General Identities on Super Bell Polynomials
—Bell polynomials of 2-recurring series

Minghao Guo[1], Zhicheng Guo[2]
1.School of Biomedical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai
2.Dept. Northern Design and Research Institute, Shijiazhuang, Hebei
Email: 13833116000@139.com

Abstract

On using the symmetric defintion of Bell Polynomials, we deduce the explicitly by the formula for which the Super Bell Polynomials. Also, that determine some inverse relations and the connections with taylor formula of 2-recurring series. With this explicit computable expression, it is possible to easily evaluate B_(n,k) (x_1,x_2,⋯,x_(n-k+1)) directly for given values of n and k.

Keywords

Partial Bell polynomial; second-order Bell polynomials; super Bell polynomials; second-order linear Bell Polynomial

Subject Areas Math & Physics

超 Bell 多项式的一般性质
——2-循环级数的 Bell 多项式

郭铭浩[1]， 郭志成[2]
1.上海交通大学生物医学工程学院，上海
2.北方设计研究院，石家庄，河北
Email: 13833116000@139.com

收稿日期：2017年8月21日；发布日期：2017年8月21日

摘　要

本文利用Bell多项式的维数定义，给出了与超Bell多项式等价的显式公式。它的逆关系也是最简单的2-循环级数的Taylor公式。利用给出的结论，解决了普通（局部）Bell多项式B_(n,k) (x_1,x_2,⋯,x_(n-k+1))的计算问题。

关键词

普通（局部）Bell 多项式；二次 Bell 多项式；超 Bell 多项式；二次线性 Bell 多项式

1 引言

E.T. Bell 最初引入了三类 Bell 多项式（最初统称为指数多项式 Exponential polynomials）是为了转化多项式的高次求导过程为代数计算[1]，它也是复合函数求导计算的一种标准工具。在其后的近一个世纪，Bell 多项式的研究吸引了众多离散数学的研究工作者。1974 年，文献 [2] 利用下面的公式对 k 为有限正整数的指数型 Bell 多项式（本文称为局部 Bell 多项式[1]）$B_{n,k} \equiv B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-k+1})$做出了定义[2]：

[1] 现代的文献不区分 k 为有限整数还是无穷大，统称指数型 Bell 多项式（Exponential polynomials）为普通 Bell 多项式；但两者的性质

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 21 August 2017, publ: 21 August 2017

$$\frac{1}{k!}\left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!}\right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-k+1})\frac{t^n}{n!}$$

它的显式表达式为：

$$B_{n,k} = \sum_{\pi(n,k)} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_n!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{x_2}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{x_n}{n!}\right)^{k_n} \tag{1}$$

式中求和符号$\pi(n,k)$表示k_i过所有满足条件：

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k \\ k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n \end{cases}$$

的非负整数。

虽然(1)式给出了局部 Bell 多项式$B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-k+1})$的显式求和公式，然而在其后的几十年中，它的求和计算并不顺利。进而言之，尽管文献[3]利用得到的公式

$$B_{n,k+1} = \sum_{\alpha_1=k}^{n-1}\sum_{\alpha_2=k-1}^{\alpha_1-1}\cdots\sum_{\alpha_k=1}^{\alpha_{k-1}-1}\binom{n}{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{\alpha_2}\cdots\binom{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\cdot x_{n-\alpha_1}x_{\alpha_1-\alpha_2}\cdots x_{\alpha_{k-1}-\alpha_k}x_{\alpha_k}$$

$$(n \ge k+1, k = 1,2,\cdots)$$

和程序 Mathematica 6.0（Wolfram Research）计算出了一些$B_{n,k}$的计算结果，但这种方法也不是简单的。本文给出的定理 1 极大的简化了文献[3]的计算过程，使得$B_{n,k}$的求解过程成为了一种简单的数值运算。

顺便说，在由“映射”元素组成的集合中，即使只有三个元素的集合也有许多种不同的拓扑，进而形成多种形式的拓扑空间。在文献 [4]“Pythagorean 方程和特殊的 M 角数——勾股定理离散性质的推广和应用”中，我们建立了一类非常重要的拓扑空间。这种从二元数组到二元数组的映射形成的拓扑空间我们称之为偏序（有理）拓扑空间。本文研究的是在这种偏序拓扑空间中，Bell 多项式的分类性质。

