

Research on Analytical Solution Algorithm of Magnetic Field of Cylinder Conductor

Lu Sun¹, Lihong Zhang², Changli Sun³, Chunyan Chen³

¹Xingyang Municipal Bureau of Land Tax, Xingyang Henan

²Henan Province Construction Bank, Zhengzhou Henan

³Xingyang Water Bureau, Xingyang Henan

Email: 1273461939@qq.com

Received: May 6th, 2018; accepted: May 20th, 2018; published: May 29th, 2018

Abstract

The analytical solution of the magnetic field of the cylindrical conductor is more advantageous than the approximate numerical solution. This paper optimizes the equivalent substitution relation of arc differential under arc condition and stereoscopic coordinate system under two-dimensional condition. It reduces the number of variables in the function and reduces the difficulty of integration. The integral process avoids the problem of total elliptic integration. It can be used to calculate the exact value of electromagnetic field of the cylindrical guide rail of the electromagnetic gun.

Keywords

Smooth Curve, Arc Differential, Equivalent Substitution, Analytic Solution

圆柱导体磁场的解析解算法研究

孙璐¹, 张丽鸿², 孙长利³, 陈春燕³

¹荥阳市地税局, 河南 荥阳

²河南建行, 河南 郑州

³荥阳市水务局, 河南 荥阳

Email: 1273461939@qq.com

收稿日期: 2018年5月6日; 录用日期: 2018年5月20日; 发布日期: 2018年5月29日

摘要

圆柱导体磁场的解析解比近似数值解算法更有优越性。把平面光滑曲线弧微分拓展到立体坐标系中，二维条件下的弧微分与立体坐标下的弧微分构成优化的等价代换关系，减少了函数中变量的数量，积分过程避开了解全椭圆积分，降低了积分的难度，积分结果得到了有限形式的封闭解。可用于电磁炮圆柱导轨电磁场的精确值计算。

关键词

光滑曲线，弧微分，等价代换，解析解

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文以探讨有限长圆柱导体磁场的解析解，解决其精确值的计算方法问题为目的。解析解能够直接揭示函数的变化规律，用解析方法得到的解析解能够用显式表达变量之间的依赖关系，这是其它形式所不能替代的，该独特的优势使解析解成为函数积分的核心内容。起着决定作用的解析解不存在数值不稳定的问题，可被人重复导出，具有科学美，解析解的计算量极少，计算精度高，可以用于校验数值解，解析解是数值解的基础，数值解与解析解不一致时，数值解必然有误，解析解作为计算公式易于掌握，被广泛用于解决工程问题[1]。

很长时间内，电磁场的解析解局限在揭示一维和二维的函数变量关系，虽然也可以求得个别三维介质中的解析解，但仅局限于特殊的、简单的变量条件，缺乏普适性。现有磁场解析方法的综合应用，对于一维或二维的问题，一般只需要一种解析方法就能求解；对于三维问题，常需要结合多种方法才能求解[1]。实际中都为三维介质，近 10 多年，电磁场解析方法尽管取得了巨大进步，就简单的均质直导体来说，无论无限长、有限长直导线都可得到其磁场的解析解，但对于三维的有限长圆柱导体，要求其空间任一点的磁场，就目前的算法，由于是圆形场源的存在，不可避免的要遇到解全椭圆积分问题，鉴于全椭圆积分没有解析解，除个别特殊点可积分外，大都不可积，往往是借助于计算机软件来完成其近似的数值计算。探讨圆柱导体磁场的解析解算法对电磁学教学、工程应用都显得很有必要。

2. 平面光滑曲线与立体坐标下的弧微分等价代换法

2.1. 弧微分等价代换法即 $ds(\Phi) = ds(\alpha)$

如图 1，以电流方向平行于 $\odot O$ 电流环圆心轴的电流元 idl 在任一点 $P(a, y, z)$ 所在平行圆周 $\odot O'$ 上，沿 P 点切线方向的磁场 $dB_{切}$ 为例，讨论弧微分等价代换法即 $ds(\Phi) = ds(\alpha)$ 成立。

在 $\triangle AOA'$ 中，过 A 作 $AM \perp OA'$ 交 OA' 于 M ， $|AM| = |OA| \sin \Delta\Phi = r_x \sin \Delta\Phi$ ， $|A'M| = |OA'| - |OM| = r_x - r_x \cos \Delta\Phi$ ； $|PP'| = a$ ， $|AP| = \rho$ ， $|A'P| = \rho + \Delta\rho$ ， $\angle APP' = \alpha$ ， $\angle APA' = \Delta\alpha$ ，过 A 作 $AD \perp PA'$ 交 PA' 于 D ， $|AD| = |AP| \sin \Delta\alpha = \rho \sin \Delta\alpha$ ， $|A'D| = |A'P| - |PD| = \rho + \Delta\rho - \rho \cos \Delta\alpha$ [2] [3] [4]。

