

苏教版、人教A版与北师大版高中数学教材 “基本不等式”内容的比较

郭子杰

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2023年8月4日; 录用日期: 2023年10月4日; 发布日期: 2023年10月16日

摘要

基本不等式是解决优化问题的重要工具, 在中学数学的地位不容忽视。对三套高中数学教材中“基本不等式”的内容进行比较研究, 主要从内容编排和内容设置等方面进行分析, 了解不同版本教材的特点和差异, 并在此基础上提出总结和启示。

关键词

高中数学教材, 基本不等式, 教材比较, 苏教版, 人教A版, 北师大版

A Comparison of the Contents of “Basic Inequalities” in Senior High School Mathematics Textbooks of Jiangsu Education Version, People’s Education Version A and Beijing Normal University Version

Zijie Guo

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Aug. 4th, 2023; accepted: Oct. 4th, 2023; published: Oct. 16th, 2023

Abstract

Basic inequality is an important tool to solve optimization problems, and its position in middle school mathematics cannot be ignored. This paper makes a comparative study of the contents of

“basic inequalities” in three sets of senior high school mathematics textbooks, mainly from the aspects of content arrangement and content setting, to understand the characteristics and differences of different versions of textbooks, and put forward a summary and inspiration on this basis.

Keywords

High School Mathematics Textbook, Basic Inequality, Textbook Comparison, Jiangsu Education Version, People’s Education Version A, Beijing Normal University Version

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

数学教材是中学数学教学过程中最为重要的载体，直接体现数学课程内容和数学学科设计的理念以及思想，集中反映了国家的意识形态和教育理念[1]。教育部在 2017 年制定《普通高中数学课程标准(2017 版)》(以下简称《课标》)，而教材是对《课标》最直观的体现，虽然不同版本教材都是参考同一《课标》编制，但或多或少都有差异，教师要了解不同版本的教材，制定不同的教学方法，有的放矢，避免用旧方法来研究新教材。数学教材是师生获取数学知识的重要载体和资源，对数学教学质量有着重要的影响，数学教师在运用教材时遇到的问题与其对教材的解读深度有着紧密联系。教师通过对教材全方面解读，既可以满足学生认知需要，又可以促进自身专业成长。

不等式不是孤立存在的，在函数、数列、解析几何、向量等许多领域都蕴含不等式的思想，高考中单独考察不等式可能不多，但是大部分题目都会涉及不等式的思想。而基本不等式是学习不等式章节的基础，对不等式内容的理解会产生重大影响。基本不等式主要应用于求某些函数的最值及证明问题，是解决优化问题的重要工具，与现实生活有着密切联系。应用基本不等式解决实际问题的过程对学生形成数学建模核心素养起到至关重要的作用，同时为更复杂的不等式如柯西不等式、幂平均不等式的证明奠定基础，基本不等式的出现为不等式的证明提供了新思路和新方向[2]。教师需要深入理解不等式内容以及不同版本教材的编写特点以更好地进行课堂教学。因此本文通过对江苏教育出版社、人民教育出版社 A 版与北京师范大学出版社(以下简称苏教版、人教 A 版与北师大版)中的“基本不等式”内容进行比较研究，并在此基础上提出总结与启示。

2. “基本不等式”内容编排的比较

三版教科书都将基本不等式的内容放到必修一，其中苏教版将其放在第三章第二节，人教 A 版放在第二章第二节，北师大版放在第一章第三节。三版教材的内容比较具体见表 1。

Table 1. Comparison of the contents of the three teaching materials

表 1. 三版教材的内容比较

教材	教学内容安排
苏教版	不等式的基本性质→基本不等式→从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式
人教 A 版	等式性质与不等式性质→基本不等式→二次函数与一元二次方程、不等式
北师大版	不等式的性质→基本不等式

由表 1 可见, 三版教材在内容上没有较大出入, 首先都介绍了不等式的性质, 但苏教版和北师大版并没有对等式的性质进行回顾, 而人教 A 版将等式的性质与不等式的性质进行对比, 加深学生对知识的印象。对于基础良好的学生来说, 此处差异并没有太大的影响, 但是对于基础薄弱的同学来说, 人教 A 版教材有助于学生快速接受新知识。而且北师大版并没有设置函数与一元二次方程、不等式的章节进行学习, 而是将其独立出去, 额外作为一个小节进行系统的学习。

