

# Shape Reconstruction of Flaws Using Modified KIRCHHOFF Approximation in Inhomogeneous Material\*

Gangfeng Zheng<sup>1</sup>, Bin Wu<sup>2</sup>, Cunfu He<sup>2</sup>

<sup>1</sup>College of Materials Science and Engineering, Anhui University of Science and Technology, Huainan

<sup>2</sup>College of Mechanical Engineering & Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing  
Email: gfzheng166@163.com

Received: Mar. 1st, 2011; revised: Apr. 15th, 2011; accepted: Apr. 16th, 2011.

**Abstract:** In recent years, research on propagation characteristic of wave in inhomogeneous media attracts much attention among experts and scholars in various domains. First, mathematic expression for scattering cross section  $P(\omega)$  in inhomogeneous is deduced. Then, quantization of Kramers-Kronig relation in inhomogeneous medium containing scatterers is given. Based on the frequency change, the phase velocity due to the inhomogeneous material is introduced into two-dimensional Kirchhoff approximation formula. Finally, this paper reconstructs the flaw shapes in inhomogeneous medium using backscattered ultrasound through experimental method and the results verify the feasibility of flaw scattering theory.

**Keywords:** Shape Reconstruction; Kirchhoff Approximation; Kramers-Kronig; NDE

## 用改进的 Kirchhoff 近似方法对非均匀介质中缺陷形状重构\*

郑钢丰<sup>1</sup>, 吴斌<sup>2</sup>, 何存富<sup>2</sup>

<sup>1</sup>安徽理工大学材料科学与工程学院, 淮南

<sup>2</sup>北京工业大学机械电子与工程技术学院, 北京

Email: gfzheng166@163.com

收稿日期: 2011 年 3 月 1 日; 修回日期: 2011 年 4 月 15 日; 录用日期: 2011 年 4 月 16 日

**摘 要:** 近年来关于波在非均匀介质中传播特性方面的研究引起了各领域专家、学者的广泛关注。本文首先导出了非均匀介质中散射体散射截面  $P(\omega)$  的表达式, 对含不相关散射体及含相关散射体的非均匀介质中的 Kramers-Kronig 关系的相值进行量化, 并且以变化的频率为桥梁, 引入相速度构造非均匀介质中的二维 Kirchhoff 近似公式, 最后通过实验的方法获取数据应用此公式对非均匀介质中的缺陷形状进行重构, 重构的结果反映了理论公式的可行性。

**关键词:** 形状重构; Kirchhoff 近似; Kramers-Kronig; 无损检测

### 1. 引言

国内外学者近年来对均匀介质中的无损探伤进行了广泛的研究<sup>[1-3]</sup>。众所周知, 材料介质的特性会对在其中传播的超声波产生较大影响。然而, 在非均匀介质中由于夹杂、包裹体的存在使得超声波在其中传播时产生散射和绕射现象, 致使超声波在传播过程中会

发生衰减, 衰减系数随其频率而变化且依赖于夹杂、包裹体的尺寸和所占的体积比。与此同时, 衰减还与其在介质中传播的相速度有关。在理论计算时若考虑相速度对频散的依赖时, 那么非均匀介质中的缺陷形状以及尺寸就能够被较准确的重构出来。

在我们的研究中, 提出一种在含有夹杂体的非均匀介质结构中重构有限尺寸缺陷的方法——以变化的频率为桥梁, 引入相速度构造二维 Kirchhoff 近似方法, 这种方法同时考虑到了缺陷与夹杂体的尺寸比例

\*基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No.10872001)、安徽省优秀青年科技基金资助项目(No.10040606Y26)和淮南市科技计划项目(No.2010A03117)资助。

关系。建立在二维 Kirchhoff 近似基础之上的且由于缺陷的存在而产生背散射波的线性逆散射方法<sup>[4]</sup>被应用到缺陷形状的重构中来。

## 2. 基本方程

### 2.1. $P(\omega)$ 表达式的导出

在弹性区域  $R$  内, 散射波场的位移方程用下式表示

$$u_i = u_i^0 + u_i^s \quad (1)$$

相应的应力场的表达式是

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^s \quad (2)$$

于是在超声波波场中强度矢量  $I_i$  可以用下面的式子来表示

$$I_i = \sigma_{ij} \dot{u}_j \quad (3)$$

其中,  $\sigma_{ij}$  表示应力场,  $\dot{u}_j$  表示速度场。

下面用  $I = I_i n_i$  来表示波在传播方向上单位面积法方向的能量传播率。 $n_i$  表示传播方向上的单位法向量。由于假定入射波是沿  $z$  轴方向传播的, 故此

$$I_3 = \sigma_{3j} \dot{u}_j^0 \quad (4)$$

那么能量流或通过平面  $A$  的单位法矢量方向上的能量率可以表示为

$$P = \int_A I_i n_i dA = \int_A n_i \sigma_{ij} \dot{u}_j dA \quad (5)$$

那么, 整个截面的面积  $P(\omega)$  是向各个方向散射的平均能量流与入射场的平均强度的比率, 即

$$dP(\omega) = \langle \hat{r}_i \sigma_{ij}^s \dot{u}_j^s \rangle dA \langle I^0 \rangle^{-1} \quad (6)$$