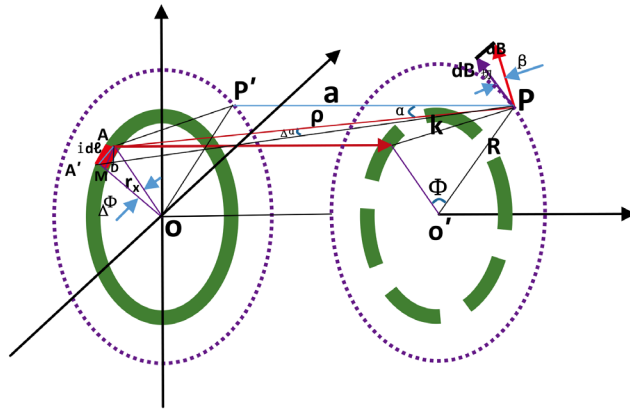


Figure 1. The tangential magnetic field of a thin circular conductor
图 1. 切片的薄圆环导体的切向磁场

分析弧微分等价代换，即 $ds(\Phi) = ds(\alpha)$ 成立。

在直角 $\triangle AMA'$ 中，

$$\begin{aligned} |AA'| &= \Delta s(\phi) = \sqrt{|AM|^2 + |A'M|^2} \\ &= \sqrt{(r_x \sin \Delta\phi)^2 + (r_x - r_x \cos \Delta\phi)^2} \quad [5] \\ &= r_x \sqrt{(\sin \Delta\phi)^2 + (1 - \cos \Delta\phi)^2}, \end{aligned}$$

在直角 $\triangle ADA'$ 中，

$$\begin{aligned} |AA'| &= \Delta s(\alpha) = \sqrt{|AD|^2 + |A'D|^2} \\ &= \sqrt{(|AP| \sin \Delta\alpha)^2 + (|A'P| - |AP| \cos \Delta\alpha)^2} \\ &= \sqrt{(\rho \sin \Delta\alpha)^2 + [\Delta\rho + \rho(1 - \cos \Delta\alpha)]^2}, \end{aligned}$$

因 $|AA'| (= \Delta s)$ 是小直角 $\triangle AMA'$ 和小直角 $\triangle ADA'$ 公共斜边，所以

$$\Delta s(\phi) = \Delta s(\alpha) [= |AA'|].$$

令函数

$$\begin{aligned} Z &= \Delta s(\phi) - \Delta s(\alpha) \\ &= r_x \sqrt{(\sin \Delta\phi)^2 + (1 - \cos \Delta\phi)^2} \\ &\quad - \sqrt{(\rho \sin \Delta\alpha)^2 + [\Delta\rho + \rho(1 - \cos \Delta\alpha)]^2} = 0, \end{aligned}$$

函数 Z 对 $\Delta s(\Phi)$ 和 $\Delta s(\alpha)$ 的偏导数：

$$\frac{\partial Z}{\partial \Delta s(\phi)} = \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\phi} = \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{r_x \sqrt{(\sin \Delta\phi)^2 + (1 - \cos \Delta\phi)^2}}{\Delta\phi} = r_x, \quad [6]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \Delta s(\alpha)} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\rho \sin \Delta\alpha)^2 + [\Delta\rho + \rho(1 - \cos \Delta\alpha)]^2}}{\Delta\alpha} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\alpha}\right)^2}, \quad [6]$$

函数 Z 的全微分：因为 $Z = \Delta(\Phi) - \Delta(\alpha) = 0$ ，

$$\text{且 } dZ|_{[\Delta s(\phi), \Delta s(\alpha)]} = \frac{\partial Z}{\partial \Delta s(\phi)} d\phi - \frac{\partial Z}{\partial \Delta s(\alpha)} d\alpha = r_x d\phi - \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\alpha}\right)^2} d\alpha = 0,$$

$$\text{即 } \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\alpha}\right)^2} d\alpha = r_x d\phi,$$

所以弧微分等价代换即 $ds(\Phi) = ds(\alpha)$ 成立。

说明: 在立体坐标系中, 因 $|PP'| = a$ 是 $\odot O$ 环所在平面的已知垂线(即 a 为常量), 沿函数曲线当 $A' \rightarrow A$ (或 $AA' \rightarrow 0$) 时, 直角 $\Delta PP'A' \rightarrow$ 直角 $\Delta PP'A$ (全等), 即 $\Delta PP'A'$ 和 $\Delta PP'A$ 各自所在的平面趋向于同一极限, 有 $PA' \rightarrow PA$ (且 $PA \subset \Delta PP'A$ 所在平面)、 $\alpha + \Delta\alpha \rightarrow \angle A'PP'$ 。

且 $\Delta PP'A$ 中, $\rho = \frac{a}{\cos\theta}$, 则

$$ds(\alpha) = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\alpha}\right)^2} d\alpha = \sqrt{\left(\frac{a}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{a}{\cos\alpha}}{d\alpha}\right)^2} d\alpha = \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha.$$

