

基于学生思维培养的数学课堂教学设计

——以“一次函数与方程、不等式”为例

谭禄^{1*}, 熊建军², 徐钰荣^{1,3}, 邵贵明¹

¹黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

²鄂州高中, 湖北 鄂州

³擂鼓墩中学, 湖北 随州

收稿日期: 2022年11月18日; 录用日期: 2022年12月15日; 发布日期: 2022年12月26日

摘要

数学课堂是发展学生数学思维的重要途径。培养学生数学思维, 需要教师长期地、有计划地进行, 因此, 数学课堂的教学需要有目的地进行设计。以“一次函数与方程、不等式”为例, 基于发展学生数学思维, 将数形结合思想贯穿整个课堂教学过程, 借助转化与化归, 从特殊到一般的数学思想方法, 通过一次函数将一元一次方程、一元一次不等式有机整合, 凸显函数思想。

关键词

一次函数与方程、不等式, 教学设计, 数学思维

The Design of Mathematics Classroom Teaching Based on Students' Thinking Development

—Taking “Primary Functions and Equations, Inequalities” as an Example

Lu Tan^{1*}, Jianjun Xiong², Yurong Xu^{1,3}, Guiming Shao¹

¹School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

²Ezhou High School, Ezhou Hubei

³Leigudun Middle School, Suizhou Hubei

Received: Nov. 18th, 2022; accepted: Dec. 15th, 2022; published: Dec. 26th, 2022

*通讯作者。

Abstract

The mathematics classroom is an important way to develop students' mathematical thinking. To develop students' mathematical thinking, teachers need to plan for a long time; therefore, the teaching of mathematics classroom needs to be designed purposefully. In this study, we take "primary functions, equations and inequalities" as an example. Based on the development of students' mathematical thinking, we integrate the ideas of number and shape throughout the whole classroom teaching process, with the help of transformation and generalization, from special to general mathematical thinking methods, and integrate primary equations and inequalities through primary functions, highlighting the idea of functions.

Keywords

Primary Functions and Equations, Inequalities, Instructional Design, Mathematical Thinking

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

思维培养是当代教育重点关注的问题，发展学生的思维主要通过学科教学来实现[1]。《义务教育数学课程标准(2022年版)》指出，数学思维主要表现在运算能力、推理意识或推理能力。通过独立的数学思维建设过程，学生能够理解数学与现实世界之间的联系并能够合乎情理地分析、解决数学问题和实际问题[2]。因此，在数学课堂教学中应立足于学生数学思维的发展[3]，为学生终生学习奠定坚实的基础。近年来，众多专家学者做了关于在课堂教学中落实数学思维的研究。有的以几何领域为例，通过建构不同层次的数学模型，层层深入，旨在开拓学生的数学思维[4]；有的具体分析三角形的内容，挖掘其蕴藏的数学思维方式并以“问题串”为主线设计教学过程，以达到数学育人的目的[5]；结合工作经历，详细分析数学课堂中存在的思维教学问题，并提出相关教学策略[6]等。总之，数学作为思维的科学，大部分教师都赞同发展学生数学思维的必要性，但在实际教学中对思维的培养很难落到实处[7]。

然而，学生的数学思维需要教师长期地、有意识地培养，“有意识”表明“教学需要设计”[8]。本文基于发展学生数学思维，旨在培养提高初中生运算能力、推理能力和推理能力，渗透数学思想方法，发挥数学课堂的育人价值，对“一次函数与方程、不等式”进行教学设计。

2. 基于学生思维培养的教材、学情与目标分析

2.1. 教材分析

《一次函数与方程、不等式》选自人教版义务教育课程标准实验教科书·数学，八年级下册第十九章第二节的内容。

本节是以一元一次方程和一元一次不等式等“一元一次”为前提，从变化和对应的角度，探究一次函数与一元一次方程、一元一次不等式之间的内在联系。该内容不是对所学知识进行简单地复习回顾，而是从另一个全新的角度，即用函数的观点加深对方程、不等式的认识，构建和发展相互联系的知识体系。通过这节课让学生进一步体会函数的重要性，对发展学生数形结合的思想 and 数学思维能力具有重要

