*Artificial Intelligence and Robotics Research* 人工智能与机器人研究, 2013, 2, 64-66
http://dx.doi.org/10.12677/airr.2013.21011 Published Online February 2013 (http://www.hanspub.org/journal/airr.html)

# Computer Control Algorithm of Singular Leontief Input-Output Model*

**Lei Jiang, Jian'an Fang**

Donghua University, Shanghai
Email: leij@dhu.edu.cn, wang-sunduan@sohu.com

Received: Feb. 11th, 2013; revised: Feb. 18th, 2013; accepted: Feb. 19th, 2013

**Abstract:** This paper deals with the problems of stability and computer control for the economic discrete-time singular dynamic input-output model. The singular dynamic input-output system is directly treated with without converted to general system. A sufficient stability condition under which the model is admissible is proved. Base on this, a state feedback stability criterion is established. Finally, the corresponding method of computer simulation and control is provided.

**Keywords:** Dynamical Input-Output Model; Economical Cybernetics; Computer Control System

# 广义 Leontief 投入产出模型的计算机控制算法*

**江　磊，方建安**

东华大学，上海
Email: leij@dhu.edu.cn, wang-sunduan@sohu.com

收稿日期：2013 年 2 月 11 日；修回日期：2013 年 2 月 18 日；录用日期：2013 年 2 月 19 日

**摘　要：**在传统的经济学中，经济系统的发展应当是开放的持续增长的过程，然而资源的有限性限制了经济系统的最终规模，目前一般认为经济系统的发展轨迹应当是逐步趋于稳定状态。因此研究经济系统的是否能够达到稳定状态以及相应的控制算法对于经济学的研究具有重要的意义。本文对投入产出经济学中的离散广义动态投入产出模型进行模拟与控制，以使经济系统的各个部门能够协调发展，并趋于一个稳定的发展状态。通过使用新的数学方法，广义投入产出模型不需要转化成一般的线性模型可以直接研究其稳定性，从而减少了研究的复杂性。本文首先研究动态投入产出模型能够趋于稳定状态的条件，并基于此设计相应的控制算法，最后利用计算机编写相应的模拟与控制程序。

**关键词：**动态投入产出模型；经济控制论；计算机控制系统

## 1. 引言

近来，经济学家逐渐重视经济系统的计算机控制问题的研究。最初计算机主要用来求解经济系统的方程[1]。此后，由于需要对经济系统进行模拟与控制，对经济系统进行计算机控制成为研究的热点[2]。通常，在投入产出问题的研究中，投入产出模型一般通过选取适当的状态向量等把广义系统转换为一般系统，但是转换后的变量失去了原有的经济学意义，因此需要引入新的方法直接研究广义系统[3]。本文将使用线性矩阵不等式直接研究离散广义模型，提出模型稳定的一个充分条件，并设计相应的计算机控制系统。

*基金项目：上海市基础研究重点项目资助(编号：09JC1400700)，上海市基础研究重点项目资助(编号：09JC1400700)，国家自然科学基金项目(编号：60874113)，教育部高校博士点基金项目(编号：200802550007)，上海市教委科研创新重点项目(编号：09zz66)。

## 2. 经济模型的建立

考虑投入产出经济学中的广义动态投入产出模型：

$$Bx(k+1)=(I-A+B)x(k)-\bar{Y}(k) \tag{0}$$

其中 $rankB=r<n$，因此系统(0)是一个广义系统。下面研究其稳定性条件。

定义 1：标称离散时间广义动态投入产出系统：

$$Ex(k+1)=Ax(k) \tag{1}$$

1) 系统(1)如果满足 $\det(sE-A)$ 不恒等于零，则称之为正则的[4]。

2) 系统(1)如果满足 $\deg(\det(sE-A))=rankE$，则称之为因果的[4]。

3) 系统(1)如果满足 $\det(sE-A)=0$ 的根都落在单位圆内，则称之为稳定的[4]。

4) 系统(1)如果是正则的、因果的、稳定的，则称系统(1)为可容许的[5]。

## 3. 稳定性分析

我们将首先研究离散时间广义动态投入产出经济系统稳定的条件。考虑 $\bar{Y}(k)=0$ 的情况，系统(1)转化为

$$Bx(k+1)=(I-A+B)x(k)\text{。} \tag{2}$$

针对系统(2)，则有以下结论：

定理 1：离散时间广义动态投入产出模型(2)是可容许的，如果存在适当维数的矩阵 $\boldsymbol{P}>0$，$Q$ 和 $S$ 满足：

$$\Sigma+\Sigma^T<0 \tag{3}$$

$$B^TS=0 \tag{4}$$

其中

$$\Sigma=\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}A^TPA-PA+PB-A^TPB+QS^T$$
$$-QS^TA+QS^TB$$