由以上 $ds(\Phi) = ds(\alpha)$ 成立可知, 式

$$ds(\alpha) = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\alpha}\right)^2} d\alpha = \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha \quad [7]$$

同样是求弧微分的方法, 应用时可根据具体问题的需要, 把 $ds(\Phi)$ 与 $ds(\alpha)$ 作等价代换使用。

由以上所述可以得出弧微分等价代换定理: 直角坐标系中, 平面光滑曲线 C 是函数 $z = f(y)$ 在区间 (a, b) 内的图像, 其弧微分

$$ds = \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy;$$

极坐标中平面光滑曲线 C 满足 $r = r(\Phi)$, $[\Phi_0 \leq \Phi \leq \Phi_n]$ [也即 $r(\Phi)$ 在 (Φ_0, Φ_n) 上有连续导数], 其弧微分

$$ds(\phi) = \sqrt{[r(\phi)]^2 + [r'(\phi)]^2} d\phi;$$

在所构成的立体坐标系中, 存在任一已知关系点 $P(a, y, z)$, P 点到平面光滑曲线 C 弧微分 $ds(\Phi)$ 的距离为 $\rho(\alpha)$, α 为 P 点直线 $x = a$ 与直线 $\rho(\alpha)$ 的夹角, 则弧微分存在

$$ds(\phi) = ds(\alpha),$$

即

$$\sqrt{[r(\phi)]^2 + [r'(\phi)]^2} d\phi = \sqrt{[\rho(\alpha)]^2 + [\rho'(\alpha)]^2} d\alpha \left[\text{或 } \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha \right],$$

称之为平面光滑曲线弧微分与立体坐标系中弧微分的等价代换定理, 简称弧微分等价代换定理[7]。

根据弧微分等价代换定理, 如图 1, 可把 $\odot O$ 中平面扇形 AOA' 的弧微分 $ds(\Phi)$ 变换成由空间扇形 APA' 构成的弧微分形式 $ds(\alpha)$ 。由于 $ds(\Phi) = ds(\alpha)$ 是等价代换, 将电流方向平行于圆心轴 OO' 的圆环 $\odot O$ 磁场被积式由关于自变量 Φ 转换成关于自变量为 α 和弧微分为 $ds(\alpha)$ 的形式再进行积分, 求得积分解析解就可使数值计算达到精确值要求。

2.2. 有限长圆柱导体空间任一点的沿平行圆周切向磁场 $B_{P\text{切}}$ 的解析算法

讨论: 结合图 1, 要求得有限长圆柱导体空间外平行圆周上任一点 P 的沿该点切线方向磁场 $B_{\text{切}}$ 的解

析解, 想象圆柱导体是由沿电流方向的互相平行的密集细导线组成。以圆柱导体的中心为基准轴, 任取一个由密集细导线组成薄皮圆管(如半径 r_x 处)导体。为求得该薄皮圆管导体在 P 点的 $B_{\text{切}}$ 磁场, 若采用先求有限长直导线以及薄皮圆管导体在 P 点的 $B_{\text{切}}$ 磁场, 再对圆柱导体求积分的路子, 不可避免遇到解全椭圆积分问题; 要避开解全椭圆积分, 就需调整积分次序, 采用在该薄皮圆管导体上选任一横截面位置取得导体圆环元素, 并使用**弧微分等价代换定理**, 即根据 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 之间距离 a 为常量, 以及 a 与变量斜边 ρ 、角 α 构成直角三角形关系, 具有减少变量的优势, 使用 a 、 α 、 ρ 表述的弧微分形式

$$ds(\alpha) = \sqrt{[\rho(\alpha)]^2 + [\rho'(\alpha)]^2} d\alpha \left(= \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha \right),$$

以等价代换 $\odot O$ 中的弧微分 $ds = r_x d\Phi$, 同时把变量 Φ 转换成 α , 以完成积分变换, 先对 idl 所在的切片薄圆环电流磁场积分, 然后再针对有关 $d\ell$ 进行积分, 求得薄皮圆管在 P 点处的沿所在平行圆周切线方向磁场 $B_{\text{切}}$ 的解析解, 继而得到圆柱导体在 P 点切向磁场的解析解。

2.2.1. 电流平行于圆心轴的薄圆环上电流元的磁场 $dB_{P\text{切}}$

如图 1, 在有限长圆柱导体内的一个薄皮圆管(半径 r_x 处)导体上, 选任一横截面处取得薄圆环元素(即 $\odot O$ 环)。圆柱导体外任一点 P 位于平行于 $\odot O$ 的 $\odot O'$ 圆周上, 在 $\odot O$ 圆环上任选取电流元 idl (idl 平行于 $|OO'|$), P 与 idl 连线为 ρ , $|PP'| \perp \odot O$, $|PP'| = a$, $\angle(idl, \rho) = \alpha$, $|O'P| = R$, r_x 与 $|OP'|$ 的夹角 Φ , dB 与 $dB_{\text{切}}$ 的夹角 β , P 到 idl 直线的距离为 k 。

