弦函数的图象及性质方面公式的直接应用及解三角形等等[1]。三角函数不仅能解决数学中的诸多问题,而且能对高考物理学中的题目进行简化使其更易求解,同时在日常生活当中也被广泛运用。

2. 三角函数的概念性学习

在三角函数教学中,教师首先要对函数概念进行讲解,让学生明白三角函数是沟通代数、几何、与平面向量等的一种工具。例如,在侧航海行程、山高、天文学、水面与航船相切的情况下,我们都可以运用正弦函数的一般式求解;时间的变换、物理方面的机械能守恒定律等都与其密不可分[2]。因此,三角函数如何应用,如何解决上述问题,如何发挥其作用,需要我们进行深一步的研究。在学习三角函数的过程中会有些吃力的地方,解答时容易遗漏一些重要节点,解题方法太多会选取不到最适宜的解答方式,由此在三角函数解题中会花费较多的时间。学生在大量的习题练习下,会逐渐寻找到最优的解答方式。高中除了运用三角函数的定义求解,还有一些三角函数常见的方法可以解答,比如运用诱导公式、三角函数的周期性求值等。通过对这些方法的研究,学生对三角函数的学习不再畏惧,从而能轻松应对。

3. 三角函数的发展简史

通过学习相关三角数学知识中,学生可以了解广义三角函数相关概念的发展史。三角函数理论一般常被称作三角学,它包括正、余弦函数,正、余切函数,正、余割函数等,它们之后又都被人广泛地统称为的广义三角函数理论(Trigonometric function)。下面我将对三角函数中的正弦、余弦、正切、余切函数的发展进行简单介绍。

3.1. 正弦函数与余弦函数的历史发展

依照《周髀算经》中记载的“勾股定理”,即直角三角形中最长的边叫做弦。《礼记月令》载:黄

道是圆形的, 室壁、参宿、尾宿连在一起, 颇像一张弓, 而参宿和尾宿的连线, 就像弓的弦。壁宿、参宿、尾宿的直线连接, 是一个直角三角形。其中参壁连线叫“勾”, 尾壁连线叫“股”, 而参尾连线叫“弦”。在古代星图上, 尾宿像三个圆形斛斗, 箕宿像一个方形斛斗, 这些星宿组在一起, 是谓“正”。奎、娄、昂、毕、参觜看上去颇像大小不一的排骨, 是谓“余”。那么所谓“正弦函数”, 即是“股弦函数”, 即是直角三角形较长边和斜边的比; 所谓“余弦函数”, 即是“勾弦函数”, 即是直角三角形较短边和斜边的比。

3.2. 正切函数与余切函数的历史发展

古时候, 受到天文学的启发著名学家僧一行编写了《大行历》一书。唐朝为了了解和获取地方的季节日照时长和所对应的日照长度, 就制作了太阳天君距离和白银尺长度的日照图, 也方便来了解太阳天顶距离和阴影长度的关系, 是所谓正切函数。而在西方国家观察到太阳高度和太阳的距离, 农场为了了解情况, 通过研究发现两者所成角是余角, 从而得出相应的余切函数[3]。

4. 高中数学三角函数教学的问题与要点

4.1. 三角函数在教学中的问题

4.1.1. 公式繁多, 识记不清

高中三角函数教学中要学习的公式非常多, 并且三角函数与方程和三角形之间的关系也较为复杂。在学习三角函数时, 学生会出现因公式太多而解题不清晰的问题, 利用所学的公式乱套用在题目当中, 或在做题的时候出现对公式的变换不理解的情形。如果在三角函数学习中, 解题思路不清晰或变形不当就会导致解题步骤增多, 最后得到的答案往往都会不一样。因此在三角函数的教学中, 教师对于三角函数公式可以分类, 使学生有规律的理解性记忆一系列公式, 并对于分类后的公式更有针对性的练习数学习题, 在题海战术的支援下, 将公式分门别类, 提升学生的惯性思维模式。

