Creative Education Studies 创新教育研究, 2022, 10(1), 101-107
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2022.101019

数形结合思想在几种典型数学问题中的应用研究

莫少蓓，王历容*

湖南人文科技学院数学与金融学院，湖南 娄底

收稿日期：2021年12月9日；录用日期：2022年1月10日；发布日期：2022年1月17日

摘 要

数形结合思想是中学数学中一种重要的思想，对于学生数学思维的发展、解题能力的提高都具有十分重要的意义。数形结合思想方法是把题设中的数量关系与图形关系结合起来，实现数定形，形助数，达到更直观的效果，提高解题效率。文章基于新课程标准对数形结合思想方法的要求，探讨该思想在中学数学几类典型问题中的应用，如向量、函数、解析几何等，并针对如何开展数形结合思想方法教学提出合理建议。

关键词

数形结合思想，中学数学，典型问题

Research on the Application of the Thought of Combination of Numeral and Form in Some Typical Mathematical Problems

Shaobei Mo, Lirong Wang*

School of Mathematics and Finance, Hunan University of Humanities, Science and Technology, Loudi Hunan

Received: Dec. 9th, 2021; accepted: Jan. 10th, 2022; published: Jan. 17th, 2022

Abstract

The thought of combination of numeral and form is an important thought in secondary school mathematics, which is of great significance to the development of students' mathematical thinking and the improvement of their problem-solving ability. The thought of combination of numeral and

*通讯作者。

文章引用: 莫少蓓, 王历容. 数形结合思想在几种典型数学问题中的应用研究[J]. 创新教育研究, 2022, 10(1): 101-107.
DOI: 10.12677/ces.2022.101019

form is to combine the quantity relation and graph relation in the question setting, so as to achieve a more intuitive effect and improve the efficiency of problem solving. This paper discusses the application of this thought in some typical problems of secondary school mathematics, such as vectors, functions, and analytic polynomials based on the requirements of the new curriculum standard to the thought of combination of numeral and form, and puts forward reasonable advice on how to carry out the teaching of combination of numeral and form.

Keywords

Thought of Combination of Numeral and Form, Secondary School Mathematics, Typical Problems

1. 数形结合相关概述

1.1. 数形结合理论

数形结合思想是指将问题中隐含的数量关系与几何图形进行有机结合，从而使问题得以解决。其中“数”对应数量关系，主要体现在代数运算中，“形”对应空间形式，主要体现在反映了一定现实形式的抽象空间中。虽然“数”与“形”都有很清晰的独立特征，但不可将“数”与“形”完全分离，只有两者相互结合、相辅相成才能使数学问题变得清晰明了。

数形结合或者借助于数的精确性来阐明图形的性质，或者借助图形的几何直观来阐明数之间某种关系。

1.2. 新课程标准下的数形结合

义务教育数学课程标准体现出数学教育最重要的变化之一就是从“双基”到“四基”的转变，从着重学生对基础知识的掌握转变为着重于学生自身能力的发展。“四基”要求中明确指出，在数学教学中，教师要注重学生对基本数学思想的理解与应用，帮助学生提高数学思维能力以及解决问题的能力[1] [2]。

1.3. 教学中的数形结合

在中学数学中有些定义、结论表述抽象，还有一些数学问题中关系繁琐复杂，学生难以理解，学习起来吃力。数形结合思想方法具有化抽象为具体，化复杂为简单的功能，因此对于数形结合思想的有效渗透要贯穿于整个中学数学教学过程中。

如：借助数轴进行教学，学生可以更直观地理解数与点对应关系，数的大小关系，距离与绝对值关系、不等式的解集等；在三角函数求值的教学中，构造直角三角形，学生可以直观理解角度之间与函数类型之间的关系。向量是集代数与几何于一身的体现，在教学中充分考虑向量的几何特征，可以简化对向量性质的理解以及运算法则的掌握。在立体几何的教学中，往往都要通过画图才可以直观地理清点、线、面之间的关系。在解析几何的教学中，如圆锥曲线的方程、交点个数、最短距离等数量的求解都依赖于数形结合思想方法[3] [4] [5] [6]。

2. 数形结合思想在中学数学三类典型问题中的应用

在中学数学课程中，很多问题本身就是数形结合的体现。例如，向量、函数和解析几何等，它们都

是集“数”、“形”于一身的。其中向量作为有方向的线段，既能进行代数运算，又架起了使代数、几何、三角知识融会贯通的桥梁。数形结合也是函数学习和解题的有力工具。解析几何是数形结合的典范，从本质上来看，就是用代数方法研究几何图形的性质。以下将列举如何用数形结合思想方法来解决向量、函数和解析几何等中的典型问题[1]。