三版教材都将不等式的内容放在了第一册的开头章节, 将不等式安排在了预备知识部分的位置, 原因是因为不等式在高中数学的学习中通常被当作一个工具性知识用来辅助解决其他模块的问题, 在数学的各个领域都是不可缺少的工具[3]。不等式作为工具性知识为后续学习奠定了坚实的基础, 同时不等式学习中渗透的数学思想方法也能使初高中数学思维衔接的更加流畅。虽然基本不等式结构简单, 但证明方法多种多样, 不仅在中学数学中证明问题和求最值问题上应用广泛, 在高等数学中求极限、证明积分不等式也会用到, 因此基本不等式这一章节具有重要的教学价值。

3. “基本不等式”内容设置的比较

3.1. “基本不等式”定义的引入比较

苏教版创设情境导入课题, 以天平称重问题为例, 如果天平制造的不精确, 两臂长度不同, 如何合理表示物体的质量这一实际问题引入, 根据力学原理, 得出 $L_1 \times L_2 \times M^2 = L_1 \times L_2 \times ab$ 的公式(L_1 、 L_2 分别为天平两边的长度, M 为物体实际的质量, a 、 b 分别为物体在天平的左右两个盘子称出的重量), 引出“算数平均数”和“几何平均数”的概念, 如图 1 所示。这种方法较为直观, 体现了建构主义的教学理论, 以现实情境为基础, 把概念与生活进行链接, 在情境中探寻最适合学生发散思维、提升综合素养的意境, 以激发学生的求知欲, 提升学生解决问题、应用知识的能力, 并提高课堂学习的趣味性。

把一个物体放在天平的一个盘子上, 在另一个盘子上放砝码使天平平衡, 称得物体的质量为 a 。如果天平制造得不精确, 天平的两臂长略有不同(其他因素不计), 那么 a 并非物体的实际质量。不过, 我们可作第二次测量: 把物体调换到天平的另一个盘子上, 此时称得物体的质量为 b 。那么如何合理地表示物体的质量呢?

简单的做法是, 把两次称得物体的质量“平均”一下, 以

$$A = \frac{a+b}{2}$$

表示物体的质量。这样的做法合理吗?

设天平的两臂长分别为 l_1 , l_2 , 物体实际质量为 M , 根据力学原理有

$$l_1 M = l_2 a,$$

$$l_2 M = l_1 b,$$

将上述两个等式的两边分别相乘, 得

$$l_1 l_2 M^2 = l_1 l_2 ab,$$

所以

$$M = \sqrt{ab}.$$

由此可知, 物体的实际质量是 \sqrt{ab} 。对于正数 a , b , 我们把 $\frac{a+b}{2}$

称为 a , b 的算术平均数, \sqrt{ab} 称为 a , b 的几何平均数。

Figure 1. Introduction process of Jiangsu Education version

图 1. 苏教版引入环节

如图 2 所示，人教 A 版教材没有给出问题情境，而是依赖于上一节课内容，由“是否也有一些不等式，它们在解决不等式问题时有着与乘法公式类似的作用呢？”这简短的一句话引出下文，由完全平方公式得出的重要不等式作为思，直接给出“基本不等式”、“算术平均数”、“几何平均数”的定义，明确了基本不等式的重要作用，渗透了本节课的思想方法，但学生能否充分的理解尚未可知，人教 A 版教材的编排对教师教学提出了更高的要求。