局部 Bell 多项式$B_{n,k}$与许多著名数列存在着简单的关系式[1,2,3,5]。例如：

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = B_{n,k}(0!, 1!, 2!, \cdots)\text{无符号的第一类 Stirling 数}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = B_{n,k}(1,1,1,\cdots)\text{第二类 Stirling 数}$$

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor = B_{n,k}(1!, 2!, 3!, \cdots)\text{无符号的 Lah 数}$$

$$\binom{n}{k}k^{n-k} = B_{n,k}(1,2,3,\cdots)\text{幂等数}$$

它实际是给出的是一些非标准复合函数的导数，因此寻找局部多项式$B_{n,k}$的一般求解方法以及它的推广研究就显得愈加重要。

完全不同。本文直译 Partial Bell Polynomial 为局部 Bell 多项式，更为贴切。

[2] 我们用恒等符号≡定义函数的简写形式。当不需要强调函数变量时，使用简写形式。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 21 August 2017, publ: 21 August 2017

另一方面，与第三类 Bell 多项式密切相关的孤立子现象的发现和孤子的非线性研究成果[5]，可以广泛的应用于天文学、基本粒子的量子力学、晶格理论、等离子体物理、分子生物学等领域的现象发现和研究；它极大地推动了局部 Bell 多项式和第三类 Bell 多项式的拓展和计算。本文首先介绍几种 Bell 多项式的的拓展定义，并讨论它们之间的关系。然后给出在这些拓展定义下，局部 Bell 多项式的两种新的表达式。

2 局部 Bell 多项式的次数（维数）拓展

与指数型复合函数$\Phi(z):=f(g(z))$类似的，文献[6]对二次复合函数$\Phi^{[2]}(z):=f(g(h(z)))$使用以下的符号

$$\Phi_i^{[2]}\coloneqq D_z^i\Phi^{[2]}(z), f_j\coloneqq D_y^j f(y)|_{y=g(x)}, g_k\coloneqq D_x^k g(x)|_{x=h(z)}, h_r\coloneqq D_z^r h(z)$$

表示复合函数的 n 阶导数如下：

$$\Phi_n^{[2]}=Y_n^{[2]}\equiv Y_n^{[2]}(f_1,g_1,h_1;f_2,g_2,h_2;\cdots;f_n,g_n,h_n)$$

我们称函数$Y_n^{[2]}$为二次 Bell 多项式。它的前面的几项是：

$$Y_1^{[2]}=f_1g_1h_1$$

$$Y_2^{[2]}=f_1g_1h_2+f_1g_2h_1^2+f_2g_1^2h_1^2$$

$$Y_3^{[2]}=f_1g_1h_3+f_1g_3h_1^3+3f_1g_2h_1h_2+3f_2g_2^2h_1h_2+3f_2g_1g_2h_1^3+f_3g_1^3h_1^3 \tag{2}$$

由此可以建立二次复合函数的表达式如下：

$$\begin{aligned}\Phi_n^{[2]}&=Y_n^{[2]}(f_1,g_1,h_1;f_2,g_2,h_2;\dots f_n,g_n,h_n)\\&=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n,k}(g_1,h_1;g_2,h_2;\dots g_n,h_n)\cdot f_k\end{aligned}$$

式中$\alpha_{n,k}(g_1,h_1;g_2,h_2;\dots g_n,h_n)$表示变量$g_1,h_1;g_2,h_2;\dots g_n,h_n$及其幂的多项式。

关于二次 Bell 多项式的计算，文献[6]给出了它的递推计算过程和显式公式，这些内容文献[6]已经讲得很清楚了。然而，$\alpha_{n,k}(g_1,h_1;g_2,h_2;\dots g_n,h_n)$的计算过程还是略显繁琐。文献[7,8]研究了一些特殊的二次（二项式型）Bell 多项式，得到了许多 Bell 多项式的恒等式。其中与（2）式相近的局部 Bell 多项式的恒等式如下[7]：

$$B_{n,k}\left(\frac{f_1(a+b)}{a+b},\cdots\frac{f_i(ai+b)}{ai+b},\cdots\right)=\frac{1}{k!\,b^{k-1}}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{jf_n(an+bj)}{an+bj} \tag{3}$$