其中,  $\hat{r}_i$  是  $r$  方向上的单位矢量。然而在距离坐标中心  $r$  处有

$$dA = r^2 d\Omega \quad (7)$$

其中,  $d\Omega$  是固体角的微元。

对上述两式作除法得

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{\langle r^2 \hat{r}_i \sigma_{ij}^s \dot{u}_j^s \rangle}{\langle I^0 \rangle} \quad (8)$$

为了使得上式更有现实意义, 特对上式的右端取极限得

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\langle r^2 \hat{r}_i \sigma_{ij}^s \dot{u}_j^s \rangle}{\langle I^0 \rangle} \quad (9)$$

取极限的过程是非常必要的, 因为一般情况下  $r$  是远离坐标中心的位移矢量。

在  $\Omega$  上对上面的式子两端取积分, 即可得到一个散射体的散射截面面积  $P(\omega)$ , 其表达式如下式所示<sup>[5]</sup>。

$$P(\omega) = \frac{4\pi}{k_L} \text{Im} \tilde{A}_3(0) \quad (10)$$

其中,  $k_L$  是纵波波数,  $\tilde{A}_3(0)$  是纵波散射幅值在方位角方向上的平均值。

### 2.2. Kramers-Kronig 关系式

在非均匀介质中, 相速度与角频率之间的关系可以由 Kramers-Kronig 来表示。根据 Kramers-Kronig 关系, 非均匀介质中的相速度  $c_L(\omega)$  可以表示为

$$c_L(\omega) = c_L^0 \left[ 1 + \frac{2\omega^2 c_L^0}{\pi} p.v. \int_0^\infty \frac{\alpha(\omega')}{\omega'^2 (\omega'^2 - \omega^2)} d\omega' \right]^{-1} \quad (11)$$

其中,  $c_L^0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} c_L(\omega)$ ,  $\alpha(\omega')$  可以由式(14)计算得到, 式子中的积分满足积分哥西准则。下面给出积分哥西准则的定义。

积分哥西准则: 广义积分  $\int_a^\infty f(x) dx$  收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0$ , 当  $A' > B, A'' > B$  时, 有,

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad (12)$$

综上所述, 介质中的相速度是可以由 Kramers-Kronig 关系来表示的。下面给出超声波在非均匀介质中传播的相速度表达式。

### 2.3. 非均匀介质中的相速度表达式

根据 Kramers-Kronig(克拉茂 - 克朗尼希)关系, 非均匀介质中的相速度可以统一表示成下面的形式

$$C_L(\omega) = C_L^0 \left[ 1 + \frac{2\omega^2 C_L^0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha(\omega')}{\omega'^2 (\omega'^2 - \omega^2)} d\omega' \right]^{-1} \quad (13)$$

其中,  $C_L^0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} C(\omega)$  是相速度静态时的极限值。在含不相关散射体的介质中, 上述式子中的  $\alpha(\omega')$  可以表示成如下的形式

$$\alpha(\omega') = \frac{1}{2} N P(\omega') \quad (14)$$

$N$  表示单位体积内所含散射体颗粒的数量,  $C_L^0$  可以由上述的相速度静态时的极限值公式得出。 $\alpha(\omega')$  可以由以上的推导得到, 显然, 对相速度的统一形式积分后表达式中仅含变量  $\omega$ , 而  $\omega = 2\pi f$ , 也就是说相速度最终可以用波在介质中传播的频率来表示。

### 3. 非均匀介质中的二维 Kirchhoff 近似法

我们定义  $\gamma_H(x)$  为非均匀介质结构中缺陷  $D^c$  处的特征函数, 在缺陷的内部时其值为单位 1 (如图 1 所示)。关于均匀、各向同性介质中的二维平面型 Kirchhoff 近似公式表达式如下<sup>[6]</sup>,

$$\gamma_H(x) = -\frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\hat{y}_m}{u^0 k_L} A_m(k_L, \hat{y}) e^{2ik_L \hat{y} \cdot x} k_L dk_L d\hat{y} \quad (15)$$

