

# Different Structure Synchronization of Fractional-Order Hyperchaotic Systems Based on Matrix Sliding Mode Structure

Shuang Liu, Lu Chen, Tao Wang, Lijuan Yue\*

College of Physics, Northeast Normal University, Changchun Jilin  
Email: lius335@nenu.edu.cn, ljyue@nenu.edu.cn

Received: Jun. 15<sup>th</sup>, 2017; accepted: Jul. 7<sup>th</sup>, 2017; published: Jul. 10<sup>th</sup>, 2017

---

## Abstract

A sliding mode control method is proposed for different structure synchronization of fractional-order hyperchaos system. Under the action of the new matrix sliding mode controller, different structure synchronization of fractional-order hyperchaotic systems has been realized. Experimental results show that the method has stronger robustness, and furthermore, circuit simulations show the effectiveness of the proposed method.

## Keywords

Fractional-Order Hyperchaos System, Matrix Theory, Sliding Mode Variable Structure Control, Hyper-Chaotic Synchronization

---

# 矩阵滑模控制法实现异结构分数阶超混沌系统同步

刘爽, 陈璐, 王涛, 岳立娟\*

东北师范大学 物理学院, 长春  
Email: lius335@nenu.edu.cn, ljyue@nenu.edu.cn

收稿日期: 2017年6月15日; 录用日期: 2017年7月7日; 发布日期: 2017年7月10日

---

## 摘要

针对分数阶超混沌系统的异结构同步问题, 提出了一种矩阵滑模控制方法, 设计了一个新的滑模控制器。

\*通讯作者。

在该控制器的作用下实现了分数阶超混沌系统的异结构同步，实验结果表明该方法具有较强的鲁棒性，电路仿真证明了控制器的有效性。

## 关键词

分数阶超混沌系统，矩阵理论，滑模变结构控制，超混沌同步

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

近年来混沌被证实广泛存在于物理[1] [2]、生物[3]、通信保密[4] [5]等领域中。从 1979 年若斯勒发表第一个超混沌系统[6]，人们对超混沌系统研究逐渐深入，对整数阶超混沌系统的研究也取得了诸多成果。而由于分数阶混沌系统比整数阶混沌系统具有更复杂的动力学特性，因此分数阶混沌系统逐步成为了近代研究的热点之一，如分数阶 Chen 系统[7]，分数阶 Lorenz 系统[8]，分数阶 Liu 系统[9]，分数阶 Rossler 系统[10]及新的分数阶超混沌系统[11]等。二十世纪九十年代初，美国科学家 L. M. Pecora 和 T. L. Carrol 提出混沌自同步方法[12]，至今混沌同步控制方法已经发生了巨大的变化，形成了一系列的同步控制方法，如脉冲法[13]、自适应法[14]、状态观测器法[15]、神经网络法[16]、滑模变结构法[17]。滑模变结构法因其具有较高的鲁棒性、控制器设计简单等特点被广泛地应用在混沌系统的控制中，用传统的混沌控制方法与滑模控制理论相结合更是成为近年研究的热点，Jui-sheng Lin [18]等人应用自适应滑模控制方法实现了混沌系统的同步，同时 Sara Dadras [19]等人也提出了一种新的滑模控制方法，实现了对参数不确定了 Liu 混沌系统的控制。

本文基于分数阶稳定性定理和 Lyapunov 稳定性定理将矩阵理论和滑模变换结构控制相结合，设计一个新的滑模控制器，实现分数阶超混沌系统的异结构同步，利用 Matlab 数值模拟和 Multisim 电路仿真证明了矩阵滑模控制法的有效性，控制器简单易实现，鲁棒性更强。

## 2. 矩阵理论

微分和积分 Caputo 定义为：

一个  $\beta$  阶的 Riemann-Liouville 积分算子  $J^\beta$

$$J^\beta g(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} g(\tau) d\tau, \beta > 0 \quad (1)$$