需要指出的是，当形式为$\Phi_0^{[2]}(z):=r(z)t^{h(z)}$的复合函数转化为级数时[3]，无论转化函数$\Phi_0^{[2]}(z):=r(z)t^{h(z)}$为普通型 Bell 多项式生成函数的级数，还是转化函数$\Phi_0^{[2]}(z):=r(z)t^{h(z)}$为指数型 Bell 多项式生成函数的级数，都必须使用 h 的反函数h^{-1}。因此函数$\Phi_0^{[2]}$也可以表示三个独立变量r,h,h^{-1}的关系式，我们将它归类为二次复合函数。

它表示的是普通型 Bell 多项式与指数型 Bell 多项式组合而成的生成函数，它的计算比通常的二次复合函数简化很多。

[3] Laplace 证明了任何函数都可以表示为级数的形式，本文定理 1 是公式（3）的一般情形。见参考文献[9]。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 21 August 2017, publ: 21 August 2017

我们把函数$\Phi_0^{[2]}(z):=r_0(z)t^{h_0(z)}$的初始形式（生成函数），分解为乘积函数和指数函数的组合形式如下：

$$\begin{cases}\Phi_0^2=Y_0^{[2]}(f_0,h_0,g_0)=f_0\left(h_0^{-1}(z)\right)\cdot g_0(z)=r_0(z)\cdot g_0(z)\\ g_0(z)=t^{h_0(z)}=\exp\left(\lambda h_0(z)\right)\end{cases}$$

式中$f_0=r_0\cdot h_0$。

我们只讨论常数 $t>0$ 的情形，可令 $\lambda=\log t$,它可以简写为：

$$Y_0^{[2]}=r_0\cdot e^{\lambda h_0}=r_0 g_0$$

利用求复合函数导数的方法，我们得到它的导数为

$$Y_0^{[2]}=Y_0^{[2]}(f_0,h_0,g_0)=r_0 g_0$$

$$Y_1^{[2]}=Y_1^{[2]}(f_0,h_0,g_0;f_1,h_1,g_1)=(\lambda r_0 h_1+r_1)g_0$$

$$Y_2^{[2]}=Y_2^{[2]}(f_0,h_0,g_0;f_1,h_1,g_1;f_2,h_2,g_2)=(\lambda^2 r_0 h_1^2+\lambda r_0 h_0+2\lambda r_1 h_1+r_2)g_0$$

$$Y_3^{[2]}=(\lambda^3 r_0 h_1^3+3\lambda^2 r_0 h_1 h_2+\lambda r_0 h_3+3\lambda^2 r_1 h_1^2+3\lambda^2 r_1 h_2+3\lambda r_2 h_1+r_3)g_0$$

由此我们建立了二次复合函数$\Phi_0^{[2]}(z):=r(z)t^{h(z)}$的导数表达式如下：

$$Y_n^{[2]}(f_0,h_0,g_0;f_1,h_1,g_1;\cdots;f_n,h_n,g_n)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n,k}(r_{p_0},h_{p_0};r_{p_1},h_{p_1};\cdots r_{p_n},h_{p_n})\cdot g_0$$

我们记 g_0 的系数为二次 Bell 多项式如下：

$$B_n^{[2]}(r_{p_0},h_{p_0};r_{p_1},h_{p_1};\cdots r_{p_n},h_{p_n})=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n,k}(r_{p_0},h_{p_0};r_{p_1},h_{p_1};\cdots r_{p_n},h_{p_n})$$

显然，它是由文献[6]定义的一次和二次 Bell 多项式的关于r_i的线性组合得到的，故我们称

$$B_n^{[2]}\equiv B_n^{[2]}(r_k,h_k)\equiv B_n^{[2]}(r_{p_0},h_{p_0};r_{p_1},h_{p_1};\cdots r_{p_n},h_{p_n})$$

为二次线性 Bell 多项式（second-order linear Bell Polynomial）。

需要说明的是，我们在二次线性 Bell 多项式的变量中增加了初始函r_{p_0},h_{p_0} ，它表示的是 2-循环级数（文献[10]称为赋权函数等）$\Phi_0^{[2]}(z):=r(z)t^{h(z)}$的结构形式[4]。