的意义；同时也为二次函数的学习奠定良好的基础。

2.2. 学情分析

在本节课教学内容之前，学生已掌握一元一次方程和一元一次不等式的代数解法以及一次函数的解析式、一次函数的图象等相关知识。但如何将孤立的方程、不等式运用数形结合的思想来探究方程、不等式与函数图象之间的关系，这对八年级学生来说存在一定的困难。因此，在本节课的教学中，让学生反复实践，引导学生观察、思考、探究、讨论，然后启发学生归纳得出结论，以促进数形结合思想养成，并达到初步构建函数思想的目的。

2.3. 教学目标分析

1) 认识一次函数与一元一次方程，一元一次不等式之间的联系，会用函数观点解释求方程的解和不等式取值范围的过程。

2) 经历自主探究、合作交流、观察比较等过程，初步形成用全面的观点处理局部问题，能用一次函数的观点把以前学习的方程和不等式进行整合。

3) 学会用联系的眼光看待数学问题，进一步体会数形结合思想，培养学生的数学学习兴趣，发展数学思维。

3. 基于学生思维培养的教学过程设计

3.1. 创设情境，引入新知

从学生已有的知识出发，创设问题情境：观察一次函数 $y = ax + b$ ($a \neq 0$)、一元一次方程 $ax + b = 0$ ($a \neq 0$)、一元一次不等式 $ax + b > 0$ ($a \neq 0$)，这三个式子中都含有 $ax + b$ 这个一次多项式。那么，从数学的角度看，一次函数与一元一次方程、一元一次不等式之间是否真的存在着什么联系呢？

设计意图 设置悬念，激发学生新知的兴趣。新知中的三个主体对于学生来说并不陌生，为了让学生快速明白所学内容并不是简单的复习课，需要将学生的注意力转移到三者的“关系”上。通过 PPT 展示一次函数、一元一次方程、一元一次不等式的表达式，让学生得到直观感受，获取表达式中的表层共性。学生产生一种模糊的“存在某种联系”，但有不能明确说出具体的关系，由此生发探究的欲望。

3.2. 自主学习，探究新知

3.2.1. 自主探究一

探究一次函数与一元一次方程之间的关系。

问题 1 观察 $2x + 1 = 3$ 、 $2x + 1 = 0$ 、 $2x + 1 = -1$ 三个方程的特点。

问题 2 这三个方程与一次函数 $y = 2x + 1$ 之间有怎样的关系？

设计意图 通过问题引领学生探究具体的一元一次方程与其相对应的一次函数之间的联系。问题 1 为问题 2 的探究做铺垫，先让学生感受方程的特点，即等号的左边均为 $2x + 1$ ，进而与对应的一次函数之间建立联系。引导学生从“数”的角度分析解这三个方程相当于在一次函数 $y = 2x + 1$ 的函数值分别为 3、0、-1 时，求自变量 x 的值。

采用环环相扣、层层递进式的问题，符合学生的“最近发展区”，有利于激活学生的数学思维。

问题 3 同学们已经学习了一次函数图象的画法，不妨画出 $y = 2x + 1$ 的函数图象，并根据图象信息填空。

填空 $2 \times (\quad) + 1 = 3$

$2 \times (\quad) + 1 = 0$

$$2 \times (\quad) + 1 = -1$$

设计意图 建立与旧知之间的联系。学生在复习旧知的同时，感受到新旧知识之间的联系，前一阶段的学习总是能够为后一阶段的学习打下坚实的基础，这也从另一个角度说明，数学的学习是一个循序渐进的过程，每一步都要脚踏实地。

学生根据画出的一次函数图象，观察函数图象。以“数”的角度为基础分析方程的解，进一步建立一次函数表达的是两个变量之间的对应关系，分析问题，得出“填空”中的“空”对应的就是图象上的横坐标的值。虽然是简单的填空题，但是，依然需要学生头脑中建构出解题思路(如图 1)，清晰的思路有助于开发学生的数学思维。

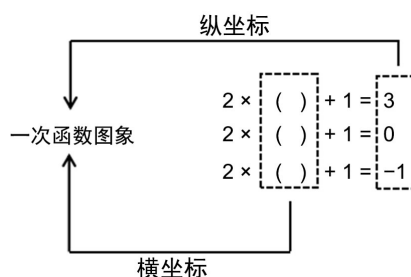


Figure 1. Problem solving ideas

图 1. 解题思路

问题 4 观察横坐标的值与对应方程解之间的关系。

设计意图 横坐标的值与对应方程解的大小相等(如图 2)。由此得出从“形”的角度进行分析，一元一次方程的解相当于相应的一次函数图象上取特定纵坐标时，对应的横坐标的值。通过层层分析，引导学生自主探究，分别从“数”和“形”的角度解释一元一次方程的解，让学生初步体验数形结合思想方法。