证明：根据线性代数，存在两个非奇异矩阵 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$ 满足

$$B=\boldsymbol{M}\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{M}^{-1}(I-A+B)\boldsymbol{N}^{-1}=\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}\text{。}$$

此时，$S$ 可以选择为：

$$S=\boldsymbol{M}^{-T}\begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

令：$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}^{-T}\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}\boldsymbol{M}^{-1}$，$Q=\boldsymbol{N}^T\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$。

将上式代入(3)中，我们可以得到

$$\begin{aligned}\Sigma+\Sigma^T &= \boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}A-A^T\boldsymbol{P}+A^T\boldsymbol{P}A+\boldsymbol{P}B-A^T\boldsymbol{P}B+B^T\boldsymbol{P} \\ &\quad -B^T\boldsymbol{P}A+QS^T-QS^TA+QS^TB+SQ^T \\ &\quad -A^TSQ^T+B^TSQ^T \\ &= \boldsymbol{N}^T\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}N<0\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}Z_{22} &= \boldsymbol{T}_2^TP_1\boldsymbol{T}_2+\boldsymbol{T}_4^TP_2\boldsymbol{T}_2+\boldsymbol{T}_2^TP_2\boldsymbol{T}_4 \\ &\quad +\boldsymbol{T}_4^TP_3\boldsymbol{T}_4+Q_2\boldsymbol{T}_4+\boldsymbol{T}_4^TQ_2^T\end{aligned}$$

从上式，可以推出 $Z_{22}<0$，并且矩阵 $\boldsymbol{T}_4$ 是非奇异的。令：$\boldsymbol{T}=I-A+B$。

则有

$$\begin{aligned}\det(sB-\boldsymbol{T}) &= \det\left(\boldsymbol{M}\begin{bmatrix} sI_1-\boldsymbol{T}_1 & -\boldsymbol{T}_2 \\ -\boldsymbol{T}_3 & -\boldsymbol{T}_4 \end{bmatrix}\boldsymbol{N}\right) \\ &= \det(\boldsymbol{MN})\det\left(\begin{bmatrix} sI_1-\boldsymbol{T}_1 & -\boldsymbol{T}_2 \\ -\boldsymbol{T}_3 & -\boldsymbol{T}_4 \end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

显然 $\det\left(\begin{bmatrix} sI_1-\boldsymbol{T}_1 & -\boldsymbol{T}_2 \\ -\boldsymbol{T}_3 & -\boldsymbol{T}_4 \end{bmatrix}\right)$ 是不恒等于零的，且其次数为 $rankB$，所以 $\det(sB-\boldsymbol{T})$ 是不恒等于零，并且 $\deg(\det(sB-\boldsymbol{T}))=rankB$。因此模型(2)是正则、因果的。则根据[4]，存在两个非奇异矩阵 $\tilde{M}$ 和 $\tilde{N}$ 使得

$$B=\tilde{M}\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\tilde{N}\text{，}\quad I-A+B=\tilde{M}\begin{bmatrix} \tilde{T} & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\tilde{N}$$

此时 $S$ 可以选作：$S=\tilde{M}^{-T}\begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix}$。

定义

$$P=\tilde{M}^{-T}\begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_2^T & \tilde{P}_3 \end{bmatrix}\tilde{M}^{-1}\text{，}\quad Q=\tilde{N}^T\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}\text{。}$$

把上面两式代入(3)，我们得到：

$$\tilde{N}^T\begin{bmatrix} \tilde{T}\tilde{P}_1\tilde{T}-\tilde{P}_1 & \tilde{T}\tilde{P}_2+\tilde{Q}_1 \\ \tilde{P}_2^T\tilde{T}+\tilde{Q}_1^T & \tilde{P}_3+\tilde{Q}_2+\tilde{Q}_2^T \end{bmatrix}\tilde{N}<0$$