讨论电流元 idl 在 P 点所在 $\odot O'$ 平行圆周上, 沿 P 点切线方向的磁场 $dB_{\text{切}}$ 。

由毕奥 - 萨伐尔定律, 电流元 idl 在 P 点的磁场

$$dB = \frac{\mu_0 i \sin \alpha}{4\pi \rho^2} d\ell,$$

dB 在 P 点的沿 $\odot O'$ 圆周切线方向磁场 $dB_{\text{切}}$,

$$\frac{dB_{\text{切}}}{dB} = \cos \beta,$$

$$dB_{\text{切}} = dB \cdot \cos \beta = \frac{\mu_0 i \sin \alpha}{4\pi \rho^2} d\ell \cdot \cos \beta.$$

$$\frac{a}{\rho} = \cos \alpha, \rho = \frac{a}{\cos \alpha};$$

$$ds(\alpha) = \sqrt{\rho^2(\alpha) + \rho'^2(\alpha)} d\alpha = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha [= ds(\phi) = r_x d\phi].$$

α 与 k 的函数关系,

$$k = a \tan \alpha.$$

β 所在的三角形满足:

$$r_x^2 = k^2 + R^2 - 2kR \cos \beta \Rightarrow k = R \cos \beta \pm \sqrt{r_x^2 - R^2 \sin^2 \beta},$$

$$a \tan \alpha = R \cos \beta \pm \sqrt{r_x^2 - R^2 \sin^2 \beta} \Rightarrow \cos \beta = \frac{a^2 \tan^2 \alpha - r_x^2 + R^2}{2aR \tan \alpha}$$

使用弧微分等价代换定理, 电流元 idl 在 $\odot O'$ 平行圆周 P 点处, 沿切线方向上的磁场

$$\begin{aligned} dB_{\text{切}} &= \frac{\mu_0 i \sin \alpha}{4\pi \rho^2} dl \cdot \cos \beta (nds) \\ &= \frac{\mu_0 Ni}{4\pi 2\pi r_x} \frac{\sin \alpha}{\left(\frac{a}{\cos \alpha}\right)^2} \frac{a^2 \tan^2 \alpha - r_x^2 + R^2}{2aR \tan \alpha} \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha dl \\ &= \frac{\mu_0 I'}{8\pi R a^2 2\pi r_x} \cos \alpha (a^2 \tan^2 \alpha - r_x^2 + R^2) d\alpha dl. \end{aligned}$$

2.2.2. 电流方向平行于中心轴的薄皮圆管导体的 $B_{\text{切}}$ 磁场

如图 2, 在半径为 r_x 薄皮圆管的任一圆环上任选一个圆环元素 $\Delta S (=ds)$, 该圆管圆周上单位长度的电流元 idl_x 个数为 n , 整个圆环圆周上电流元总数为 N 个 [有 $n = N/(2\pi r_x)$, 且 $n \rightarrow \infty$], 即 ΔS 上有电流元为 $idl_x n ds$ 个, 有 $nidl_x = Nidl_x/(2\pi r_x) = I'dl_x/(2\pi r_x)$, I' 是通过圆环元素的线电流之和, 且 $ds(\Phi) = ds(\alpha) = (a/\cos^2 \alpha) d\alpha$ 。

先对 $I'dl$ 所在的切片薄圆环电流的 P 点切向磁场积分, 再对薄皮圆管电流切向磁场积分。

$$\begin{aligned} B_{\text{切}} &= \iint dB_{\text{切}} = \frac{\mu_0 I'}{8\pi R 2\pi r_x} \int_a^{a+\ell} 2 \cdot dl_x \int_{\sin \alpha_1 = \frac{R-r_x}{\sqrt{\ell_x^2 + (R-r_x)^2}}}^{\sin \alpha_2 = \frac{R+r_x}{\sqrt{\ell_x^2 + (R+r_x)^2}}} \frac{\cos \alpha}{\ell_x^2} (\ell_x^2 \tan^2 \alpha - r_x^2 + R^2) d\alpha \quad [6] [8] \\ &= \frac{\mu_0 I'}{8\pi R 2\pi r_x} \left\{ (a+\ell) \ln \left| \frac{\sqrt{(a+\ell)^2 + (R+r_x)^2} + R+r_x}{\sqrt{(a+\ell)^2 + (R+r_x)^2} + R-r_x} \right| \right. \\ &\quad - \frac{(R-r_x)\sqrt{(a+\ell)^2 + (R+r_x)^2}}{a+\ell} + \frac{(R+r_x)\sqrt{(a+\ell)^2 + (R-r_x)^2}}{a+\ell} \\ &\quad - a \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + (R+r_x)^2} + R+r_x}{\sqrt{a^2 + (R-r_x)^2} + R-r_x} \right| + \frac{(R-r_x)\sqrt{a^2 + (R+r_x)^2}}{a} \\ &\quad \left. - \frac{(R+r_x)\sqrt{a^2 + (R-r_x)^2}}{a} \right\}. \end{aligned}$$