3 局部 Bell 多项式的结构拓展

文献[4,5]研究了初始函数$\Phi_0^{[2]}(z):=r_0(z)t^{h_0(z)}$，当$r_0,h_0$分别拓展为 n 个函数和 m 个函数的乘积并表示为级数时，按指数为奇数或偶数分割为两种级数的 Bell 多项式，它是一个超可微的玻色子函数，属于分次 Bell 多项式的简单推广，称为超 Bell 多项式[7]。记为

$$Y_{lr,h}(f)=e^{-f}D_1\cdots D_n\,\partial_{x_1}^{l_1}\cdots\partial_{x_m}^{l_m}e^{f}$$

[4] 函数$\Phi_0^{[2]}(z):=r_0(z)t^{h_0(z)}$符合 2-循环级数的定义，赋值函数的定义和性质参见[10]

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 21 August 2017, publ: 21 August 2017

超 Bell 多项式和二次线性 Bell 多项式表示的项数是一样的。即：

$$|Y_{nr,h}(f)| = |Y_{nr,h}(r_k, h_k)| = |Y_n^{[2]}(r_k, h_k)| = |B_n^{[2]} g_0|$$

为了说明这个性质，我们比较$n = 3$的 3 种多项式：

$$Y_{3r,h}(f) = f_{3x}D_1 f + 3f_x f_{3x} D_1 f + f_x^3 D_1 f + 3f_{2x} D_1 f_x + 3f_x^2 D_1 f_{2x} + 3f_x D_1 f_{2x} + D_1 f_{3x}$$

$$Y_{3r,h}(r_k, h_k) = r_{3x} D_1 r + 3r_x h_{2x} D_1 r + r_x^3 D_1 r + 3h_{2x} D_1 h_x + 3r_x^2 D_1 h_x + 3r_x D_1 r_{2x} + D_1 h_{3x}$$

$$B_3^{[2]}(r_k, h_k) g_0 = \lambda^3 h_3 g_0 r_0 + 3\lambda^2 h_1 h_2 g_0 r_0 + \lambda^3 h_1^3 g_0 r_0 + 3\lambda^2 h_1^2 g_0 r_1 + 3\lambda^2 h_2 g_0 r_1 + 3\lambda h_1 g_0 r_2 + g_0 r_3$$

由$Y_{3r,h}(r_k, h_k)$的定义知道，$B_3^{[2]}(r_k, h_k) g_0$和$Y_{3r,h}(r_k, h_k)$之间可以相互转化，但转化又不是简单的。

特别需要说明的是，当初始函数$\Phi_0^{[2]}(z) := r_0(z) t^{h_0(z)}$中$h_0(z)$为线性函数时，称为双线性 Bell 多项式。它与二次 Bell 多项式是不同的。例如：与二次 Bell 多项式$B_3^{[2]}(r_k, h_k) g_0$相比较，双线性 Bell 多项式中缺少项$r_x^3 D_1 r$。

我们知道，超 Bell 多项式在研究超对称方程的可积性方面是一个的很好的工具。它也为求解局部多项式和推广 KdV 孤子方程的研究提供了一种标准工具。尽管超 Bell 多项式和二次 Bell 多项式可以相化转化，但是，它们从不同方向上对 Bell 多项式的拓展都是不可或缺的。研究它们之间的关系也是有意义的。

4 二次线性 Bell 多项式的主要结论

本文给出了$B_n^{[2]}(r_k, h_k)$的精确表达式如下：

定理 1： 二次复合函数$\Phi_0^{[2]}(z) := r(z) t^{h(z)}$的二次线性 Bell 多项式的显式表达式为

$$B_n^{[2]}(r_{p_0}, h_{p_0}; r_{p_1}, h_1; \cdots; r_{p_n}, h_{p_n})$$
$$= \sum_{p_0 + 2p_1 + \cdots + (n+1)p_n = n-1} \prod_{s=1}^{n-1} r_{p_s - 1} \prod_{q=1}^{n-1} \lambda^{q-1} \prod_{\substack{q_s = 0 \\ p_s + q_s \neq 0}}^{q} \binom{p_s q_s - 1}{p_s - 1} \frac{(n-1)!}{p_0!\,(p_1 q_1)! \cdots (p_s q_s)!} h_{p_s}^{q_s}$$