其中  $\Gamma(\bullet)$  为 Gamma 函数，则  $q$  阶 Caputo 微分算子  $D_t^q$  定义为：

$$D_t^q g(t) = J^{n-q} g^{(n)}(t), q > 0 \quad (2)$$

$n = [q]$  为第一个不小于  $q$  的正整数， $g^{(n)}$  为  $g$  的  $n$  阶导数。

分数阶系统如下：

$$\frac{d^q X}{dt^q} = F(X) \quad (3)$$

$$\frac{d^q Y}{dt^q} = G(Y) + U(X, Y) \quad (4)$$

其中  $0 < q < 1$ ;  $U(X, Y)$  为非线性控制器。

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n \quad (n \in R);$$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n \quad (n \in R).$$

系统误差量定义为:

$$e(t) = Y(t) - X(t) \in R^n, \quad (5)$$

则误差系统为:

$$\frac{d^q e}{dt^q} = \frac{d^q X}{dt^q} - \frac{d^q Y}{dt^q} = G(Y) - F(X) + U(X, Y). \quad (6)$$

**定理 1.** 若加入合适的非线性控制器  $U(X, Y)$ , 使误差系统变为:

$$\frac{d^q e}{dt^q} = A(X, Y)e(t) \quad (7)$$

其中  $A(X, Y) = (a_{ij}(X, Y))_{n \times n}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ , 且满足

$$(1) \quad a_{ij}(X, Y) = -a_{ji}(X, Y) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j),$$

$$(2) \quad a_{ii}(X, Y) = \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ 且 } \lambda_i \text{ 不全为 } 0,$$

则分数阶误差系统(6)是渐近稳定, 分数阶混沌系统(3)和(4)实现同步。

驱动系统[20]为:

$$\begin{aligned} \frac{d^q x_1}{dt^q} &= 36(x_2 - x_1) \\ \frac{d^q x_2}{dt^q} &= -16x_1 - x_1 x_3 + 28x_2 - x_4 \\ \frac{d^q x_3}{dt^q} &= x_1 x_2 - 3x_3 \\ \frac{d^q x_4}{dt^q} &= x_1 + 0.5 \end{aligned} \quad (8)$$

响应系统[21]为:

$$\begin{aligned} \frac{d^q y_1}{dt^q} &= 35(y_2 - y_1) + u_1(t) \\ \frac{d^q y_2}{dt^q} &= 7y_1 + 12y_2 - y_1 y_3 + y_4 + u_2(t) \\ \frac{d^q y_3}{dt^q} &= y_1 y_2 - 3y_3 + u_3(t) \\ \frac{d^q y_4}{dt^q} &= -5y_1 + u_4(t) \end{aligned} \quad (9)$$

定义误差  $e = y - x$ , 则误差系统为:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^q e_1}{dt^q} &= -35e_1 + 35e_2 + x_1 - x_2 + u_1(t) \\
 \frac{d^q e_2}{dt^q} &= 7e_1 + 12e_2 + e_4 + 23x_1 - 16x_2 + 2x_4 - y_1y_3 + x_1x_3 + u_2(t) \\
 \frac{d^q e_3}{dt^q} &= -3e_3 + y_1y_2 - x_1x_2 + u_3(t) \\
 \frac{d^q e_4}{dt^q} &= -5e_1 - 6x_1 - 0.5 + u_4(t)
 \end{aligned} \tag{10}$$

设计控制器如下:

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= -42e_2 + 5e_4 - x_1 + x_2 \\
 u_2(t) &= -13e_2 - e_4 - 23x_1 + 16x_2 - 2x_4 + y_1y_3 - x_1x_3 \\
 u_3(t) &= -y_1y_2 + x_1x_2 \\
 u_4(t) &= 6x_1 + 0.5 - e_4
 \end{aligned} \tag{11}$$

可知系数矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} -35 & -7 & 0 & 5 \\ 7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

上式满足定理 1, 所以响应系统(9)与新分数阶超混沌系统(8)实现同步。

取驱动系统(8)和响应系统(9)的初值为  $x_1(0)=1$ ,  $x_2(0)=0.5$ ,  $x_3(0)=0.1$ ,  $x_4(0)=-1$ ,  $y_1(0)=-1$ ,  $y_2(0)=0.9$ ,  $y_3(0)=1$ ,  $y_4(0)=1$ 。由图 1 矩阵理论法数值模拟的误差结果可以看出加入控制项后使系统稳定。