2.1. 在有关向量问题中的应用

例 1、若非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$，则(　　)。

A. $|2\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$　　B. $|2\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$

C. $|2\boldsymbol{a}|>|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　　D. $|2\boldsymbol{a}|<|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

解析：构造等腰三角形 $\triangle OAB$，使得 $OB=AB$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{OA}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{OB}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AB}$，再构造 $Rt\triangle OAC$，则有 $2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{OC}$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$。如图 1，可知：$OC>AC$，所以 $|2\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$，故本题选 A。

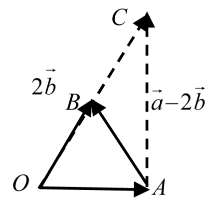

Figure 1. Construct triangle diagram with vector
图 1. 向量构建三角形图示

点评：从几何角度来考虑向量的模就是线段的长度，故可以先画出直角三角形，直观地得到边与边的大小关系，从而得到向量的模的大小关系。本题还有一种解法就是将题目中的等式两边平方再化简比较大小。这样可能有计算出错的情况出现并且步骤会相对繁琐，而本题利用以“形”助“数”的方法既直观又简单。

例 2、设 D 为△ABC 所在平面内一点，$\boldsymbol{BC}=3\boldsymbol{CD}$，则(　)

A. $\boldsymbol{AD}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{AB}+\frac{4}{3}\boldsymbol{AC}$　　B. $\boldsymbol{AD}=\frac{1}{3}\boldsymbol{AB}-\frac{4}{3}\boldsymbol{AC}$

C. $\boldsymbol{AD}=\frac{4}{3}\boldsymbol{AB}+\frac{1}{3}\boldsymbol{AC}$　　D. $\boldsymbol{AD}=\frac{4}{3}\boldsymbol{AB}-\frac{1}{3}\boldsymbol{AC}$

解析：由题可得到如图，由图易得：

$\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BD}=\boldsymbol{AB}+\frac{4}{3}\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{AB}+\frac{4}{3}(\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{AB})=-\frac{1}{3}\boldsymbol{AB}+\frac{4}{3}\boldsymbol{AC}$。故本题选 A。

点评：由题意得出图 2，观察图形标上向量箭头，根据向量首尾相加的原则得到等式。此处利用向量的方向性得到 $\boldsymbol{AD}$ 可以用其他两个向量表示，再根据选项提示并利用向量的大小关系一步转化，最后化简得到正确选项。

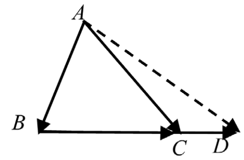

Figure 2. Vector diagram
图 2. 向量图示

2.2. 在有关函数问题中的应用[7]

例 3、(2020，乌鲁木齐中考模拟)如图 3，二次函数 $y=ax^2+bx+c,a\neq 0$ 的对称轴是 $x=-1$，且过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，有下列结论：① $abc<0$；② $a-2b+4c=0$；③ $25a-10b+4c=0$；④ $3b+2c>0$；⑤ $a-b\geq m(am-b)$；其中所有正确的结论是(　　)。

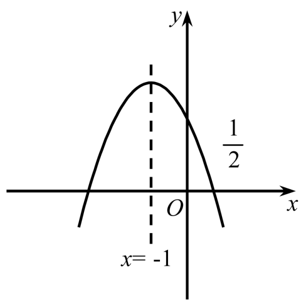

Figure 3. Quadratic function image
图 3. 二次函数图像

解析：由抛物线图像的开口方向、对称轴及交点的位置可知：$a<0$，且 a,b 同号，所以 $b<0$，$c>0$ $\therefore abc>0$，故①正确；

又 $x=-1$ 是 $y=ax^2+bx+c,a\neq 0$ 的对称轴，所以 $-\frac{b}{2a}=-1$，可得 $b=2a$，

$a-2b+4c=a-4a+2=-3a+4c$，$\because a<0$，$\therefore -3a>0$，$\therefore -3a+4c>0$，

即 $a-2b+4c>0$，故②错误；

$\because$抛物线 $y=ax^2+bx+c,a\neq 0$ 的对称轴是 $x=-1$。且过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，

$\therefore$抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为 $\left(-\frac{5}{2},0\right)$

当 $x=-\frac{5}{2}$ 时，$y=0$，即 $a\left(-\frac{5}{2}\right)^2+b\left(-\frac{5}{2}\right)+c=0$，