求和条件中，p_i 取任意非负整数；并且当 $p_0=0$ 时，我们在公式中设定了

$$0! = 0, \quad \binom{0 \cdot q_n - 1}{0 - 1} = \binom{-1}{-1} = 1$$

为了看清楚二次线性 Bell 多项式的更多意义，我们用函数 x(z)替换 h(z)，用函数 y(z)替换 r(z)，并用导数的语言来叙述定理 1。

定理 2： 设函数 x(z)和 y(z)都有 n 阶导数,且函数 F(z)的导函数存在并可以表示为 $dF(z)/dz=y(z)a^{x(z)}$，那么函数 F(z)的 n 阶导数成立下述公式：

$$\frac{d^n F(z)}{dz^n} = \sum_{\pi_i(n)} K_i \left(\frac{d^{p_0} y(z)}{dz^{p_0}}\right) \left(\frac{d^{p_1} x(z)}{dz^{p_1}}\right)^{q_1} \cdots \left(\frac{d^{p_n} x(z)}{dz^{p_n}}\right)^{q_s} (\ln a)^{q_1 + q_2 + \cdots + q_s} a^{x(z)}$$

$$K_i = \prod_{k_1=1}^{q_1} \binom{k_1 p_1 - 1}{p_1 - 1} \prod_{k_2=1}^{q_2} \binom{k_2 p_2 - 1}{p_2 - 1} \cdots \prod_{k_s=1}^{q_s} \binom{k_s p_s - 1}{p_s - 1} \cdot \frac{(p_0 + q_1 p_1 + q_2 p_2 + \cdots q_s p_s)!}{p_0!\,(q_1 p_1)!\,(q_2 p_2)! \cdots (q_s p_s)!}$$

式中p_0为非负整数，$p_1, p_2, \cdots, p_s$和$q_1, q_2, \cdots, q_s$为正整数。且公式右边的求和符号$\pi_i(n)$表示取遍一切满足

$$(1 + q_1 + q_2 + \cdots + q_s) \cdot (p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_s) = p_0 + q_1 p_1 + q_2 p_2 + \cdots + q_s p_s = n - 1$$

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 21 August 2017, publ: 21 August 2017

$$\text{且}\ \min(q_i, p_i) \geq \max(q_{i+1}, p_{i+1}), \quad 1 \leq i < s \tag{4}$$

的不同卷积。

由定理 1 和定理 2 我们很容易推出下面的性质:

1. 若定理 2 中 s 取 n，那么求和条件中q_j扩充为了非负整数。再令$1 + 2p_1 + 3p_2 + \cdots + np_n = n - 1$，由此就推出了定理 1。
2. 相反的，由定理 1 也可以推出定理 2，因此定理 1 和定理 2 是等价的。但是二次线性 Bell 多项式

$$B_n^{[2]}(r_{p_0}, h_{p_0}; r_{p_1}, h_1; \cdots; r_{p_n}, h_{p_n})$$

的计算并不容易，我们以后再讨论它的递推求解方法。

3. 在保持定理 1 中的 λ 的指数 q−1 不变的求和条件下，令 a=e,p_0=0，可以得到一个新的 Bell 多项式（广义的等幂数）；显然它就是局部 Bell 多项式 $B_{n,q} \equiv B_{n,q}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-q+1})$。当$n \geq q, n \geq 3$时，$B_{n,q}$是$B_n^{[2]}$的一部分；当$q > n \geq 3$时，$B_{n,q} = B_n^{[2]}$。

5 定理 1 和定理 2 的证明

当 r_0 或 h_0 视为常数时，就是 Faà di Bruno 公式[11]。

（Faà di Bruno 公式）：设函数 F(x)和 u(x)都有 n 阶导数，那么对于函数 G(x)=F(u(x))的 n 阶导数成立下列公式

$$G^{(n)}(x) = \sum_{\alpha+2\beta+3\gamma+\cdots=n} F^{(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)}(u) P_{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$$

$$P_{\alpha+\beta+\gamma+\cdots} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\cdots} \left(\frac{u'}{1!}\right)^{\alpha} \left(\frac{u''}{2!}\right)^{\beta} \left(\frac{u'''}{3!}\right)^{\gamma} \cdots.$$

右边的求和符号表示取遍一切满足$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots = n$的非负整数$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$.