混沌系统往往会受到外界的干扰而影响同步效果, 基于矩阵理论控制器下数值模拟的结果如图 2 所示。在干扰较小时系统同步结果并未受到影响, 如图 2(a), 而在干扰较大时, 系统不能达到同步, 如图 2(b)所示。

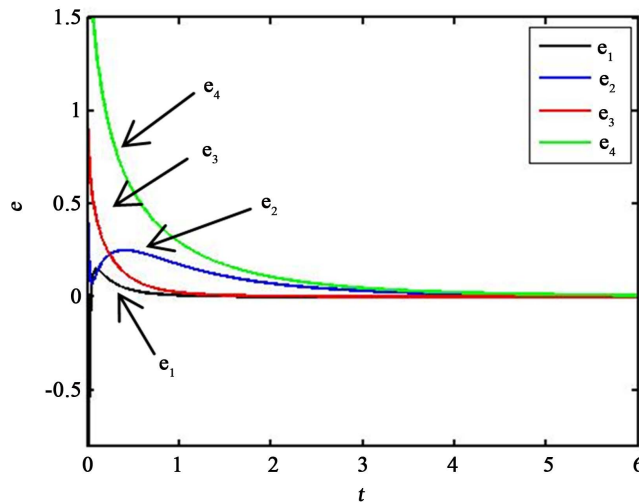
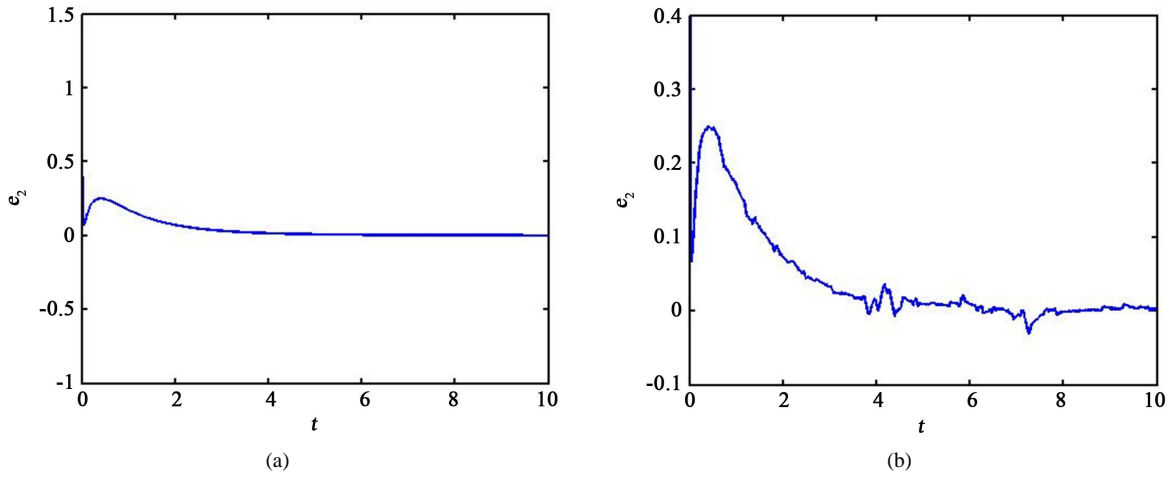


Figure 1. The state trajectory of the error system for Matrix theory  
图 1. 矩阵理论法的误差曲线



**Figure 2.** The curve after disturbance of  $e_2$ . (a) The error curve of the interference is  $0.02\sin(2\pi x_1)$ ; (b) The error curve of the interference is  $0.5\sin(2\pi x_1)$

