Computer Science and Application 计算机科学与应用, **2017, 7(9), 814-819**
Published Online September 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/csa
https://doi.org/10.12677/csa.2017.79093

Hans汉斯

Domination Numbers for Generalized Base-*b* Hypercube Networks

Haizhong Shi, Jinxia Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: haizhong.shi@163.com, 1256504637@qq.com

Received: Aug. 5th, 2017; accepted: Aug. 21st, 2017; published: Aug. 31st, 2017

Abstract

Domination number is a parameter to describe the reliability of resource sharing in a fault-tolerant network. Determining the domination numbers of a graph is a NPC problem. Generalized base-*b* hypercube has been put forward by Lakshmivardhan and Dhall, which is a famous interconnection network. In this paper, we study the exact values of the domination numbers of generalized base-*b* hypercube for $b=3, n=2,3,4$ and the bounds of the domination numbers for $5 \le n \le 8$. Furthermore, two problems and two conjectures with the problems are proposed.

Keywords

Generalized Base-*b* Hypercube Network, NPC Problem, Domination Number

广义*b*-基超立方体网络的控制数

师海忠，杨进霞

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: haizhong.shi@163.com, 1256504637@qq.com

收稿日期：2017年8月5日；录用日期：2017年8月21日；发布日期：2017年8月31日

摘　要

控制数是刻画容错网络中资源共享可靠性的一个参数。确定网络的控制数是NPC问题。Lakshmivarahan, Dhall提出了著名的互连网络—广义*b*-基超立方体网络。该文给出了当 $b=3, n=2,3,4$ 时广义*b*-基超立方体网络控制数的具体值，以及当 $5 \le n \le 8$ 时控制数的界；进一步提出了两个问题和与该问题相对应的两个猜想。

文章引用: 师海忠, 杨进霞. 广义 *b*-基超立方体网络的控制数[J]. 计算机科学与应用, 2017, 7(9): 814-819.
DOI: 10.12677/csa.2017.79093

关键词

广义*b*-基超立方体网络，NPC问题，控制数

1. 引言

互连网络是超级计算机的重要组成部分。互连网络可以模型化为一个图。图的顶点表示系统中的处理机，图的边表示处理机之间的通信链路，其中有向边表示单工通信链路，无向边表示半双工通信链路[1]。该文中讨论的是无向图。各种已有互连网络参见[1]-[15]。广义 *b*-基超立方体网络是一种特殊的凯莱图，由 Lakshmivarahan 和 Dhall [2]中提出，因广义 *b*-基超立方体网络有简单对称正则的结构而被研究。广义 *b*-基超立方体网络是超立方体网络的推广，在很多性质方面优于超立方体网络，例如直径，连通性，容错直径等[3]。

图的控制理论是图论的重要分支，美国图论学者 W. T. Haynes 等[16]在 1998 年出版的专著较为系统地综述了这一领域的一些重要研究成果。尤其在图的点控制方面，提出了多种控制概念。事实上，我们在研究网络的各种控制数时，总是将该网络的一些基本参数(如顶点数，度，直径等)相联系。该文其余结构如下，第二节，给出相关的定义；第三节，给出当 $b=3,n=2,3,4$ 时广义 *b*-基超立方体网络控制数的具体值，以及当 $5\le n\le 8$ 时控制数的界，进一步提出了两个问题和两个猜想；第四节，结束语。

2. 预备知识

定义 1 [17]：设 $b\ge 2$，$n\ge 1$，其中 b,n 都是整数。定义

$$\Omega_9=\left\{\left(j,j+1,\cdots,j+b-1\right)^i \,\middle|\, j=1+bk,0\le k\le n-1\text{且}1\le i\le b-1\right\}$$

$$GC_n\left(b\right)=GC_{n-1}\left(b\right)\times K_b$$

$GC_n\left(b\right)$ 表示由 Ω_9 生成的凯莱图，并且 $GC_1\left(b\right)$ 同构于 K_b，K_b 是具有 b 个顶点的完全图。在这里“$\times$”表示标准的笛卡尔积运算。