计算结果: $\ell = r_x = 1$, $R = 1.1$, $a \in (3, 2, 1, 0.5, 0.3, 0.1, 0.01, \neq 0, -0.01, -0.1, -0.3, -0.5, -0.7, -0.9, -0.99)$

$$\begin{aligned} [4\pi/\mu_0 I] B_{\text{切}} &\in (0.00932, 0.02125, 0.06145, 0.1235, 0.18465, 0.31579, 0.45404, \\ &0.4909, 0.62759, 0.74945, 0.77597, 0.74945, 0.62759, 0.4909). \end{aligned}$$

磁场以薄圆管中间横截面为界, 成左右对称分布状态。

2.2.3. 电流平行于中心轴的圆柱导体的 $B_{\text{切}}$ 磁场

如图 3 所示, 圆柱导体(1)内、外半径为 r_1 、 r_2 , 圆柱导体外与其同心轴的平行圆周 $\odot O'$ 上有任一点 P , $r_1 \rightarrow r_2$ 单位厚度电流环数为 $m (=M/r_x)$, 在 r_x 处选取圆柱元素 dr_x , dr_x 电流环有 $mI'dr_x = MI'dr_x/r_x = Idr_x/r_x$, I 是通过圆柱导体的总电流强度。讨论圆柱导体(1)在 P 点的沿该平行圆周切向的磁场 $B_{1\text{切}}$ 。

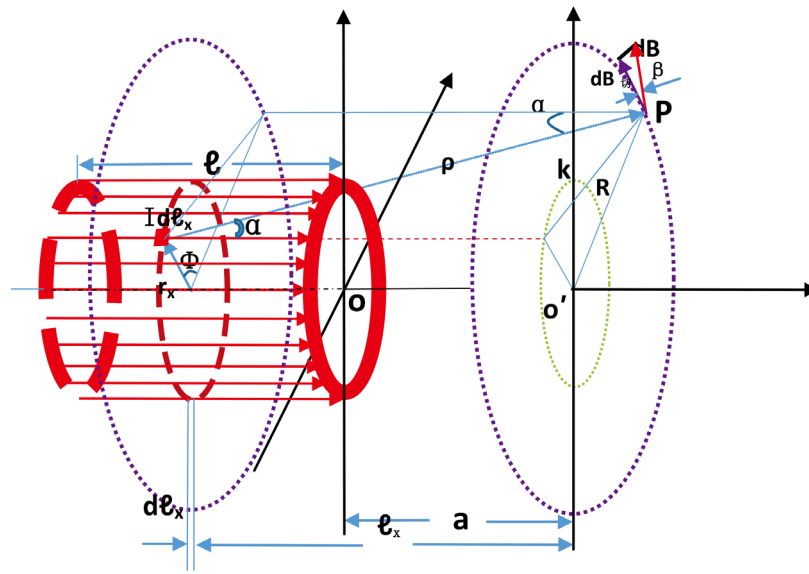


Figure 2. The tangential magnetic field of a thin circular barrel conductor
 图 2. 薄皮圆管导体的切向磁场