整理得：$25a-10b+4c=0$，故③正确；

$\because b=2a$，$a+b+c<0$，$\therefore 3b+2c<0$，故④错误；

$\because x=-1$ 时，抛物线对应最高点，故函数值最大，$\therefore a-b\geq m(am-b)$，所以⑤正确。

故答案为：①③⑤。

点评：掌握二次函数的性质与抛物线图像的关系，尤其是抛物线的解析式、对称轴、点的坐标等关系，灵活运用数形结合思想是求解二次函数与抛物线问题的关键[7]。

例 4、求 $y=2\sin x\left(\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}\right)$ 与 $y=2$ 两个函数所围成的封闭图形的面积[1]。

解析：先做出该封闭图形，见下图 4(a)，由割补法可将求曲面图形转换为矩形，如图 4(b)，再求得面积为：$2\times\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=4\pi$。

点评：当要求函数所围成的封闭图形的面积时，一般采用的方法是利用定积分求面积，会涉及到求原函数以及代入区间端点值计算的步骤，相较于解析中的利用图像求面积的方法，定积分方法的步骤更

加繁琐且易出现计算出错的情况。这样体现出利用数形结合解题更有优势。

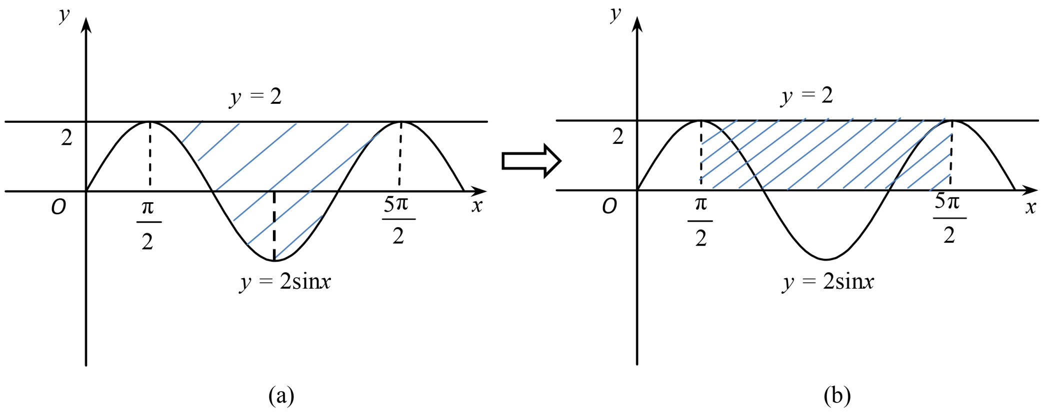

Figure 4. (a) Area diagram of closed graph; (b) Area diagram after cutting
图 4. (a) 封闭图形面积图示；(b) 割补后面积图示

例 5、(2020，遵义中考题)计算 $\tan 15^{\circ}$。

解析：如图 5，作三角形 $\triangle ACB$，使得 $\angle C = 90^{\circ}$，$\angle ABC = 30^{\circ}$，再延长 CB 使 $BD = AB$，连接 AD，得 $\angle D = 15^{\circ}$，因此 $\tan 15^{\circ} = \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$。

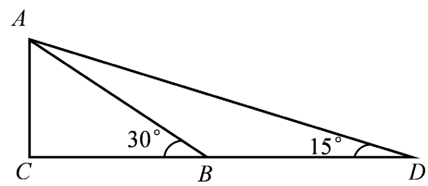

Figure 5. Construct right triangle diagram
图 5. 构造直角三角形图示

点评：三角函数的定义来源于直角三角形，该题考虑数形结合思想方法，构建几何图形直角三角形来解决三角函数代数问题。

2.3. 在有关解析几何问题中的应用

例 6、如图 6 所示，抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点是 F，定点 $M(3,2)$，点 P 是抛物线上的动点。求 $|PF| + |PM|$ 最小值，并求取最小值时对应的 P 点坐标。

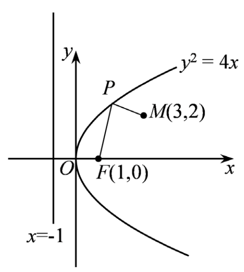

Figure 6. Parabolic diagram
图 6. 抛物线图示

解析：如图 7，由抛物线的性质可知，$|PF|=|PN|$，所以 $|PF|+|PM|=|PN|+|PM|$，易得它的最小值为 $|MN|=4$，点 P 所对应的 y 值为 3，代入抛物线可得 $P\left(2\sqrt{2},2\right)$。

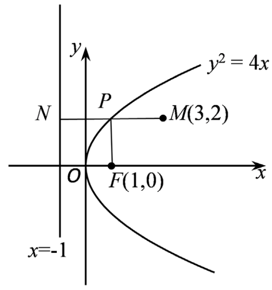

Figure 7. Diagram for determining the position of point P
图 7. 确定点 P 位置图示

点评：本题一般的解法是先设 P 点坐标为(x,y)，然后将 $|PF|+|PM|$ 表示为 P 点坐标的函数，再通过求函数的最小值求出点 P 的坐标。这种方法运算量很大。而利用图像确定点 P 的位置，然后代入求解，直观又简捷。