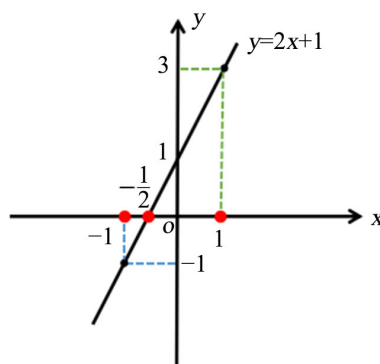


Figure 2. From a “form” perspective

图 2. 从“形”的角度

3.2.2. 自主探究二

探究一次函数与一元一次不等式之间的关系。

问题 1 生活中除了相等关系，还有更为常见的不等关系。如果将一元一次方程中的等号变为不等号也就成了一元一次不等式 $2x + 1 > 3$ 、 $2x + 1 < 0$ 、 $2x + 1 < -1$ 。类比探究一次函数与一元一次方程之间的关系，试从函数的角度对一元一次不等式进行解释。

设计意图 在经历了一次函数与一元一次方程的探究之后,直接将一元一次方程中的等号变为不等号,从而得到一元一次不等式。方程与不等式之间在形式上出现的不同符号,会导致与一次函数之间存在怎样的不同关系?引发学生又一深思。在此基础上恰到好处的提出问题,鼓励学生通过类比的方法继续探究一次函数与一元一次不等式之间的联系。

通过类比学习,学生思维得到横向扩充。从“数”与“形”的角度分析一元一次不等式。学生从“数”的角度分析得知,一元一次不等式 $2x+1>3$ 、 $2x+1<0$ 、 $2x+1<-1$ 的取值范围,分别对应一次函数 $y=2x+1$ 的函数值大于3、小于0、小于-1时,自变量 x 的取值范围。但从“形”的角度分析时会遇到些许不同,这时,可以继续下一个问题。

问题2 从“形”的角度怎样具体分析一元一次不等式的取值范围?

问题3 先分析 $2x+1>3$,已经知道纵坐标为3时,横坐标为1,那么 $y>3$ 时对应图象的哪一部分呢?

设计意图 根据一次函数图象分析所对应的一元一次不等式是本节课教学的重点内容。但学生不能快速地从函数图象上解释相应一元一次不等式的取值范围,遇到思维阻碍,此时通过有指引性的问题进行及时指导,有利于学生突破思维障碍,继续发展提升。

3.3. 合作交流, 比较归纳

问题1 从特殊到一般,所有的一元一次方程都可以转化为 $ax+b=0$ ($a\neq 0$)的形式,所有的一元一次不等式都可以转化为 $ax+b>0$ 、 $ax+b<0$ ($a\neq 0$)形式,它们都对于与一次函数 $y=ax+b$ ($a\neq 0$)。那么,现在回到课首的问题,一次函数与一元一次方程、一元一次不等式之间有怎样的联系?

问题2 从函数图象上进行分析,一元一次方程、一元一次不等式在图象中的对应关系?

设计意图 收尾呼应,小结归纳,将逐个分析的一元一次方程与一次函数、一元一次不等式与一次函数进行整体分析,融合一次函数与一元一次方程、一元一次不等式之间的关系,回到课程初衷。

由特殊到一般是数学中常见的一种思想方法,用这样的方法进行归纳推理,从具体推广到一般,得出普适性的结论。

问题2 是对整个课堂教学内容的升华,通过观察图形,将一元一次方程、一元一次不等式反应在函数图象上,一元一次方程对应函数图形上的某一个点,一元一次不等式对应函数图象上的某个部分。思维由之前分散在各处,经此进行了聚集,学生产生顿悟,明白课程的价值所在。