除此之外，两个定理的证明，需要下面的几个引理。Faà di Bruno 公式的推广形式为[6]：

引理 1：设 2 次复合函数为 Φ(t):=f(g(h(t)))，那么它保持 Faà di Bruno 公式形式不变。即

$$Y_n^{[2]}(f_1, g_1, h_1; \cdots; f_n, g_n, h_n)$$

$$= \sum_{\pi(n)} \frac{n!}{r_1!\, r_2! \cdots r_n!} f_r \left[\frac{Y_1(g_1, h_1)}{1!}\right]^{r_1} \left[\frac{Y_2(g_1, h_1; g_2, h_2)}{2!}\right]^{r_2} \cdots \left[\frac{Y_n(g_1, h_1; g_2, h_2; \cdots; g_n, h_n)}{n!}\right]^{r_n}$$

求和符号$\pi_i(n)$表示取遍一切满足$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \cdots r_n = n$的非负整数

文献[12]研究了局部 r−贝尔多项式，得到了下面的引理 2。

引理 2：局部 r−贝尔多项式存在显式表达式

$$B_{n+r,k+r}^{(r)}(a_l; b_l) = \sum_{\Lambda(n,k,r)} \left[\frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2} \cdots\right] \left[\frac{r!}{r_0!\, r_1! \cdots} \left(\frac{b_0}{1!}\right)^{r_0} \left(\frac{b_1}{2!}\right)^{r_1} \cdots\right]$$

式中

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 21 August 2017, publ: 21 August 2017

$$\Lambda(n,k,r)=\begin{cases}(\mathbf{k},\mathbf{r}) = ((k_i:i\geq 1);(r_i:i\geq 0))\\ k_i\in\mathbb{N},r_i\in\mathbb{N},\sum_{i\geq 1}k_i=k,\sum_{i\geq 0}r_i=r,\sum_{i\geq 1}i(k_i+r_i)=n\end{cases}$$

令：引理 2 中的 a_k=h_k,b_k=r_k，那么对于复合函数$\Phi_0^{[2]}(z):=r_0(z)t^{h_0(z)}$，引理 2 中

$$b_2=r_2=b_3=r_3=\cdots=0$$

由引理 1 我们知道，求和的分项系数是某些其形状与函数 y=f(u)，u=g(x)，x=h(t)的具体给法无关的表达式。因此，当我们可以把引理 2 中 k_l=1 的那些项按个数不同逐步都归类 r_0，这种归类并不影响同类项系数。简单重复引理 1，我们得到

引理 3：二次复合函数$\Phi_0^{[2]}(z):=r(z)t^{h(z)}$的二次线性 Bell 多项式的显式表达式为

$$B_n^{[2]}\left(r_{p_0},h_{p_0};r_{p_1},h_1;\cdots;r_{p_n},h_{p_n}\right)$$

$$=\sum_{p_0+2p_1+\cdots+(n+1)p_n=n}\prod_{s=1}^{n}r_{p_s-1}\prod_{q=1}^{n}\lambda^{q-1}\prod_{\substack{q_s=1\\ p_s+q_s\neq 2}}^{q}\frac{(q_sp_s)!}{(p_s!)^{q_s}\cdot q_s!}\cdot\frac{n!}{p_0!\,(p_1q_1)!\cdots(p_sq_s)!}h_{p_s}^{q_s}$$

求和条件中，p_i 取任意非负整数；并且当 p_0=0 时，我们在公式中设定了

$$0!=0,\quad\binom{0\cdot q_n-1}{0-1}=\binom{-1}{-1}=1$$

引理 4：对于任意的正整数 p,q，存在恒等式

$$\frac{(qp)!}{(p!)^q\cdot q!}=\prod_{k=1}^{q}\binom{kp-1}{p-1}$$

引理 4 证明：

$$\frac{(qp)!}{(p!)^q}=\frac{(qp-1)!}{(qp-p)!\cdot(p-1)!}\cdot\frac{qp}{p}\cdot\frac{(qp-p-1)!}{(qp-2p)!\cdot(p-1)!}\cdot\frac{qp-p}{p}\cdots\frac{(p-1)!}{0!\,(p-1)!}\cdot\frac{p}{p}$$
$$=\binom{n}{k}\cdot q\cdot\binom{n}{k}\cdot(q-1)\cdots\binom{n}{k}\cdot 1$$
$$=\prod_{k=1}^{q}\binom{kp-1}{p-1}\cdot q!$$