显然，广义 *b*-基超立方体网络是 2 元超立方体的一种推广。

定义

$$C_{bn}=\left\{\left(1\,2\cdots b\right)^{i_1}\left(b+1\,b+2\cdots 2b\right)^{i_2}\cdots\left(\left(n-1\right)b+1\left(n-1\right)b+2\cdots nb\right)^{i_n}\,\middle|\,0\le i_j\le b-1,1\le j\le n\right\}$$

置换 C_{bn} 的子群由 Ω_9 生成。

设 $\Sigma_b=\left\{0,1,\cdots,b-1\right\}$，定义一个编码

$$f_b:C_{bn}\to\left(\Sigma_b\right)^n$$

$$f_b\left(\left(1\,2\cdots b\right)^{i_1}\left(b+1\,b+2\cdots 2b\right)^{i_2}\cdots\left(\left(n-1\right)b+1\left(n-1\right)b+2\cdots nb\right)^{i_n}\right)=i_1i_2\cdots i_n$$

因此，我们将 $GC_n\left(b\right)=\left(V,E\right)$ 表示为 n 维 *b*-基超立方体。

$$V=\left\{x_1\ x_2\cdots x_n\left|x_i\in\Sigma_b\right.\right\}=\left(\Sigma_b\right)^n$$

$$E=\left\{(x,y)\left|x=x_1x_2\cdots x_n,y=y_1y_2\cdots y_n,\text{且对于某一个}i,1\le i\le n,x_i\ne y_i\text{和}x_j=y_j,i\ne j\right.\right\}$$

$GC_n(b)$ 的主要性质：

1) $GC_n(b)$ 是 $n(b-1)$ 正则的，有 b^n 个顶点和 $\frac{b^n}{2}(b-1)n$ 条边。

2) $GC_n(b)$ 直径为 n。

3) $GC_n(b)$ 是距离可迁的，因而是顶点可迁，且是对称的，距离正则的。

定义 2 [18]：设 $G=(V,E)$ 为一个图，$D\subseteq V$ 如果对于每个点 $v\in V-D$，存在 $u\in D$，使得 $uv\in E$，则称 D 为 G 的一个控制集。图 G 的控制数 $\gamma(G)$ 定义为：$\gamma(G)=\min\{|D|:D\text{为图}G\text{的一个控制集}\}$。

3. 广义 b-基 超立方体网络 $GC_n(b)$ 的控制数

当 $b=2$ 时，$\gamma(Q_5)=7$，$\gamma(Q_6)=7$，$\gamma(Q_7)=16$ [19]。

当 $n=2^k-1$ 和 $n=2^k$ 时，$\gamma(Q_n)=2^{n-k}$ [20]。

定理 1：当 $n=2,b=3$ 时，$\gamma(GC_2(3))=3$。其中 $\gamma(GC_2(3))=3$ 是 $GC_2(3)$ 的控制数。

证明：当 $n=2,b=3$ 时，$GC_2(3)$ 见图 1，取 $D=\{00,11,22\}$。即 D 为 $GC_2(3)$ 的控制集，且 $|D|=3$。

为了证明以下定理，我们给出以下记号。

我们用 S_i 表示顶点坐标第 1 个位置为 i 的所有顶点的集合，$0\le i\le 2$。

定理 2：当 $n=3,b=3$ 时，$\gamma(GC_3(3))=5$。其中 $\gamma(GC_3(3))$ 是 $GC_3(3)$ 的控制数。

证明：当 $n=3,b=3$ 时，$GC_3(3)$ 见图 2，取 $S=\{000,111,122,212,221\}$ 是 $GC_3(3)$ 的控制集。因此 $\gamma(GC_3(3))\le 5$。现在，令 D 是 $GC_3(3)$ 的任意一个控制集。我们断言 $|D|\ge 5$，我们考虑以下情况。