我们知道，乘法公式在代数式的运算中有重要作用。那么，是否也有一些不等式，它们在解决不等式问题时有着与乘法公式类似的重要作用呢？下面就来研究这个问题。

前面我们利用完全平方公式得出了一类重要不等式：

$\forall a, b \in \mathbf{R}$ ，有

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

当且仅当 $a = b$ 时，等号成立。

特别地，如果 $a > 0$ ， $b > 0$ ，我们用 \sqrt{a} ， \sqrt{b} 分别代替上式中的 a ， b ，可得

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (1)$$

当且仅当 $a = b$ 时，等号成立。

通常称不等式(1)为**基本不等式**(basic inequality)。其中， $\frac{a+b}{2}$ 叫做正数 a ， b 的

算术平均数， \sqrt{ab} 叫做正数 a ， b 的几何平均数。

Figure 2. Introduction process of People's Education version A

图 2. 人教 A 版引入环节

如图 3 所示，北师大版教材和人教 A 版一样，都没有给出具体的问题情境而是直接由完全平方和公式中的变量得到基本不等式，进而给出算术平均值和几何平均值的概念。并由半圆中的相似三角形的性质来阐述基本不等式的一种几何解释。这种编排方式言简意赅，学生上课能直接进入状态。但相比较而言，苏教版教材更符合学生的认知发展，这种方式更为恰当。

对于任意实数 x 和 y ， $(x-y)^2 \geq 0$ 总是成立的，即 $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ ，所以

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy, \text{ 当且仅当 } x = y \text{ 时, 等号成立。}$$

设 $a \geq 0$ ， $b \geq 0$ ，取 $x = \sqrt{a}$ ， $y = \sqrt{b}$ ，代入上述不等式可得

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ 当且仅当 } a = b \text{ 时, 等号成立。}$$

这个不等式称为基本不等式，其中， $\frac{a+b}{2}$ 称为 a ， b 的算术平均值， \sqrt{ab} 称为 a ， b 的几何平均值。因此，基本不等式又称为均值不等式，也可以表述为：

两个非负实数的算术平均值大于或等于它们的几何平均值。

Figure 3. Introduction process of Beijing Normal University version

图 3. 北师大版引入环节

综合来看,苏教版教材运用情境导入的方法教学,通过生活实践情境重视与其他学科和社会实践的联系,是考察学生数学核心素养培养的重要组成部分[4],数学情境是为了完成某个既定的数学教学任务,而建构的具有数学涵义的情境场域[5],创设合宜的数学情境,能够使学生深刻体会到数学知识和思想方法的形成过程。人教A版和北师大版在对此章节的概念的学习没有设置情境,教师在教学过程中要在理解现状的基础上,对数学情境进行深入的研究,建构出合适的教学情境。在教学过程中,也要从数学情境出发,将教学生活和现实生活相结合,使课堂教学的效果最大化,而这也对教师提出更高的要求。

3.2. “基本不等式”证明的比较

Table 2. Comparison of proofs of “basic inequality”

表 2. “基本不等式”证明的比较

苏教版	人教 A 版	北师大版
方法一: 要证: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 只要证: $2\sqrt{ab} \leq a+b$, 只要证: $2\sqrt{ab} - a - b \leq 0$, 只要证: $-(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq 0$, 只要证: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, 显然成立, 得证。	要证: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 只要证: $2\sqrt{ab} \leq a+b$, 只要证: $2\sqrt{ab} - a - b \leq 0$, 只要证: $-(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq 0$, 只要证: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, 显然成立, 得证。	对于任意实数 x 和 y , $(x-y)^2 \geq 0$ 总是成立, 即 $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, 所以 $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$, 当且仅当 $(x-y)^2 = 0$ 时等号成立, 设 $a \geq 0$, $b \geq 0$, 取 $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, 代入上述不等式可得, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立。
方法二: 对正数 a 、 b , 有 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ 得证。		
方法三: 对于正数 a 、 b , 有, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, 有, $a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$, 有, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 有 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 得证。		

求解和证明是数学学科的重要特征,也是数学活动的重要组成部分。推理和证明是学生学习的难点,在数学教育研究方面也是一个需要重点研究的部分[6]。通过选取三个版本教材对基本不等式的证明内容进行比较说明(表 2)。

苏教版利用半圆中相似三角形的性质,在半圆圆弧上任取一点,向直径作垂线,得到两个相似三角形,由其基本性质对基本不等式的结论进行了猜想,并用三种不同的方法加以证明,分别为反证法、完全平方公式法和移项相减法。苏教版借由图例引起学生兴趣和探求新知的欲望,提高学生学习的积极性,并用多种方法加以证明以扩充学生视野并提供解决问题的多种思路。在解题方法多样性中,学生可以捕捉到许多思维的亮点,从而激发创新灵感。