**图 2.** 受干扰后  $e_2$  随时间变化曲线。(a)干扰为  $0.02\sin(2\pi x_1)$  时  $e_2$  的曲线；(b)干扰为  $0.5\sin(2\pi x_1)$  时  $e_2$  的曲线

### 3. 矩阵滑模控制

矩阵理论与滑模控制相结合设计一个合适的滑模控制器,使误差系统(10)的轨迹到达滑模面并趋于稳定,根据滑模控制原理,首先设计滑模面:

$$s_1 = D^{q-1}e_1 + \psi_1(t), s_2 = D^{q-1}e_2 + \psi_2(t), s_3 = D^{q-1}e_3 + \psi_3(t), s_4 = D^{q-1}e_4 + \psi_4(t) \quad (12)$$

定义函数  $\psi(t)$  满足如下方程:

$$\dot{\psi}_1(t) = 35e_1 + 7e_2 - 5e_4, \dot{\psi}_2(t) = -7e_1 + e_2, \dot{\psi}_3(t) = 3e_3, \dot{\psi}_4(t) = 5e_1 + e_4 \quad (13)$$

由于当系统运动到滑模面时,需要满足:

$$s(t) = 0, \dot{s}(t) = 0 \quad (14)$$

由此可得到:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1(t) = D^q e_1 + \dot{\psi}_1(t) = 0 &\rightarrow D^q e_1 = -\dot{\psi}_1(t) = -35e_1 - 7e_2 + 5e_4 \\ \dot{s}_2(t) = D^q e_2 + \dot{\psi}_2(t) = 0 &\rightarrow D^q e_2 = -\dot{\psi}_2(t) = 7e_1 - e_2 \\ \dot{s}_3(t) = D^q e_3 + \dot{\psi}_3(t) = 0 &\rightarrow D^q e_3 = -\dot{\psi}_3(t) = -3e_3 \\ \dot{s}_4(t) = D^q e_4 + \dot{\psi}_4(t) = 0 &\rightarrow D^q e_4 = -\dot{\psi}_4(t) = -5e_1 - e_4 \end{aligned} \quad (15)$$

结合误差系统(10)得到等效控制器  $U_{eq}(t)$  为:

$$U_{eq}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42e_2 + 5e_4 - x_1 + x_2 \\ -13e_2 - e_4 - 23x_1 + 16x_2 - 2x_4 + y_1y_3 - x_1x_3 \\ -y_1y_2 + x_1x_2 \\ 6x_1 - e_4 + 0.5 \end{pmatrix} \quad (16)$$

由于滑模变结构控制本身具有抖振现象,为了减小抖振的影响,提高趋近品质,应该选择合适的趋近律。由于指数趋近律的趋近速度快,同时可以通过调节系数  $\varepsilon$  和  $k$  来改变达到滑模面的速度,并在一定程度上抑制了抖振现象,所以本文选取了指数趋近律,如下:

$$U_d = -rs - p \operatorname{sgn}(s) \quad (17)$$

其中  $r > 0, p > 0$ ,  $\operatorname{sgn}(s)$  是符号函数, 并满足如下条件:

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s = 0 \\ -1, & s < 0 \end{cases}$$

最终得到控制器如下:

$$U(t) = U_{eq} + U_d \quad (18)$$

根据滑模控制原理, 若使误差系统的运动轨迹能够到达滑模面上, 必需满足条件:

$$s(t)\dot{s}(t) < 0 \quad (19)$$

证明: 构造如下 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 + \frac{1}{2}s_4^2$$

对其求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s_1\dot{s}_1 + s_2\dot{s}_2 + s_3\dot{s}_3 + s_4\dot{s}_4 \\ &= s_1(D^q e_1 + \dot{\psi}_1(t)) + s_2(D^q e_2 + \dot{\psi}_2(t)) + s_3(D^q e_3 + \dot{\psi}_3(t)) + s_4(D^q e_4 + \dot{\psi}_4(t)) \\ &= s_1(-rs_1 - p \operatorname{sgn}(s_1)) + s_2(-rs_2 - p \operatorname{sgn}(s_2)) + s_3(-rs_3 - p \operatorname{sgn}(s_3)) + s_4(-rs_4 - p \operatorname{sgn}(s_4)) \\ &= -(rs_1^2 + ps_1 \operatorname{sgn}(s_1) + rs_2^2 + ps_2 \operatorname{sgn}(s_2) + rs_3^2 + ps_3 \operatorname{sgn}(s_3) + rs_4^2 + ps_4 \operatorname{sgn}(s_4)) \end{aligned}$$