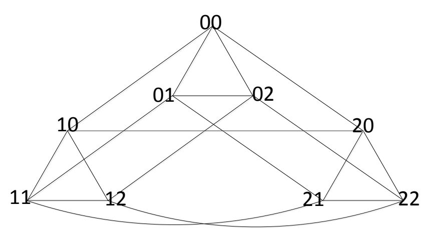

Figure 1. $GC_2(3)$

图 1. $GC_2(3)$

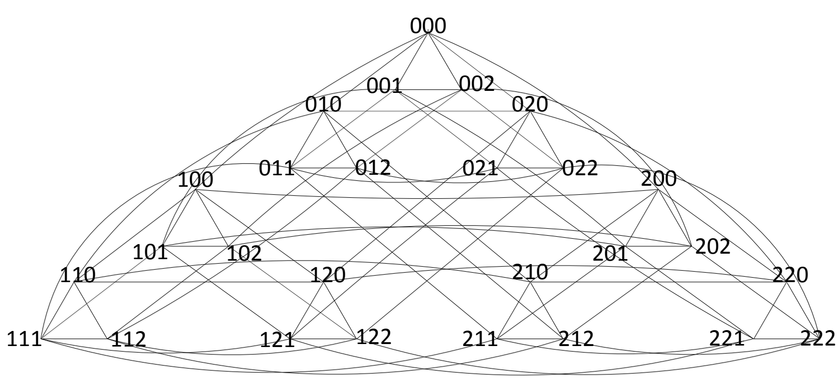

Figure 2. $GC_3(3)$

图 2. $GC_3(3)$

情况 1： $000 \in D$

若 $S_1 \cap D = S_2 \cap D = \varnothing$，那么 $|S_0 \cap D| = 9$，即 $|D| \ge 5$。

若 $S_1 \cap D = \varnothing$ 而 $S_2 \cap D \ne \varnothing$，那么 $|(S_0 \cup S_2) \cap D| \ge 9$。如果 $|S_0 \cap D| \ge 2$,那么 $|S_2 \cap D| \ge 7$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_0 \cap D| \ge 3$，那么 $|S_2 \cap D| \ge 6$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_0 \cap D| \ge 4$，那么 $|S_2 \cap D| \ge 5$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_0 \cap D| \ge 5$，那么 $|S_2 \cap D| \ge 4$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_0 \cap D| \ge 6$，那么 $|S_2 \cap D| \ge 3$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_0 \cap D| \ge 7$，那么 $|S_2 \cap D| \ge 2$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_0 \cap D| \ge 8$，那么 $|S_2 \cap D| \ge 1$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_0 \cap D| = 9$，那么 $|S_2 \cap D| = 0$，即 $|D| \ge 5$。以上情况 $|D| \ge 5$。

若 $S_1 \cap D \ne \varnothing$ 而 $S_2 \cap D = \varnothing$，证明过程和 $S_1 \cap D = \varnothing$ 而 $S_2 \cap D \ne \varnothing$ 类似。

情况 2： $111 \in D$

根据对称性，证明跟 情况 1 类似。

情况 3： $222 \in D$

根据对称性，证明跟 情况 1 类似。

情况 4： $000 \notin D$， $111 \notin D$

若 $S_0 \cap D = \varnothing$，那么 $|(S_1 \cup S_2) \cap D| \ge 9$。如果 $|S_2 \cap D| = 9$，那么 $|S_1 \cap D| = 0$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_2 \cap D| \ge 8$，那么 $|S_1 \cap D| \ge 1$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_2 \cap D| \ge 7$，那么 $|S_1 \cap D| \ge 2$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_2 \cap D| \ge 6$，那么 $|S_1 \cap D| \ge 3$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_2 \cap D| \ge 5$，那么 $|S_1 \cap D| \ge 4$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_2 \cap D| \ge 4$，那么 $|S_1 \cap D| \ge 5$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_2 \cap D| \ge 3$，那么 $|S_1 \cap D| \ge 6$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_2 \cap D| \ge 2$，那么 $|S_1 \cap D| \ge 7$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_2 \cap D| \ge 1$，那么 $|S_1 \cap D| = 8$，即 $|D| \ge 5$。以上情况 $|D| \ge 5$。