方程  $\gamma_H(x)$  重构了二维弹性平面内缺陷的形状。研究中将非均匀介质中的相速度 ( $C_L(f)$ ) 引入到二维平面型 Kirchhoff 近似公式(15)中, 即将式(15)中相关变量的具体表达式

$$k_L = \frac{2\pi f}{C_L(f)}; \quad dk_L = 2\pi \frac{C_L(f) - fC'_L(f)}{C_L^2(f)} df; \quad C'_L(f) = dC_L(f)/df。$$

代入式(15)中从而得到非均匀介质中缺陷形状的重构公式:

$$\gamma_H(x) = -\frac{4}{\pi} \oint_0^\infty \frac{\hat{y}_m A_m(f, \hat{y})}{iu^0 C_L(f)} \left( 1 - \frac{f}{C_L(f)} C'_L(f) \right) \exp\left(i \frac{4\pi f}{C_L(f)} \hat{y} \cdot x\right) d\hat{\Omega}(\hat{y}) \quad (16)$$

其中,  $\Omega(\hat{y})$  表示在单位圆上积分。

### 4. 实验研究结果

直径是 110 mm 由沙子和水泥按 1:5 的体积比制成的试件如图 2 所示。试件包含圆柱通孔缺陷和截面是平行四边形的四棱柱通孔缺陷。实验系统装置如图 3 所示。缺陷的散射波形由纵波-纵波脉冲发射/接收的方法测得。测量中一个直径是 12.7 mm 的接触式传感器在  $x_3$  为某一值时, 沿  $x_1 - x_2$  平面每隔  $10^\circ$  测量一次。实验中选择具有粘性的蜂浆作为耦合剂, 它具有很好的超声耦合与固定传感器的作用。传感器由脉冲发射/接收仪产生 300 V 的方波信号激励, 数字示波器

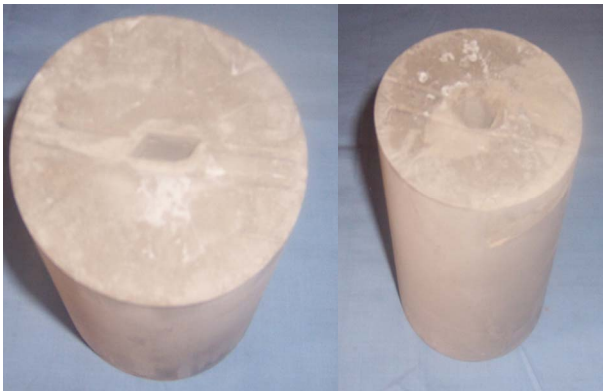


Figure 2. Experiment specimens  
图 2. 实验试件

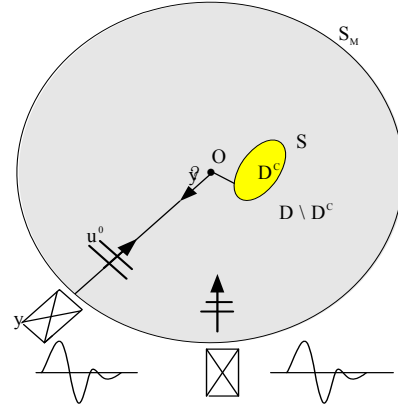


Figure 1. Pulse-echo configuration for backscattering data  
图 1. 后向散射数据的脉冲回波示意图

和 PC 机用来对数字信号的处理和缺陷形状的重构。传感器的中心频率是 1 MHz。

实验测量得到的信号经过处理<sup>[7]</sup>后, 重构出的缺陷形状如图 4 和图 5 所示。由于我们实验中是沿  $x_1 - x_2$  平面每隔  $10^\circ$  测量一次, 因而共获取 36 次缺陷散射回波的幅值用来重构缺陷的形状。

图 4 和图 5 分别显示了截面圆形缺陷孔和截面平行四边形缺陷孔的实验重构结果。重构中频率的范围介于 0.2 MHz~1.875 MHz。用引进相速度后的二维 Kirchhoff 近似方法重构出的缺陷图形基本能够反映缺陷的基本特征。