由于  $r > 0, p > 0, s \operatorname{sgn}(s) > 0$ , 则可得到  $V = s(t)\dot{s}(t) < 0$ , 满足滑模到达条件, 所以误差系统的运动轨迹可以运动到滑模面上。

选取步长  $t = 0.005, r = 0.2, p = 3, q = 0.9$  驱动系统和响应系统的初值分别为  $x_1(0) = 0.8, x_2(0) = 0.5, x_3(0) = 0.1, x_4(0) = -1, y_1(0) = -1, y_2(0) = 0.9, y_3(0) = 1, y_4(0) = 1$ , 由图 3 的数值仿真结果可以看出, 矩阵滑模法与矩阵理论方法相比之下能够更快地使驱动系统和响应系统达到同步, 同步效果更明显。

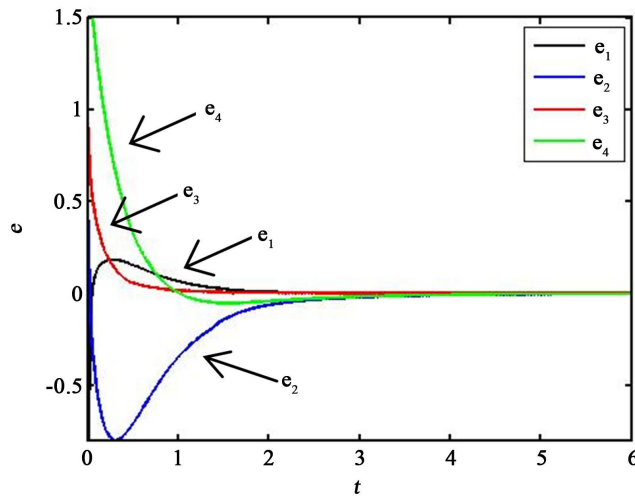


Figure 3. The state trajectory of the error system for Matrix sliding mode

图 3. 矩阵滑模控制法的误差曲线

在较大干扰  $0.5\sin(2\pi x_1)$  时, 仿真结果如图 4 所示。与矩阵理论控制下的同步效果相比较, 可以看出基于矩阵滑模控制器下, 响应系统与驱动系统在较大干扰下仍然可以达到同步, 说明此方法具有较强的鲁棒性。

由于受输出幅度的限制, 现将驱动系统的状态变量缩小 2 倍, 则驱动系统变为:

$$\begin{aligned}\frac{d^q x_1}{dt^q} &= 36x_2 - 36x_1 \\ \frac{d^q x_2}{dt^q} &= -16x_1 - 2x_1x_3 + 28x_2 - x_4 \\ \frac{d^q x_3}{dt^q} &= 2x_1x_2 - 3x_3 \\ \frac{d^q x_4}{dt^q} &= x_1 + 0.25\end{aligned}\quad (20)$$

分数阶超混沌系统的积分算子等效电路如图 5, 其中  $R_a = 1.55 \text{ M}\Omega$ ,  $C_a = 0.7346 \mu\text{F}$ ,  $R_b = 1.55 \text{ M}\Omega$ ,  $C_b = 0.5221 \mu\text{F}$ ,  $R_c = 2.526 \text{ M}\Omega$ ,  $C_c = 1.103 \mu\text{F}$ 。

本文采用 Multisim12.0 作为电路仿真平台, 根据驱动系统(20)设计仿真电路如图 6 所示。其中电源电压为  $\pm 15 \text{ V}$ , 运算放大器为 LM741, 乘法器为 AD534。

对矩阵滑模控制法进行电路仿真, 仿真结果如图 7 所示。结果显示驱动系统的响应系统能够很快达到同步, 这与数值模拟的结果相同, 再次证明了矩阵滑模控制器的有效性。