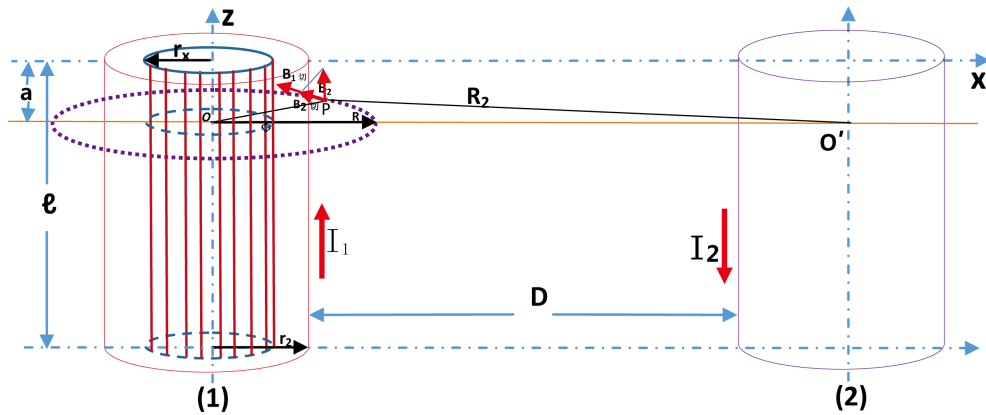


Figure 3. The magnetic field of a cylindrical conductor
 图 3. 圆柱导体的磁场

$$\begin{aligned}
 B_{1切} = & \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R} \int_{-r_2}^{r_2} \frac{1}{2\pi r_x^2} \left\{ (a+l) \ln \left| \frac{\sqrt{(a+l)^2 + (R+r_x)^2} + R+r_x}{\sqrt{(a+l)^2 + (R-r_x)^2} + (R-r_x)} \right| \right. \\
 & - \frac{(R-r_x)\sqrt{(a+l)^2 + (R+r_x)^2}}{a+l} + \frac{(R+r_x)\sqrt{(a+l)^2 + (R-r_x)^2}}{a+l} \\
 & - a \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + (R+r_x)^2} + R+r_x}{\sqrt{a^2 + (R-r_x)^2} + (R-r_x)} \right| + \frac{(R-r_x)\sqrt{a^2 + (R+r_x)^2}}{a} \\
 & \left. - \frac{(R+r_x)\sqrt{a^2 + (R-r_x)^2}}{a} \right\} dr_x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 I_{r_2}}{8\pi^2 R} \left\{ -\frac{a+\ell}{r_2} \ln \left| \frac{\sqrt{(a+\ell)^2 + (R+r_2)^2} + R+r_2}{\sqrt{(a+\ell)^2 + (R-r_2)^2} + (R-r_2)} \right| \right. \\
&\quad - \frac{R-r_2}{(a+\ell)r_2} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R-r_2)^2} + \frac{R+r_2}{(a+\ell)r_2} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R+r_2)^2} \\
&\quad + 2 \frac{a+\ell}{\sqrt{(a+\ell)^2 + R^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{(a+\ell)^2 + R^2} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R+r_2)^2} - (a+\ell)^2 - R^2 - Rr_2}{\sqrt{(a+\ell)^2 + R^2} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R-r_2)^2} + (a+\ell)^2 + R^2 - Rr_2} \right| \\
&\quad + \frac{a}{r_2} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + (R+r_2)^2} + R+r_2}{\sqrt{a^2 + (R-r_2)^2} + (R-r_2)} \right| + \frac{R-r_2}{ar_2} \sqrt{a^2 + (R-r_2)^2} - \frac{R+r_2}{ar_2} \sqrt{a^2 + (R+r_2)^2} \\
&\quad \left. - 2 \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + R^2} \sqrt{a^2 + (R+r_2)^2} - a^2 - R^2 - Rr_2}{\sqrt{a^2 + R^2} \sqrt{a^2 + (R-r_2)^2} + a^2 + R^2 - Rr_2} \right| \right\} \\
&\quad - \frac{\mu_0 I_{r_1}}{8\pi^2 R} \left\{ -\frac{a+\ell}{r_1} \ln \left| \frac{\sqrt{(a+\ell)^2 + (R+r_1)^2} + R+r_1}{\sqrt{(a+\ell)^2 + (R-r_1)^2} + (R-r_1)} \right| \right. \\
&\quad - \frac{R-r_1}{(a+\ell)r_1} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R-r_1)^2} + \frac{R+r_1}{(a+\ell)r_1} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R+r_1)^2} \\
&\quad + 2 \frac{a+\ell}{\sqrt{(a+\ell)^2 + R^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{(a+\ell)^2 + R^2} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R+r_1)^2} - (a+\ell)^2 - R^2 - Rr_1}{\sqrt{(a+\ell)^2 + R^2} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R-r_1)^2} + (a+\ell)^2 + R^2 - Rr_1} \right| \\
&\quad + \frac{a}{r_1} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + (R+r_1)^2} + R+r_1}{\sqrt{a^2 + (R-r_1)^2} + (R-r_1)} \right| + \frac{R-r_1}{ar_1} \sqrt{a^2 + (R-r_1)^2} - \frac{R+r_1}{ar_1} \sqrt{a^2 + (R+r_1)^2} \\
&\quad \left. - 2 \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + R^2} \sqrt{a^2 + (R+r_1)^2} - a^2 - R^2 - Rr_1}{\sqrt{a^2 + R^2} \sqrt{a^2 + (R-r_1)^2} + a^2 + R^2 - Rr_1} \right| \right\}
\end{aligned}$$

计算结果: $\ell = r_2 = 1$, $r_1 = 0.001$, $R = 1.1$,
 $a \in (0.1, 0.01, \neq 0, -0.01, -0.1, -0.3, -0.5, -0.7, -0.9, -0.99, \neq -1, -1.01, -1.1)$ 。

$$\begin{aligned}
[4\pi/\mu_0 I] B_{1\text{切}} \in &(2.47505, 2.70398, 2.71177, 2.96494, 3.30777, 3.3999, \\
&3.30777, 2.96494, 2.71177, 2.70398, 2.47505).
\end{aligned}$$