4.1.2. 公式变形复杂, 题型多样

三角函数公式变形比较复杂, 题型呈现多样化。一方面三角形的题型比较贴合生活, 会让学生在做题时产生共鸣, 激发学生的学习兴趣; 另外一方面, 学生在生活实际当中可以感受到数学来源于生活, 使其在学习三角函数时可以发现生活中与三角函数有关的现象与问题。所以在三角函数教学中, 我们可以运用三角函数的知识建立数学模型, 然后把建立的模型带入实际生活中进行实践研究。但越有效的问题设计就越会对学生数学知识建模有一定的能力要求, 学生在应对多样化的题型时, 常常会因公式不熟练导致对三角函数产生抵触情绪, 学生在解题时也会花费大量的时间和精力, 最后得出的答案很有可能还是错误的[4]。所以要加以引导和疏通他们对于三角函数大单元内容的知识体系的连贯性理解。

4.1.3. 三角函数概念不能有效的掌握

学生在学习三角函数的过程中只是用直角三角形的情形去推导概念, 在计算使只注重结果没有重视计算过程。学生在三角函数解答时耗费较长时间的原因也是由于学生对三角函数的概念没有完全理解清晰, 即便最终解答的答案正确也会浪费很长的时间去计算验证, 所以在教学中, 要重点针对三角函数的概念进行更为细致的讲解, 引导学生更深层次的挖掘其概念的由来, 有效掌握并且合理运用, 加强学生在三角函数解答题中的推导与运用能力。在掌握三角函数概念之后, 对于一些利用三角函数概念性解答的习题就可以快速的得出答案, 在做题时可以节约大量的时间。

4.2. 三角函数教学要点

4.2.1. 教学方式多样化, 加强学生的基础技能

三角函数的教学中运用的公式比较多, 且内容较为复杂。在传统的教学方式下, 学生面对太复杂的知识会产生抵抗心理, 学生在课堂上也会注意力不集中, 无法深入了解三角函数的定义域概念, 造成学生对三角函数产生记忆模糊的现象。由此, 教师在教学时可以利用多样化的教学方式, 对三角函数的基础性知识点进行细化, 强化训练, 完善学生对三角函数的概念理解与记忆, 从而引导学生熟练应用三角函数公式, 教师在教学时可以采用信息化教学方式, 让学生先在网上自行了解三角函数的意义, 以及三角函数的应用, 然后在教师的讲解下, 学生对课堂内容的了解会更加清晰。或者采用生活化的教学方式将三角函数问题与生活实际相结合, 让学生更加理解三角函数的定义以及在实际中的应用。

4.2.2. 夯实基础, 加强对三角函数概念的理解

三角函数是对三角形的演变延伸, 在完善学生三角形运用的基础, 将三角形与函数结合, 运用三角函数的定理剖析三角形, 将数学知识、数学概念进行强化, 从而解决更高深的数学问题。因此教师在教学的时候, 要考虑到问题实际的延伸性, 然后挖掘学生的运算能力, 在教学中点弦、切点弦问题的时候要注意运算公式, 教师在讲解这方面问题的时候可以找到类似题型的切入点, 对于相似题型有相应的拓展延伸, 通过一定的方式提高学生的问题运算能力, 提高学生解决类似题型的能力。

4.2.3. 布置适当的课后作业, 延伸课堂教学

高中三角函数的学习不仅仅局限于课堂上, 课后的学习与巩固也非常关键。在教学时教师可以适当的布置课后作业, 巩固课堂知识或者对课堂内容进行延伸, 让学生多见多练题型。教师在设计课后作业时可以对课堂的教学内容进行设计, 意在帮助学生巩固课堂知识, 增强学生的学习观念, 将三角函数的应用融会贯通, 达到三角函数学习的综合实践性以及应用性。有效的作业设计应从数学知识的根本认知出发, 从巩固课堂知识出发, 在数学学习上要散发学生的思维, 让学生具有空间立体思维模式可以更好的进行师生之间的沟通和交流。在三角函数的学习中, 教师布置适当的课后作业才能让学生将函数融会贯通, 提升学生的学习兴趣, 不断通过巩固课堂知识, 帮助学生建立良好的数学思维逻辑框架。

5. 三角函数的应用

5.1. 三角函数在数学中的应用

5.1.1. 在最值中的应用

三角函数课程中, 函数值的求最大值与最小值方法一直也是关于高中数学知识极其重要的内容, 同时函数也是中高考试题中一类比较的常参考到的题型。最值题型的设计主要是求解坐标轴上相关的两点与函数最值之间的关系, 以下举例说明三角函数在最值中的应用。

例 1. 在函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ ($A > 0, \omega > 0$) 中, A 和 b 与函数的最值有何关系?