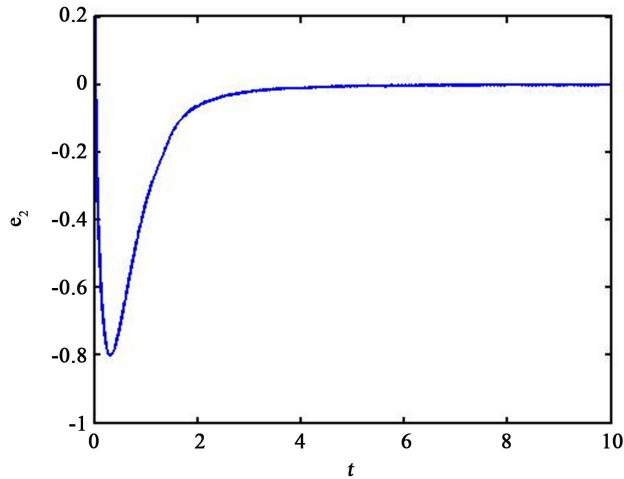


Figure 4. The curve after disturbance of  $e_2$

图 4. 受干扰后  $e_2$  随时间变化曲线

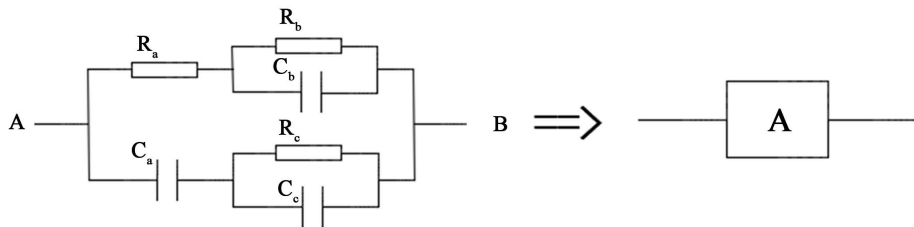


Figure 5. The equivalent circuit of fractional integral operator unit

图 5. 分数阶积分算子单元电路的等效电路

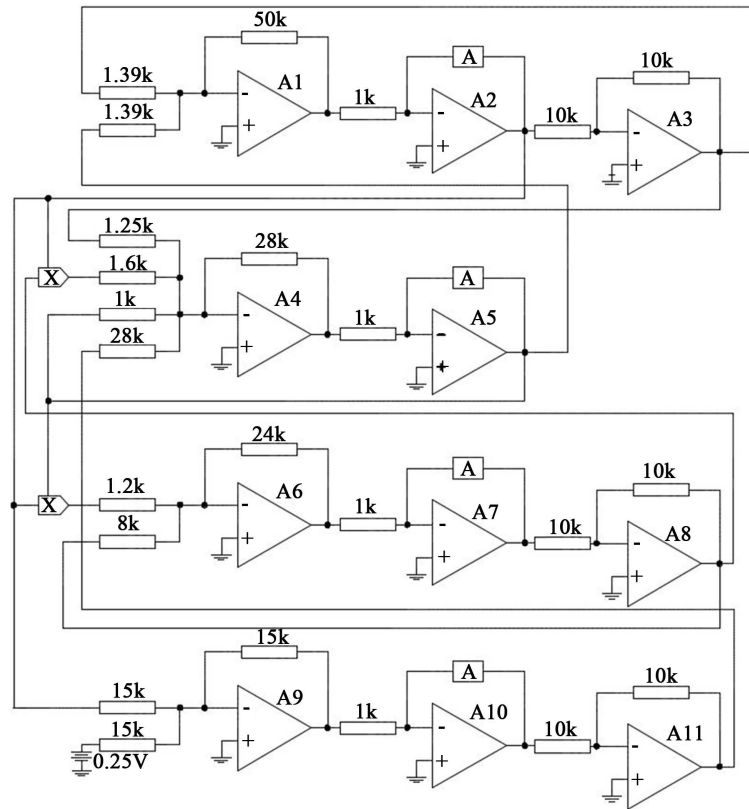


Figure 6. Driving system circuit  
图 6. 驱动系统(20)电路

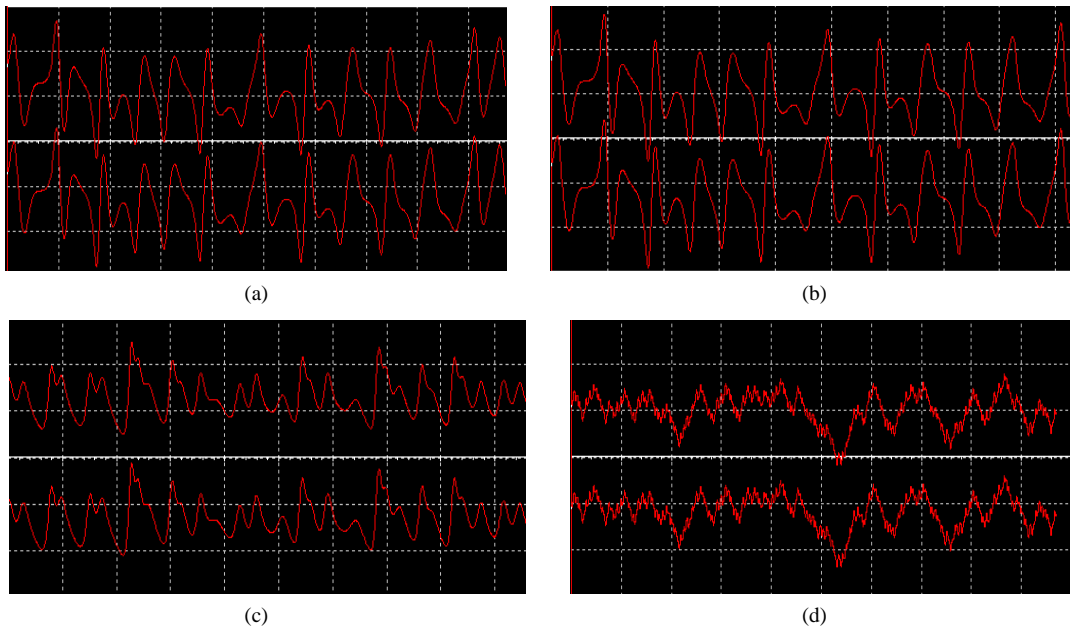


Figure 7. The synchronous circuit simulation results of Matrix sliding mode. (a) The time domain of  $x_1, y_1$ ; (b) The time domain of  $x_2, y_2$ ; (c) The time domain of  $x_3, y_3$ ; (d) The time domain of  $x_4, y_4$

图 7. 矩阵滑模控制法的电路仿真同步结果。(a)  $x_1, y_1$  的时域图; (b)  $x_2, y_2$  的时域图; (c)  $x_3, y_3$  的时域图; (d)  $x_4, y_4$  的时域图



## 4. 结论

本文基于 Lyapunov 稳定性理论, 将滑模变结构方法与矩阵理论相结合, 设计了一种新的控制器, 实现了分数阶超混沌系统的异结构同步。数值仿真的结果表明矩阵理论结合滑模的方法较矩阵理论方法控制效果好, 并具有控制时间短、鲁棒性强等优点。电路仿真的结果证明了该控制器的有效性, 具有广阔的应用前景。