若 $S_1 \cap D = \varnothing$，证明过程和 $S_0 \cap D = \varnothing$ 类似。

若 $S_0 \cap D = S_1 \cap D \ne \varnothing$，那么 $|(S_0 \cup S_1 \cup S_2) \cap D| \ge 9$。如果 $|(S_1 \cup S_2) \cap D| \ge 8$，那么 $|S_0 \cap D| \ge 1$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|(S_1 \cup S_2) \cap D| \ge 7$，那么 $|S_0 \cap D| \ge 2$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|(S_1 \cup S_2) \cap D| \ge 6$，那么 $|S_0 \cap D| \ge 3$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|(S_1 \cup S_2) \cap D| \ge 5$，那么 $|S_0 \cap D| \ge 4$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|(S_1 \cup S_2) \cap D| \ge 4$，那么 $|S_0 \cap D| \ge 5$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|(S_1 \cup S_2) \cap D| \ge 3$，那么 $|S_0 \cap D| \ge 6$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|(S_1 \cup S_2) \cap D| \ge 2$，那么 $|S_0 \cap D| = 8$，即 $|D| \ge 5$。以上情况 $|D| \ge 5$。

情况 5： $000 \notin D$， $222 \notin D$

根据对称性，证明跟 情况 4 类似。

情况 6： $000 \notin D$， $111 \notin D$， $222 \notin D$。

若 $S_0 \cap D = \varnothing$，那么 $|(S_1 \cup S_2) \cap D| \ge 5$。如果 $|S_1 \cap D| \ge 4$，那么 $|S_2 \cap D| \ge 1$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_1 \cap D| \ge 3$，那么 $|S_2 \cap D| \ge 2$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_1 \cap D| \ge 2$，那么 $|S_2 \cap D| \ge 3$，即 $|D| \ge 5$。如果 $|S_1 \cap D| \ge 1$，那么 $|S_2 \cap D| \ge 4$，即 $|D| \ge 5$。以上情况 $|D| \ge 5$。

若 $S_1 \cap D = \varnothing$，那么 $|(S_0 \cup S_2) \cap D| \ge 5$，情况跟 $S_0 \cap D = \varnothing$ 的类似，即 $|D| \ge 5$。

若 $S_2 \cap D = \varnothing$，那么 $|(S_0 \cup S_1) \cap D| \ge 5$，情况跟 $S_0 \cap D = \varnothing$ 的类似，即 $|D| \ge 5$。

若 $S_0 \cap D = S_1 \cap D = S_2 \cap D \ne \varnothing$，那么 $|(S_0 \cup S_1 \cup S_2) \cap D| \ge 5$，即 $|D| \ge 5$。

因此在所有的情况下 $|D| \ge 5$。

所以 $\gamma(GC_3(3)) = 5$。

定理 3：当 $n = 4, b = 3$ 时， $\gamma(GC_4(3)) = 9$。其中 $\gamma(GC_4(3))$ 是 $GC_4(3)$ 的控制数。

由于图过于复杂，我们在此给出顶点

0000, 0001, 0002, 0010, 0011, 0012, 0020, 0021, 0022

0100, 0101, 0102, 0110, 0111, 0112, 0120, 0121, 0122

0200, 0201, 0202, 0210, 0211, 0212, 0220, 0221, 0222

1000, 1001, 1002, 1010, 1011, 1012, 1020, 1021, 1022
1100, 1101, 1102, 1110, 1111, 1112, 1120, 1121, 1122
1200, 1201, 1202, 1210, 1211, 1212, 1220, 1221, 1222
2000, 2001, 2002, 2010, 2011, 2012, 2020, 2021, 2022
2100, 2101, 2102, 2110, 2111, 2112, 2120, 2121, 2122
2200, 2201, 2202, 2210, 2211, 2212, 2220, 2221, 2222