人教 A 版通过考察 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 的特殊情形获得基本不等式,猜想直接利用不等式的性质推导出基

本不等式，并用反证法进行证明，通过设置一个探究框，由圆中相似三角形的性质，来探索基本不等式的几何解释。这个探究问题更注重猜想，有助于学生发散思维，通过引导学生对基本不等式的几何解释进行独立的思考，利用探究来进行知识的过渡，学生容易接受。

北师大版通过对完全平方公式进行变形，直接给出了基本不等式、几何平均值和算术平均值的定义，并用文字表述为“两个非负实数的算术平均值大于或等于他们的几何平均值”。利用半圆中相似三角形的性质来探索基本不等式的几何解释，并用基本不等式和上述几何图形来推导其他的简单的不等式。

基本不等式是一个抽象晦涩的知识点，是整章内容的教学难点，三版教材对基本不等式证明表述不同，苏教版的第一种方法和人教 A 版的方法相同，但苏教版的特别之处在于多给了两种证明方法，开拓了学生的思路，发散了学生的思维；而人教 A 版用分析法进行分析证明，所利用的原理是前文学过的不等式性质，人教 A 版教材的内容前后文联系十分紧密，内容相互贯通，有利于学生对知识点进行系统的理解和掌握；北师大版对完全平方和公式中的变量进行替换得到基本不等式。

3.3. “基本不等式”应用的比较

苏教版和人教 A 版都将基本不等式的应用作为额外的一小节内容进行教学，并分别设置了四道和两道实际生活中的例题；北师大版并没有将其额外设置为一个小节，而是设置了实例分析和思考交流的版块，让学生思考问题，并且设置了一道实际生活中的例题供学生探讨。高中学生具备一定的生活常识，对周围事物和现象有着好奇心，而三版教材都紧紧抓住学生好奇心的特点，结合教材的教学内容，创设实际生活问题及情境，设疑引思，用学生熟悉的生活经验作为实例，把数学的应用隐藏在情境中，激发学生积极的操作，发挥学生的主体作用，使学生认清数学知识的实用性。

3.4. “基本不等式”例题习题数量和题型的比较

Table 3. The comparison of the number of exercises and the types of the examples of “basic inequalities”

表 3. 例题习题数量和题型的比较

版本	苏教版	人教 A 版	北师大版
例题数量(个)	6	4	2
习题数量(个)	21	17	21
题型	1) 基础题和巩固题以考察基本不等式的概念定义为主 2) 探究题以考察基本不等式为主的实际问题	1) 基础题和巩固题以考察基本不等式的概念定义为主 2) 探究题以考察基本不等式为主的实际问题以及证明问题	1) 基础题和巩固题以考察基本不等式的概念定义为主以及证明问题 2) 探究题以考察基本不等式为主的实际问题

例题和习题是教材的重要组成部分，是学生活动的重要内容，下面对三套高中教材中“基本不等式”内容的例题、习题(包含练习题、习题、复习题)进行题量统计与题型分析[7]。具体如表 3 所示。从表 3 可以看出，苏教版教材例题和习题的总题量 27 题明显高于人教 A 版的 21 题和北师大版的 23 题，北师大版的例题数量只有两道最少，而人教 A 版的习题数量最少，只设置了 17 道习题。苏教版教材题型均是让学生巩固基本不等式的概念定理和实际问题为主，而人教 A 版和北师大版教材题型除涉及基本不等式概念定理和实际问题，还涉及基本不等式的证明问题，有利于学生更好的掌握基本不等式。

4. 总结与启示

4.1. 总结

通过三版本教材各方面的比较，得出教材设计理念基本相同，都严格遵循新课程标准。概念引入方

面, 苏教版提供了丰富的实际背景, 重视情境教学; 人教 A 版和北师大版内容言简意赅, 但对教师提出了更高的要求; 例题设置有梯度, 适合不同层次学生发展, 也都注重数学文化在课程中的渗透, 但是在个别知识点的编排上各有侧重。另苏教版题量稍多于人教 A 版和北师大版, 而人教 A 版和北师大版在探究中设置了有关基本不等式的证明问题, 更有广度。