解: A 和 b 与函数的最大值 y_{\max} , 最小值 y_{\min} 关系如下:

$$1) y_{\max} = A + b, \quad y_{\min} = -A + b.$$

$$2) A = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}, \quad b = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}.$$

5.1.2. 在不等式证明中的应用

高中数学阶段关于证明不等式的题目十分灵活且多变, 基本没有统一的解题模式和方法, 所以不等式问题的证明就成为了数学中的重难点。而我们针对某些类型不等式的证明, 已知变量间的大小关系, 根据

题目要求, 认真观察已知条件和所求结论的结构特点, 通过从不等式一边开始证得它的另一边, 将不等式的传递性按照先左后右的顺序化简, 而后建立相关量之间的等式关系, 用三角函数代替题目中的字母, 即令变量等于相关的三角函数, 确定变量的取值范围, 将代数不等式转化为三角不等式问题求解, 往往能简化证明过程, 达到事半功倍之效。如果人们在见到任何一个含有形式如形式的不等式时, 应该既是想通过观察它在中间的联系和的值域, 又是去有根号的需要, 可以直接得出其和, 此时, 问题很自然的就已经被变成了关于现在的我们就已经被熟知的了的关于三角函数的问题, 就可以利用三角函数的知识进行证明。

例 2. 已知 $x > y > z$, 求证 $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} \geq \frac{4}{x-z}$ 。

解: 题目是对分式不等式的证明, 发现分母全为字母且存在等式关系, 即 $(x-y)+(y-z)=(x-z)$, 联想到三角函数中同角三角函数基本关系, 即 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 三角代换即 $x-y = \cos^2 \alpha$, $y-z = \sin^2 \alpha$, 则 $x-z = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ 。整理等式后即可易得证。

5.1.3. 在解三角形中的应用

三角函数是历年高考的重点内容之一, 教师应引导学生对正余弦定理解三角形的方法等各方面有深刻的理解。其中重点包括: 利用三角变换公式、正余弦定理及三角形的有关性质解斜三角形、讨论三角形的形状及证明三角形中的恒等式, 而难点在于要注意利用三角形三个内角之间的关系以及每个内角的范围在变形中的作用。

例 1. 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $\frac{\tan B}{\tan C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$ 。

解: (化角为边——用余弦定理)

$$\text{左边} = \frac{\sin B \cos C}{\sin C \cos B} = \frac{\frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}{\frac{c}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \text{右边}$$

所以原式成立。

5.1.4. 在方程中的应用

代数是初等数学中最重要的一节课程内容, 在解决某些代数问题时如何能够更便捷地得到答案, 我们可以将高中数学人教 A 版必修一中所学到的三角函数来代换从而解决问题, 这样不仅可以解题易简, 而且还方便理解解题思维和所用方法, 不仅启发学生的解题思维, 开拓解题思路, 实现学生对于数学中所学到的知识体系融会贯通和实际操作。

5.2. 三角函数在物理学中的应用

在高考中, 数学知识和方法的应用也服务于部分物理试题的解答, 其中, 三角函数在物理学中的应用最为广泛。借助物理知识渗透考察数学能力也是高考和自主招生命题的永恒主题。高考物理考试大纲对学生应用数学工具解决物理问题的能力做出了明确的要求。三角函数在物理中的应用可以解决一些实际的物理问题。

例如, 在位移、加速度计算、振动频率等问题计算过程中, 可以运用三角函数

$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + b (A > 0, \omega > 0)$ 列式计算, 将公式与数值都套入在公式当中, 最终计算出答案。