磁场以圆柱导体中间横截面为界, 成上下对称分布状态。

2.2.4. 两个平行圆柱导体, 在其一临近导体的平行圆周切向上任一点的叠加磁场 $B_{P\text{切}}$

如图 3, P 点临近圆柱导体(1), 且在该导体的平行圆周 $\odot O$ 上, 导体(1)在 P 点的磁场在 2.2.3 已求得; P 点离圆柱导体(2)较远, 该导体(2)在 P 点的沿平行圆周 $\odot O$ 切向的磁场 $B_{2\text{切}}$ 是等粗圆柱导体(2)在 P 点产生磁场 B_2 的分量, 且 $B_{2\text{切}}$ 、 B_2 、 R_2 、 OP ($=R$) 均在同一平面, $B_2 \perp R_2$ 、 $B_{2\text{切}} \perp OP$, $\angle(B_{2\text{切}}, B_2) = \angle OPO'$, $\angle POR = \Phi$ 。有

$$B_{2\text{切}} = B_2 \cos \angle(B_{2\text{切}}, B_2) = B_2 \cos \angle OPO',$$

$$\begin{aligned} \sin \angle OPO' &= \frac{D+2r_2}{R_2} \sin \phi; \\ \cos \angle OPO' &= \frac{\sqrt{R_2^2 - (D+2r_2)^2 \sin^2 \phi}}{R_2}, \\ \cos \angle OPO' &= \frac{|(D+2r_2) \cos \phi - R_2|}{\sqrt{(D+2r_2)^2 + R_2^2 - 2R_2(D+2r_2) \cos \phi}}. \\ B_{2\text{切}} &= B_2 \cdot \cos(B_{2\text{切}}, B_2) \Big|_{r_1}^{r_2} \quad [9] \\ &= \left\{ \frac{\mu_0 I_{r_2}}{8\pi^2 R_2} \left[-\frac{a+\ell}{r_2} \ln \left| \frac{\sqrt{(a+\ell)^2 + (R_2+r_2)^2} + R_2+r_2}{\sqrt{(a+\ell)^2 + (R_2-r_2)^2} + (R_2-r_2)} \right| \right. \right. \\ &\quad - \frac{R_2-r_2}{(a+\ell)r_2} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R_2-r_2)^2} + \frac{R_2+r_2}{(a+\ell)r_2} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R_2+r_2)^2} \\ &\quad + 2 \frac{a+\ell}{\sqrt{(a+\ell)^2 + R_2^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{(a+\ell)^2 + R_2^2} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R_2+r_2)^2} - (a+\ell)^2 - R_2^2 - R_2r_2}{\sqrt{(a+\ell)^2 + R_2^2} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R_2-r_2)^2} + (a+\ell)^2 + R_2^2 - R_2r_2} \right| \\ &\quad + \frac{a}{r_2} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + (R_2+r_2)^2} + R_2+r_2}{\sqrt{a^2 + (R_2-r_2)^2} + (R_2-r_2)} \right| + \frac{R_2-r_2}{ar_2} \sqrt{a^2 + (R_2-r_2)^2} \\ &\quad \left. \left. - \frac{R_2+r_2}{ar_2} \sqrt{a^2 + (R_2+r_2)^2} - 2 \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_2^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + R_2^2} \sqrt{a^2 + (R_2+r_2)^2} - a^2 - R_2^2 - R_2r_2}{\sqrt{a^2 + R_2^2} \sqrt{a^2 + (R_2-r_2)^2} + a^2 + R_2^2 - R_2r_2} \right| \right] \right\} \\ &\quad - \frac{\mu_0 I_{r_1}}{8\pi^2 R_2} \left[-\frac{a+\ell}{r_1} \ln \left| \frac{\sqrt{(a+\ell)^2 + (R_2+r_1)^2} + R_2+r_1}{\sqrt{(a+\ell)^2 + (R_2-r_1)^2} + (R_2-r_1)} \right| \right. \\ &\quad - \frac{R_2-r_1}{(a+\ell)r_1} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R_2-r_1)^2} + \frac{R_2+r_1}{(a+\ell)r_1} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R_2+r_1)^2} \\ &\quad + 2 \frac{a+\ell}{\sqrt{(a+\ell)^2 + R_2^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{(a+\ell)^2 + R_2^2} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R_2+r_1)^2} - (a+\ell)^2 - R_2^2 - R_2r_1}{\sqrt{(a+\ell)^2 + R_2^2} \sqrt{(a+\ell)^2 + (R_2-r_1)^2} + (a+\ell)^2 + R_2^2 - R_2r_1} \right| \\ &\quad + \frac{a}{r_1} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + (R_2+r_1)^2} + R_2+r_1}{\sqrt{a^2 + (R_2-r_1)^2} + (R_2-r_1)} \right| + \frac{R_2-r_1}{ar_1} \sqrt{a^2 + (R_2-r_1)^2} - \frac{R_2+r_1}{ar_1} \sqrt{a^2 + (R_2+r_1)^2} \\ &\quad \left. \left. - 2 \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_2^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + R_2^2} \sqrt{a^2 + (R_2+r_1)^2} - a^2 - R_2^2 - R_2r_2}{\sqrt{a^2 + R_2^2} \sqrt{a^2 + (R_2-r_1)^2} + a^2 + R_2^2 - R_2r_2} \right| \right] \right\} \cdot \frac{\sqrt{R_2^2 - (D+2r_2)^2 \sin^2 \phi}}{R_2}. \end{aligned}$$