4.2. 教学启示

(1) 概念的引入方式需利于学生理解概念。随着新课改的深入, 教学不再是单纯地传授知识, 而要从学生的生活经验和实际水平出发, 培养学生科学分析问题和解决问题的能力。创设数学情境可以使学生经历数学知识和数学理论的形成过程, 因此在情境导入时选择生活中的实例可以调动学生对本门课程学习的积极性, 激发学生的学习兴趣, 尽量规避一些有争议的实例, 以防阻碍学生对概念的理解。教师可结合各版本教材, 关注差异, 取长补短; 比如学习苏教版运用实例进行情境导入以及多种证明问题的多种发散, 以帮助学生发散思维; 又可以学习人教 A 版带领学生回顾旧知, 自然而然引出新知, 贯彻发生教学的思想; 也可以学习北师大版设置不同类型的例题习题, 对例题和习题的安排更有广度。教师需要针对不同的教材, 选取合适的教学方法, 以确保教学能“得法”。

(2) 注重初高中知识衔接, 考虑学生的认知规律。基本不等式内容位于必修一, 学生处于高一阶段, 高中知识较为薄弱, 学生的知识基础以初中阶段的知识为主, 而初中阶段的知识较为形象具体, 因此基本不等式的课堂教学要关注学生的认知水平, 使知识的形成过程符合学生的认知规律。其中苏教版创设实际问题情境导入课题, 以天平称重问题为例, 如何合理表示物体的质量这一实际问题引入, 根据力学原理, $L_1 \times L_2 \times M^2 = L_1 \times L_2 \times ab$ 的公式, 进而引出“算数平均数”和“几何平均数”的概念, 这种知识呈现方式将数学知识与现实生活联系起来, 整个知识的形成过程更加符合学生的认知。

(3) 在教学中要注重数学思想方法的渗透。一堂好的数学课, 不仅要注重知识技能的传授, 也要注重数学思想方法的渗透, 要重视学生“四基”的培养。在基本不等式的证明过程中, 苏教版的证明方式更加多样化, 教学过程中会渗透更多的数学思想方法, 北师大版的证明过程体现换元的思想, 教师在教学过程中要使学生真正掌握这些数学思想方法, 而非只注重公式本身。同时需加强信息技术的应用, 以提高教学效果。在基本不等式的教学中信息技术应该与数学课程高度整合, 以苏教版教材为例, 导入中的天平称重问题的探究过程以及基本不等式的几何解释的证明过程可以通过 PPT 制作动画展示出来, 一方面可以吸引学生注意力, 提高课堂效果; 另一方面可以把直观展示知识的形成过程, 便于学生理解。

参考文献

- [1] 张倩, 黄毅英. 教科书研究之方法论建构[J]. 课程·教材·教法, 2016, 36(8): 41-47.
<https://doi.org/10.19877/j.cnki.kcjcf.2016.08.007>
- [2] 钟志华, 李渺. 基于变式教学的数学教学设计——以“基本不等式”为例[J]. 数学通报, 2019, 58(5): 23-27.
- [3] 于晓宇, 李春兰. 高中基本不等式研究的回顾与展望——基于中国知网中文核心期刊文献的统计分析[J]. 数学通报, 2021, 60(10): 21-28.
- [4] 崔颖芳. 新教材背景下对概念课的情境教学探究——以“导数的概念”为例[J]. 数学通讯, 2022(7): 21-24.
- [5] 张定强, 张元媛, 王彤. 数学情境教学: 理解现状与增润课堂[J]. 中小学教师培训, 2017(5): 58-61.
- [6] 付钰, 王嘉瑶, 綦春霞. 七年级数学教材中的推理与证明[J]. 数学教育学报, 2021, 30(6): 64-68.
- [7] 陆明明. 数学教科书例题的分类及其教学建议[J]. 数学教育学报, 2018, 27(2): 54-58+102.