例 7、已知 M 是椭圆 $x^2+4y^2=16$ 上一点，其左焦点和右焦点记为 F_1,F_2，若 $|MF_1|=7$，则 $|MF_2|=$ （ ）。

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 9

解析：椭圆的方程可化为：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，所以 $a=4$。因为 M 是椭圆上一点，根据椭圆的定义可得：$|MF_1|+|MF_2|=2a=2\times4=8$，又因为 $|MF_1|=7$，所以 $|MF_2|=1$，故本题选 A。

点评：本题实为几何题，而在解析几何的学习中，已经将几何图形的性质用代数方法使其更加精确化，比如本题中就是利用了椭圆上任意点到椭圆的两个焦点距离之和等于长轴长的性质。然后采用代数方法来解决。通过这样的研究学习，使学生在解题时，能快速抓住题中所反映的数量关系，使学生在学习知识的同时加深了解数形结合思想[8]。

3. 在教学中渗透数形结合思想的几点建议

3.1. 从自身出发，提升素养，树立数形结合思想教学意识

第一，教师自身要深刻学习数形结合思想相关理论，明确数形结合思想的重要性，树立数形结合思想教学的意识，增加专门的教学力度。第二，教师要注重对中学数学教材的分析，充分挖掘教材中隐含着数学思想方法的知识点，并在课堂教学中注重运用数学思想，引导学生去思考问题，解决问题。第三，教师要提高几何画图能力，能在课堂上较精确地、迅速地画出需要的图形。在信息化的时代，教师还要掌握一定的计算机作图技巧，学会把几何画板等计算机绘图工具运用到课堂上。第四，教师要利用多种教学手段把数形结合思想渗透教学的每一个环节，明确教学目标、把握教学重难点、设定教学环节、实施教学过程等，注重每一个教学细节的设计，巧妙地融合数形结合思想的教学[9]。

3.2. 从学生出发，注重能力发展，激化数形结合意识

教师要积极树立以学生为中心的教学理念，一切教学活动服务于学生的学习。第一，教学中要重视学生对代数和几何内容中基本概念以及基础知识的充分理解，尤其是对各类函数图像的认识。然后，要重视学生的作图能力，这是学习数形结合的手段，数形结合思想也正是从作图这种小细节中慢慢地培养

起来的。第二，要注意学生与学生之间的关系，加强小组合作学习，让学生互相分享数形结合学习的方法与见解，由此能让学生在彼此之间交换思维，取长补短，促进学生之间良好关系的建立，使其养成合作学习的好习惯。第三，在学生的思想里，数形结合思想可能只是一种知识形态，教师需要利用适当的方式将知识形态激化成为数形结合意识，使其成为一种思维条件反射和心理趋向[9]。

4. 结语

总之，在加强学生核心素养教育理念下的一线中学数学教师要立足现有的教材内容，重视对学生数形结合思想的教学，积极思考并探索如何有效地培养学生数形结合思想的教学方法，使学生在数学学习中领略数学思想方法的魅力，发展数学思维，提升创新能力以应对未来创新多变的数学问题和实际问题。

基金项目

湖南人文科技学院校企合作课程——初中数学解题研究(校教通(2020) 115 号)；湖南省普通高等学校教学改革重点项目——基于师范认证视野下地方本科院校数学与应用数学专业建设与实践(湘教通[2021] 298-HNJG-2021-0206)。

参考文献

[1] 吴耀耀. 基于新课程标准下中学数学“数形结合”的教与学[D]: [硕士学位论文]. 固原: 宁夏师范学院, 2016.
[2] 张少家. 走进数学新课标, 走进数学思想[J]. 小学生(教学实践), 2012(6): 11-12.
[3] 谢绍智. 基于新课标下的初中数学“数形结合”有关思考[J]. 数学学习与研究, 2020(13): 99-100.
[4] 赵桐. 利用数形结合法解数学问题的研究[J]. 数学学习与研究, 2019(4): 94.
[5] 刘洪燕. 初中数学教学中数形结合思想应用能力培养探讨[J]. 中学课程辅导(教师通讯), 2021(16): 100-101.
[6] 李燕. 利用数形结合思想解决中考数学问题的利器[J]. 数理化学习(初中版), 2016(8): 26-27.
[7] 周继云. 数形结合之“二次函数与一元二次方程的关系” [J]. 理科考试研究, 2015, 22(6): 5.
[8] 林超. 数形结合在解析几何中的应用[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 西南大学, 2021.
[9] 顾亚萍. 数形结合思想方法之教学研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京师范大学, 2004.