证明 $S=\{0000,0111,0222,1012,2021,2102,1120,2210,1201\}$ 是 $GC_4(3)$ 的控制集。因此 $\gamma(GC_4(3))\le 9$。可以根据定理 2 的过程来证明 $\gamma(GC_4(3))\ge 9$。所以 $\gamma(GC_4(3))=9$。

为了得出以下定理，我们给出如下引理：

引理 1 [3]：对任意 n 阶图 G，若 $\Delta=\Delta(G)$ 为图 G 的最大度，则有

$$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta} \right\rceil \le \gamma(G) \le n-\Delta$$

由以上引理我们可以推出：

推论 1：图 $GC_n(b)$ 阶为 b^n 且度为 $n(b-1)$，则有

$$\left\lceil \frac{b^n}{1+n(b-1)} \right\rceil \le \gamma(GC_n(b)) \le b^n-n(b-1)$$

但是以上推论中得出的控制数的界范围过大，从而我们进一步细化，得出以下定理：

定理 4：当 $n=5,b=3$ 时，图 $GC_5(3)$ 阶为 3^5 且度为 10，则有

$$23 \le \gamma(GC_5(3)) \le 27$$

证明：令 D 是图 $GC_5(3)$ 的最小控制集，图中每个顶点最多可以控制它自己以及另外 10 个点，所以 $\gamma(GC_5(3))\ge 23$。若 S = {00000, 00111, 00222, 01012, 01120, 01201, 02021, 02102, 02210, 10000, 10111, 10222, 11012, 11120, 11201, 12021, 12102, 12210, 20000, 20111, 20222, 21012, 21120, 21201, 22021, 22102, 22210}是 $GC_5(3)$ 控制集。因此 $\gamma(GC_5(3))\le 27$。即 $23\le\gamma(GC_5(3))\le 27$。

定理 5：当 $b=3,5\le n\le 8$ 时，图 $GC_n(3)$ 的阶为 3^n 且度为 $2n$，则有

$$\left\lceil \frac{3^n}{1+2n} \right\rceil \le \gamma(GC_n(3)) \le 3^{n-2}$$

证明：根据定理 4 得证 $\left\lceil \frac{3^n}{1+2n} \right\rceil \le \gamma(GC_n(3))$。

下证 $\gamma(GC_n(3))\le 3^{n-2}$。因为 $\gamma(G\times K)\le 3\gamma(G)$，所以有

$$\gamma(GC_n(3))=\gamma(GC_{n-1}(3)\times K_3)\le 3\gamma(GC_{n-1}(3))\le 3^2\gamma(GC_{n-2}(3))\le\cdots\le 3^{n-4}\gamma(GC_4(3))=3^{n-4}\cdot 3^2=3^{n-2}$$

即 $\left\lceil \frac{3^n}{1+2n} \right\rceil \le \gamma(GC_n(3)) \le 3^{n-2}$。

问题 1：广义 3-基 n-立方体的控制数是多少？

猜想 1：若 $b=3$，$\left\lceil \frac{3^n}{1+2n} \right\rceil \le \gamma(GC_n(3)) \le \left\lceil \frac{3^n}{1+n} \right\rceil$，其中 $\gamma(GC_n(3))$ 是广义 3-基 n-立方体 $GC_n(3)$ 的控制数。

更一般地，我们有

问题 2：广义 b-基 n-立方体的控制数是多少？

猜想 2：$\left\lceil \frac{3^n}{1+(b-1)n} \right\rceil \le \gamma\left(GC_n(b)\right) \le \left\lceil \frac{3^n}{1+(b-2)n} \right\rceil$，其中 $\gamma\left(GC_n(b)\right)$ 是广义 b-基 n-立方体 $GC_n(b)$ 的控制数。