等粗圆柱导体(1)和(2)，在导体(1)的平行圆周 P 点产生的沿该圆周切向的叠加磁场：

$$B_{P\text{切}} = B_{1\text{切}} + B_{2\text{切}} \quad [10] [11] [12]$$

由以上对电流方向平行于中心轴的薄皮圆管和圆柱导体磁场的计算，可对两个有限长载流圆柱导体的磁场进行定性判断。以图 3 的导体(1)为例，导体(2)因距离导体(1)较远，它在导体(1)表面附近产生的磁

场较弱, 导体(1)和(2)的叠加效果, 以沿导体(1)中心轴线的竖直平面为界, 该竖直平面右侧的导体(1)及其附近区域的磁场被略有加强, 该竖直平面左侧区域的磁场被略有减弱。导体(2)的磁场分布与导体(1)类同。这表明两个有限长圆柱导体附近的磁场主要是由临近导体产生和决定的, 距离较远的导体对其影响是有限的。

基于三维的圆柱导体磁场的复杂性, 企望使用一两个极少的基本初等函数组合形式来准确表达圆柱导体磁场的解析解是不太可能的。本文圆柱导体磁场是用有限初等函数组合形式表述的精确解析解, 不存在截断误差, 其数值计算结果只存在舍入误差, 因此它将优于任何形式的近似数值解算法, 在使用时可根据具体问题的需要, 使计算的数值达到和满足其所需的精确值的精度要求。

3. 结论

把平面光滑曲线的弧微分拓展到立体坐标系中, 准确揭示了圆柱导体空间任一点磁场的数值特征, 根据二维条件的弧微分与立体坐标下的弧微分所构成优化的等价代换关系——**弧微分等价代换定理**, 通过积分变换, 有效减少了积分变量的数量, 避开了解全椭圆积分问题, 降低了积分的难度, 积分结果得到了有限形式的封闭解。**弧微分等价代换定理**的应用, 为类似的二维弧微分难题求得函数积分的解析解有了新的方法, 圆柱导体磁场解析解也可用于电磁炮圆柱导轨电磁场精确值的计算。

参考文献

- [1] 雷银照. 关于电磁场解析方法的一些认识[J]. 电工技术学报, 2016, 31(19): 11-25.
- [2] 陆庆乐, 马知恩. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990: 207-208.
- [3] 孙长利, 张丽鸿, 孙璐. 弧微分代换法 $\langle d\rho(\theta) = dl = d(\mathbf{R}\Phi) \rangle$ 及在圆环电流磁场解析算法中的应用[J]. 科技风, 2015(17): 114-115.
- [4] 张方, 孙长利, 张德志, 沈峻岭, 张拥军. 弦微分代弧微分及圆环线圈面磁场的解析算法[J]. 中国科技纵横, 2016(17): 252-253.
- [5] 汪诚义. 考研数学: 高等数学与微积分[M]. 北京: 中国物资出版社, 2008: 215-216.
- [6] 陈传璋, 侯宗义. 积分方程论及其应用[M]. 上海: 上海科技出版社, 1987: 15-17.
- [7] 孙璐, 张丽鸿, 孙长利, 等. 轴对称线圈磁场的精确计算方法研究[J]. 军械工程学院学报, 2016, 28(3): 71-78.
- [8] 徐兵, 计慕然. 高等数学[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1988: 121-126.
- [9] 王莹, 肖峰. 电炮原理[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995: 93-94.
- [10] 李军, 金龙文. 电磁轨道炮滑动界面功率密度初探[C]//中国电工技术学会电磁发射技术专业委员会. 全国第八届电磁发射技术研讨会论文集: 2017年卷. 郑州, 2017: 1-4.
- [11] 耿轶青, 刘辉, 李遥, 等. 电磁轨道炮热特性分析研究[C]//中国电工技术学会电磁发射技术专业委员会. 全国第八届电磁发射技术研讨会论文集: 2017年卷. 郑州, 2017: 65-70.
- [12] 刘辉, 耿轶青, 李旺, 李艳明, 等. 基于隔离的多个电感型脉冲电源负载电流的研究[C]//中国电工技术学会电磁发射技术专业委员会. 全国第八届电磁发射技术研讨会论文集: 2017年卷. 郑州, 2017: 33-38.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7567，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：app@hanspub.org