Figure 3. Experimental system  
图 3. 实验系统

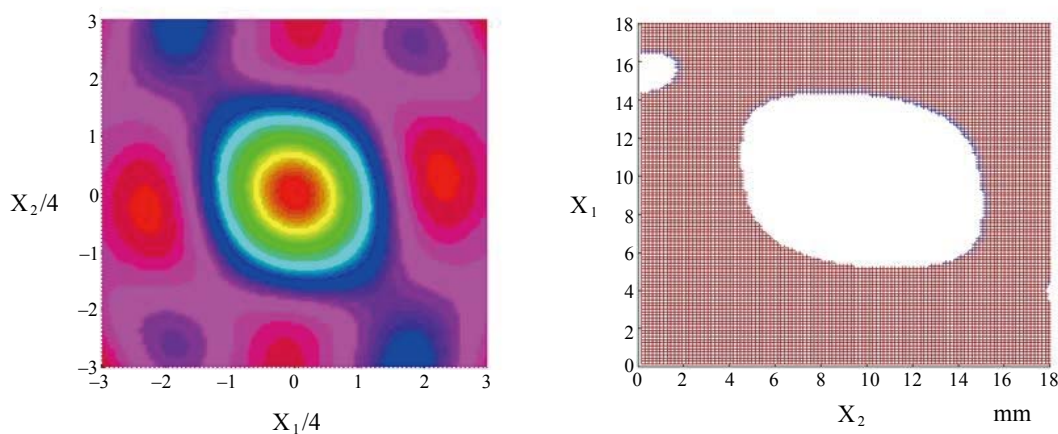


Figure 4. Reconstructed shape of cross-section parallelogram void

图 4. 平行四边形空穴缺陷截面重构图

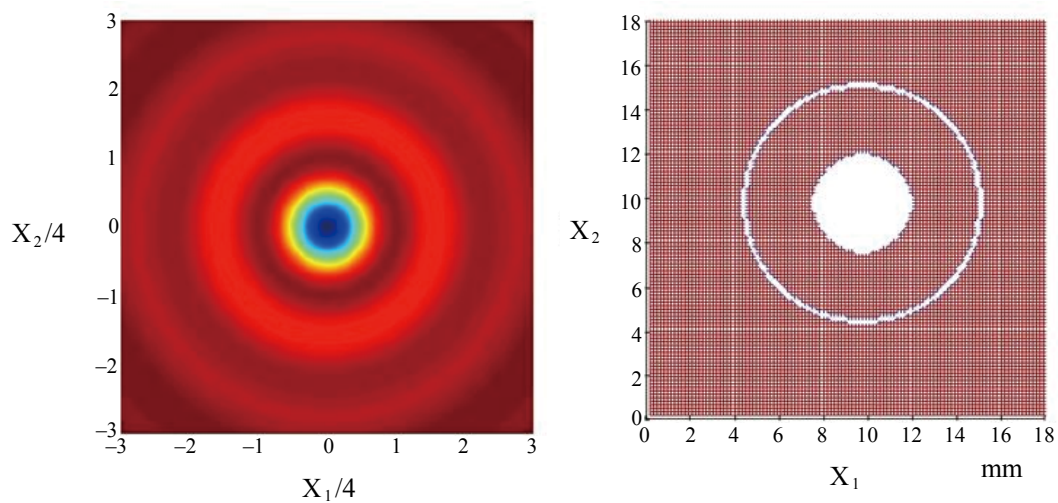


Figure 5. Reconstructed shape of cross-section circle void

图 5. 圆形空穴缺陷截面重构图

## 5. 结论

本文把超声波在非均匀介质中传播时的相速度引入到均匀介质中的二维 Kirchhoff 近似公式中,并用实验的方法重构了非均匀介质中缺陷的截面形状。重构结果充分说明引入相速度后的二维 Kirchhoff 近似公式对重构非均匀介质中的缺陷形状的有效性。

## 参考文献 (References)

- [1] G. Alessandrini, A. Bilotta, G. Formica, et al. Numerical size estimates of inclusions in elastic bodies. *Inverse Problems*, 2005, 21(1): 133-151.
- [2] J. E. Michaels, T. E. Michaels. Guided wave signal processing and image fusion for in situ damage localization in plates. *Wave Motion*, 2007, 44(6): 482-492.
- [3] M. Kitahara, K. Nakahata, and S. Hirose. Elastodynamic inversion for shape reconstruction and type classification of flaws. *Wave Motion*, 2002, 36(4): 443-455.
- [4] J. L. Rose. *Ultrasonic waves in solid media*. Cambridge University Press, 1999.
- [5] M. Kitahara, T. Takahashi. Calculation and measurement of ultrasonic attenuation for distributed cracks in a solid. *Review of Quantitative Nondestructive Evaluation*, 2003, 657(1): 1156-1163.
- [6] 郑钢丰. 结构中的逆散射理论与缺陷成像[D]. 北京工业大学, 2008.
- [7] G. F. Zheng, B. Wu, and C. F. He. Shape reconstruction of three dimensional flaw from backscattering data. *Measurement*, 2007, 40(9-10): 854-859.