使用 Schur 补引理，我们知道 $\tilde{T}\tilde{P}_1\tilde{T}-\tilde{P}_1<0$。根据

[4]，可以知道 $\det(sB-T)=0$ 的所有根都位于以原点为圆心的单位圆内。因此系统(2)是稳定的。因此也是可容许的。

注记 1：定理 1 提供了一个离散时间广义动态投入产出模型是可容许的充分条件，基于此可以设计相应的控制器。

定理 2：离散时间广义动态投入产出模型(1)是可容许的，如果存在适当维数的 $P>0$，$Q$，$G$ 和 $S$ 满足：

$$\Sigma_0+\Sigma_0^T<0 \tag{5}$$

$$E^T S=0$$

其中

$$\begin{aligned}\Sigma_0=&\frac{1}{2}\left(P+A^T PA+G^T PG\right)+A^T PG-PA-PG\\&+PB-A^T PB-G^T PB+QS^T\\&-QS^T A-QS^T G+QS^T B\end{aligned}$$

此时，状态反馈控制器可以设计为 $\bar{Y}(k)=Gx(k)$。

证明：将控制器代入系统(0)，则有

$$Bx(k+1)=\left[I-(A+G)+B\right]x(k) \tag{6}$$

下面我们证明系统(6)是可容许的。根据(5)则有

$$\begin{aligned}\Sigma_0+\Sigma_0^T=&P+A^T PA+A^T PG+G^T PA+G^T PG-PA\\&-PG+PB-A^T PB-G^T PB+QS^T-QS^T A\\&-QS^T G+QS^T B-A^T P-G^T P-B^T PA\\&-B^T PG+SQ^T-A^T SQ^T-G^T SQ^T+B^T SQ^T\\=&\left[\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}(A+G)^T P(A+G)-P(A+G)\right.\\&+PB-(A+G)^T PB+QS^T-QS^T(A+G)\\&\left.+QS^T B\right]+\left[\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}(A+G)^T P(A+G)\right.\\&-P(A+G)+PB-(A+G)^T PB+QS^T\\&\left.-QS^T(A+G)+QS^T B\right]^T\end{aligned}$$

根据定理 1，可知系统是可容许的。定理 2 得证。

## 4. 计算机控制算法设计

根据定理 2，我们利用 matlab 的 LMI 工具箱求解相应的控制参数，从而可以设计相应的计算机控制系统。在这里我们考虑参数如下的系统(0)：

$$B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.6\\0 & 0\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}-0.3 & -1.4\\3.45 & 4\end{bmatrix}$$

容易验证系统(0)的开环系统是不稳定的。利用 matlab 得到定理 2 的解是：

$$S=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T,\quad Q=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T,$$

$$P=\begin{bmatrix}1.014 & 0\\0 & 1.0055\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}-4.7 & -4\\3 & 3\end{bmatrix}。$$

则控制器可以设计为：

$$\bar{Y}(k)=\begin{bmatrix}-4.7 & -4\\3 & 3\end{bmatrix}x(k)。$$

则系统转化为

$$\begin{bmatrix}0.5 & 0.6\\0 & 0\end{bmatrix}x(k+1)=\begin{bmatrix}6.5 & 6\\-6.45 & -6\end{bmatrix}x(k)。$$

利用计算机模拟其状态曲线，可以证明系统是稳定的。

## 5. 总结

一般来说，研究广义投入产出系统是首先将广义系统转换为一般线性系统，然后利用线性系统的理论进行研究。转换为线性系统的方法，通常需要引入新的变量进行变量代换，而新的变量则没有经济意义，从而增加了研究的难度。本文利用新的数学方法，对广义动态投入产出模型进行了直接研究而并不需要把广义系统转化为一般线性系统。首先证明了模型趋于稳定状态的条件，进而设计了相应的计算机控制系统。本文的作者非常感谢所有给文章提出意见和建议的专家学者。

## 参考文献 (References)


[1] O. Lang. Introduction to economic cybernetics. Oxford: Pergaman Press, 1970: 89-92.

[2] Z. S. Zhu, C. Y. Dang and Y. Y. Ye. A FPTAS for computing a symmetric Leontief competitive economy equilibrium. Mathematical Programming, 2012, 131(1-2): 113-129.

[3] S. Paul, V. W. Alain and K. Achim. A simple robust control for simulated moving bed chromatographic separation advanced control of chemical processes. Proceedings of the 8th IFAC International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes, 2012: 137-142.

[4] L. Dai. Singular control systems. Berlin: Springer-Verlagh, 1989: 135-138.

[5] S. Xu, J. Lam. Robust stability and stabilization of discrete singular systems: An equivalent characterization. Asian Journal of Control, 2003, 5: 399-405.