再例如: 利用二倍角公式 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ 求极值, 如果所求物理量的表达式可以化 $y = A \sin \theta \cos \theta$, 则根据二倍角公式, 有 $y = \frac{A}{2} \sin 2\theta$, 当 $\theta = 45^\circ$ 时, y 有最大值 $y_{\max} = \frac{A}{2}$ 。

利用和差角公式
$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$
 求物理极值, 在力学部分求极值或讨论物理量

的变化规律时, 这两个公式经常会用到, 如果所求物理量的表达式为 $y = a \sin \theta + b \cos \theta$, 我们可以通过和差角公式转化为已知来求解最大值 $y_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。

5.3. 三角函数在实际生活中的应用

三角函数这个知识其实所能够运用到的学科范围相对比较之广, 它能够既被应用于基础数学领域的其他各个分支方面, 同时它也会应用于到其它许多学科, 例如天体物理, 航海以及测量工程等在实际应用生活场景当中, 同时你也同样会偶尔碰到有一些问题需要我们运用一些三角函数概念来解决。

例如, 在测量光照和楼距之间的关系时, 可以用三角函数计算, 当楼距达到一定长度时, 可以计算此时的太阳光照与楼层之间的是否满足一定的日照时长, 如果楼层过高, 楼与楼之前的距离太近的话, 低层住户会享受不到太阳光照射。所以在实际生活当中可以运用三角函数的定理, 测算太阳光照与楼距之间的关系, 当楼距达到一定值数时, 可以让每层住户都享受到太阳光照。

5.4. 三角函数模型的简单应用

三角函数其实是一种描述周期现象的数学模型, 可以用来研究很多的数学问题, 其在验证周期变化规律的同时, 在预测等方面也发挥着十分重要的作用。例如在解答太阳光照与潮汐问题时也可以给学生展示怎样运用模型化思维建立三角函数框架体系, 从而解答数学问题的方式与过程。

5.4.1. 三角函数模型应用的步骤

在应用三角函数模型时, 需要先依据题目要求建立三角函数模型, 然后根据已知条件求得某处的函数值, 进而解答函数问题。关键性步骤在于审题、建模、套入已知条件、求解、然后解决实质性问题。一般在建模时就要把已知条件套入到公式中, 设立代表函数, 再用系数求解。

5.4.2. 三角函数模型的拟合应用

在三角函数模型拟合应用的过程中, 需要画出相应的数据图象, 然后观察图象, 获得具体的函数模型, 利用函数模型解答数学问题。三角函数模型的拟合应用一般可以解答三角形问题和三角形单调性问题, 在坐标轴上画出具体的点位, 最后套入已知数求解。

6. 结束语

函数是一项基本但却非常重要的内容, 在数学和其他科目当中都有非常广泛的应用, 因此学好三角函数的应用对于学生来讲是必备的环节。三角函数是以角度为自变量, 在数学分析中, 三角函数也被定义为无穷级数[5]。三角函数同样出现在高考物理中, 为学生提供重要的解题思路。三角函数的学习中, 利用几何画板等数学软件辅助教学是更加重要的, 它帮助我们画出三角函数的图象, 还能为我们分析三角函数的性质提供支持。

基金项目

吉林省教育科学“十三五”规划课题; 基于职后融合理念的硕师“数学教学设计与案例研究”课程的混合式教学模式设计与应用研究; 项目号 GH20271。

面向硕师群体开设的“数学教学设计与案例研究”课程混合式教学模式设计与实践研究, 项目号: JG2021022, 北华大学 2021 研究生教育教学改革与实践项目。

参考文献

- [1] 刘丽花. 三角函数概念教学及历史发展的调查研究[D]: [硕士学位论文]. 石家庄: 河北师范大学, 2012.
- [2] 赵春祥. 高考中的三角函数知识点常考题型解析[J]. 考试(高考数学版), 2007(Z3): 106-110.
- [3] 苏艳. 三角函数知识及教学研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 西北大学, 2015.
- [4] 王爱红. 关于三角函数类高考考题的研究、预测及对策[J]. 数学教学科教文汇, 2008: 83-89.
- [5] 段晓晓. 高中生三角函数内隐学习的研究[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东师范大学, 2014.