4. 结束语

广义 b-基超立方体网络是一种非常重要的互连网络，通过分析与研究，给出了低维的控制数，以及其他维的控制数的界，但是广义 b-基超立方体网络的很多其他性质还有待于研究。

参考文献 (References)

[1] 徐俊明. 组合网络理论[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[2] Lakshmivarahan, S. and Dhall, S.K. (1988) A New Hierarchy of Hypercube Interconnection Schemes for Parallel Computers. *Journal of Supercomputing*, **2**, 81-108. https://doi.org/10.1007/BF00127849

[3] Huang, C.-H. and Fang, J.-F. (2008) The Pancyclicity and the Hamiltonian-Connectivity of the Generalized Base-b Hypercube. *Computers and Electrical Engineering*, **34**, 263-269. https://doi.org/10.1016/j.compeleceng.2007.05.011

[4] Akers, S.B., Harel, D. and Krishnamurthy, B. (1987) The Star Graph: An Attractive Alternative to the n-Cube. *Proceeding of the* 1987 *International Conference on Parallel Process*, The Pennsylvania University Press, Philadelphia, 393-400.

[5] Akers, S.B. and Krishnamurthy, B. (1989) A Group-Theoretic Model for Symmetric Interconnection Networks. *IEEE Transactions on Computers*, **38**, 555-565. https://doi.org/10.1109/12.21148

[6] El-Amawy, A. and Latifi, S. (1991) Properties and Performance of Folded Hypercubes. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **2**, 31-42. https://doi.org/10.1109/71.80187

[7] 师海忠. 互连网络的代数环模型[D]: [博士学位论文]: 北京: 中国科学院应用数学研究所, 1998.

[8] Efe, K. (1991) A Variation on the Hypercube with Lower Diameter. *IEEE Transactions on Computer*, **40**, 1312-1316. https://doi.org/10.1109/12.102840

[9] Cull, P. and Larson, S.M. (1995) The Möbius Cube. *IEEE Transactions on Computer*, **44**, 647-659. https://doi.org/10.1109/12.381950

[10] Efe, K. (1992) The Crossed Cube Architecture for Parallel Computing. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **3**, 513-524. https://doi.org/10.1109/71.159036

[11] Bhuyan, L.N. and Agrawal, D.P. (1984) Generalized Hypercube and Hyperbus Structures for a Computer Network. *IEEE Transactions on Computers*, **33**, 323-333. https://doi.org/10.1109/TC.1984.1676437

[12] 师海忠. 互连网络的新模型: 多部群论模型[J]. 计算机科学, 2013, 40(9): 21-24.

[13] 师海忠. 几类新的笛卡尔乘积互连网络[J]. 计算机科学, 2013, 40(6A): 265-270.

[14] 师海忠. 正则图连通圈: 多种互连网络的统一模型[C]//中国运筹学会. 中国运筹学会第十届学术交流会论文集. 香港: Global-Link Informatics Limited, 2010: 202-208.

[15] Shi, H. and Shi, Y. (2015) A New Model for Interconnection Network: K-Hierarchical Ring and R-Layer Graph Network. http://vdisk.weibo.com/s/dlizJyferZ-Zl

[16] Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T. and Slater P.J.B. (1998) Domination in Graphs: Advanced Topics. Marcel Dekker Inc., New York.

[17] Lakshmivarahan, S., Jwo, J.S. and Dhall, S.K. (1993) Symmetry in Interconnection Networks Based on Cayley Graphs of Permutation Groups: A Survey. *Parallel Computing*, **19**, 361-407.

[18] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[19] Arumugam, S. and Kala, R. (1998) Domination Parameters of Hypercubes. *Journal of the Indian Math*, **65**, 31-38.

[20] Cohen, G., Honkal, I., Litsym, S. and Lobstein, A. (1997) Covering Codes. Elsevier, Amsterdam.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究