3.4. 习题分析, 巩固新知

练习 直线 $y=kx+b$ (k 、 b 为常数)交坐标轴于A(3,0)、B(0,6)两点。

- 1) 求一元一次方程 $kx+b=6$ 的解。
- 2) 求一元一次不等式 $kx+b>0$ 的取值范围。

设计意图 第1)问巩固一元一次方程与一次函数之间的联系、第2)问检验学生对于一元一次不等式与一次函数的掌握情况。将两个小问题设置在一个大题中,有效地将一次函数与一元一次方程、一元一次不等式进行融合,感受一次函数将方程、不等式进行统一。

学生的思维在经历上一个归纳、比较的环节后,急需一个实践的机会,将归纳得到的结论运用于实践之中,弥补思维缺口。问题的设置没有给出具体的 k 和 b 的值,有部分同学会根据A、B两点的坐标计算得出 k 、 b 的具体值,然后再解出1)、2)两问。这样的做法,虽然能得出最后答案,但并没有领会到一次函数与方程、不等式之间的深入联系,数学思维仍停留在表层,教师应该及时给予帮助解答。画出一函数的草图不失为一种有效的解题办法(如图3)。

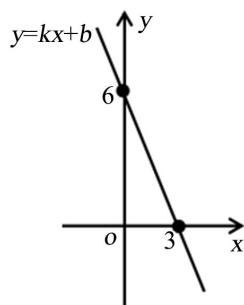


Figure 3. Sketch of the straight line $y = kx + b$

图 3. 直线 $y = kx + b$ 草图

3.5. 总结归纳，反思提升

问题 同学们通过本节课的学习有哪些收获？

设计意图 回顾本节课所学内容，让学生用数学的语言表达出来，培养学生的语言表达能力。此环节明确引出我国著名数学家华罗庚先生提出的“数缺形时少直观，形缺数时少细微”，即“数形结合思想”，感受我国数学文化的魅力。同时点明，一次函数通过转化与化归，从特殊到一般，以及数形结合思想将一元一次方程、一元一次不等式进行整合，这体现了一种函数思想。通过课堂反思、总结，将函数思想传递给学生，为今后的学习做准备。

4. 教学启示

数学课堂是传递数学思维的课堂，数学的学习亦是数学思维的学习。数学课堂教学中，除了基础知识，还要传递给学生用数学的头脑思考问题，用数学的思维解决问题。

虽然学生已在七年级学习了一元一次方程和一元一次不等式，但此次学习并非复习巩固这部分知识，而是从函数的角度解释一元一次方程的解以及一元一次不等式的取值范围。学生在面对既熟悉又陌生的知识时，在设计教学过程中，教师要充分把握好学生已有的知识体系，将陌生的内容有效地融入到熟悉的知识。在新旧知识的联结过程中，充分运用数形结合、转化与化归、从特殊到一般的数学思想方法，启发、提升学生的数学思维。

基金项目

黄冈师范学院校级研究生工作站项目“高中生数学学业情绪对学业成绩的影响因素——以黄冈外校为例”（项目编号：5032022018）。

湖北省教育科学规划 2022 年度重点课题“课程思政与数学文化双融合的中学数学教学设计研究”（项目编号：2022JA212）。

黄冈市教育科学规划课题“双减”目标下的作业设计与差异化教学研究（项目编号：2022GB39）。

参考文献

- [1] 林崇德. 思维心理学研究的几点回顾[J]. 北京师范大学学报(社会科学版), 2006(5): 35-42.
- [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [3] 杨豫晖, 宋乃庆. 小学数学课堂教学设计的问题与对策[J]. 课程·教材·教法, 2009, 29(4): 39-43.
- [4] 杨丽娟. 在层次性探索中发展数学思维——以研究“轴对称视角下线段和的最小值问题”为例[J]. 数学通报, 2019, 58(9): 47-49+59.
- [5] 章建跃. 研究三角形的数学思维方式[J]. 数学通报, 2019, 58(4): 1-10.

- [6] 程华. 数学课堂思维教学若干问题的思考[J]. 数学通报, 2018, 57(3): 26-29+52.
- [7] 伍春兰. 基于学生思维培养的数学定理教学的调查与分析——以“圆周角定理”教学设计为例[J]. 数学教育学报, 2017, 26(1): 55-58.
- [8] 章建跃. 学会用数学的方式解读内容设计教学——以“相交线”为例[J]. 数学通报, 2019, 58(1): 8-12+15.