## 致 谢

本文得到国家自然科学基金(批准号: 10847110)和吉林省自然科学基金(批准号: 201115008)的资助, 在此表示感谢。

## 基金项目

国家自然科学基金(批准号: 10847110)和吉林省自然科学基金(批准号: 201115008)。

## 参考文献 (References)

- [1] 李佳. 物理中投影混沌同步在永磁同步电机中的应用[J]. 高师理科学刊, 2016, 36(1): 39-42.
- [2] 贾遂民, 魏萌, 胡明生. 混沌拟态物理优化的认知频谱差异分配[J]. 计算机应用, 2015, 35(4): 1067-1070.
- [3] 郑金存, 张慧, 覃斌毅. 变参数混沌信号应用于经皮神经电刺激的探索研究[J]. 生物医学工程学杂志, 2015, 32(5): 1031-1037.
- [4] 俞斌, 朱明, 贾雅琼. 统一混沌系统同步控制及在保密通信中的应用[J]. 计算机应用研究, 2013, 30(6): 1847-1848.
- [5] Lai, H. and Huang, Y. (2015) Chaotic Secure Communication Based on Synchronization Control of Chaotic Pilot Signal. *Computational Intelligence and Intelligent Systems*, **2015**, 640-647.
- [6] Rossler, O. (1979) An Equation for Hyperchaos. *Physics Letters A*, **71**, 155-157.  
[https://doi.org/10.1016/0375-9601\(79\)90150-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(79)90150-6)
- [7] Li, C. and Peng, G. (2004) Chaos in Chen's System with a Fractional Order. *Chaos, Solitons & Fractals*, **22**, 443-450.  
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.02.013>
- [8] Jia, H.Y., Tao, Q. and Chen, Z.Q. (2014) Analysis and Circuit Design of a Fractional-Order Lorenz System with Different Fractional Orders. *Systems Science & Control Engineering*, **2**, 745-750.  
<https://doi.org/10.1080/21642583.2014.886310>
- [9] Hegazi, A.S., Ahmed, E. and Matouk, A.E. (2013) On Chaos Control and Synchronization of the Commensurate Fractional Order Liu System. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, **18**, 1193-1202.  
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.09.026>
- [10] Li, C.G. and Chen, G.R. (2004) Chaos and Hyperchaos in the Fractional Order Rössler Equations. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **341**, 55-61. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.04.113>
- [11] Razminia, A. and Baleanu, D. (2013) Complete Synchronization of Commensurate Fractional Order Chaotic Systems Using Sliding Mode Control. *Mechatronics*, **23**, 873-879. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2013.02.004>
- [12] Carroll, T.L. and Pecora, L. (1992) A Circuit for Studying the Synchronization of Chaotic Systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **2**, 659-667. <https://doi.org/10.1142/S021812749200077X>
- [13] Itoh, M., Yang, T. and Chua, L.O. (2011) Conditions for Impulsive Synchronization of Chaotic and Hyperchaotic Systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **11**, 551-560. <https://doi.org/10.1142/S0218127401002262>
- [14] Sinha, S., Henrichs, J. and Ravindra, B. (2000) A General Approach in the Design of Active Controllers for Nonlinear Systems Exhibiting Chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **10**, 165-178.  
<https://doi.org/10.1142/S0218127400000104>
- [15] 刘福才, 王娟, 彭海朋, 等. Hénon 混沌系统的预测控制与同步[J]. 物理学报, 2002, 51(9): 1954-1959.
- [16] 谭文, 王耀南, 刘祖润. 非线性系统混沌运动的神经网络控制[J]. 物理学报, 2005, 51(11): 2463-2466.
- [17] Ma, J., Wu, X.Y. and Chu, R.T. (2014) Selection of Multi-Scroll Attractors in Jerk Circuits and Their Verification Using Pspice. *Nonlinear Dynamics*, **76**, 1951-1962. <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1260-1>

- 
- [18] Lin, J.S., Yan, J.J. and Liao, T.L. (2005) Chaotic Synchronization via Adaptive Sliding Mode Observers Subject to Input Nonlinearity. *Chaos, Solitons & Fractals*, **24**, 371-381. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(04\)00616-2](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(04)00616-2)
- [19] Dadras, S., Momeni, H.R. and Majd, V.J. (2009) Sliding Mode Control for Uncertain New Chaotic Dynamical System. *Chaos, Solitons & Fractals*, **41**, 1857-1862. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.07.054>
- [20] 董俊, 张广军, 姚宏. 异结构的分数阶超混沌系统函数投影同步及参数辨识[J]. 电子与信息学, 2013, 35(6): 1371-1375.
- [21] 周平, 程雪峰, 张年英. 一个新分数阶超混沌系统及其混沌同步[J]. 物理学报, 2008, 57(9): 5407-5412.

**期刊投稿者将享受如下服务:**

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [dsc@hanspub.org](mailto:dsc@hanspub.org)