引理 4 得证。 □

定理 1 和定理 2 的证明：

我们用 n−1 替换引理 3 中的 n，再由引理 4 就得到了定理 1。最后根据文献[12]对引理 3 的组合解释和定理 1，也就给出了定理 2 的证明。 □

6 定理 1 的一个应用

用定理 1 计算局部多项式$B_{n,k}$看似很繁琐，实际上它比用程序 Mathematica 6.0 计算$B_{n,k}$简单的多，一方面由于分子分母可以约分去掉许多重复计算，另一方面，我们还可以分列出单项h_p^q的附加系数的乘法表格（也就是项$r_kh_p^q$的系数与 r_k 无关的数值表），利用表格可以简单计算出其它同类项系数。记单项h_p^q的附加系数为单项式符号自身，这种记法不会产生混淆。即

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 21 August 2017, publ: 21 August 2017

$$h_p^q = \prod_{k=1}^{q} \binom{kp-1}{p-1}$$

它的乘法表格如下：

Table.1：Partial numerical h_p^q results

表 1：部分单项h_p^q的附加系数表

p \ q	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	3	15	105	945
3	1	10	280	15400	1401400
4	1	35	5775	2627625	2546168625
5	1	126	126126	488864376	
6	1	462	2877420		
7	1	1716			

注：当 p=0,q≠ 0 时，可以简单的取$h_p^q = 1$

例题 1： 利用第 4 节的性质 3 求解文献[3]给出的 $B_{11,7}, B_{12,7}, B_{13,7}$ 的同类项（等幂项的集合）和系数。

我们记定理 1 中 λ 指数 q−1 项的系数为$B_{n,q}^{[2]}$，当去掉$B_{n,q}^{[2]}$中的仅有一次项的 r_k 后，可以使得

$$\left(B_{n,q}^{[2]}\right)_{r_{k=1}} = B_{n-1,q}$$

我们由定理 1 可以列出所有的同类项，并用定理 1 的公式求出同类相的系数。

例如：$B_{13,7}$ 的同类项$h_1^2h_2^4h_3^1r_0$，$h_1^3h_2^2h_3^2$的系数求解过程如下：

$$h_1^2h_2^4h_3^1r_0\text{项系数} = h_1^2h_2^4h_3^1\frac{(0+2\cdot1+4\cdot2+1\cdot3)!}{0!\,(2\cdot1)!\,(4\cdot2)!\,(1\cdot3)!} = 1\cdot105\cdot1\cdot\frac{13!}{0!\,2!\,8!\,3!} = 1351350$$

$$h_1^3h_2^2h_3^2r_0\text{项系数} = h_1^3h_2^2h_3^2\frac{(0+2\cdot1+4\cdot2+1\cdot3)!}{0!\,(3\cdot1)!\,(2\cdot2)!\,(2\cdot3)!} = 1\cdot3\cdot10\cdot\frac{13!}{0!\,3!\,4!\,6!} = 1801800$$

这种首先分别求出具有组合性质的数，再把它们相乘在一起的计算方法比其它已知的方法简单许多。

略去 r_0，我们很容易利用公式(4)列出满足条件的那部分同类项，再用上述的方法计算出同类项的系数，就得到了和文献[3]同样的结果如下：

$$B_{11,7} = 17325h_1^3h_2^4 + 34650h_1^4h_2^2h_3^1 + 4620h_1^5h_3^2 + 6930h_1^5h_2^1h_4^1 + 462h_1^6h_5^1$$

$$B_{12,7} = 62370h_1^2h_2^5 + 277200h_1^3h_2^3h_3^1 + 138600h_1^4h_2^1h_3^2 + 103950h_1^4h_2^2h_1^0$$
$$+27720h_1^5h_3^1h_4^1 + 16632h_1^5h_2^1h_5^1 + 924h_1^6h_6^1$$

$$B_{13,7} = 135135h_1^1h_2^6 + 1351350h_1^2h_2^4h_3^1 + 1801800h_1^3h_2^2h_3^2 + 200200h_1^4h_3^3$$
$$+900900h_1^3h_3^3h_4^1 + 900900h_1^4h_2^1h_3^1h_4^1 + 45045h_1^5h_2^4 + 270270h_1^4h_2^2h_5^1$$
$$+72072h_1^5h_3^1h_5^1 + 36036h_1^6h_2^1h_2^6 + 1716h_1^6h_7^1$$

例题 2： 计算同类项$h_5^5r_0$，$h_6^6r_0$，$h_4^3h_3^4r_1$的系数。

当 p=q 时，存在恒等式

$$h_p^p =$$

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 21 August 2017, publ: 21 August 2017

$$\prod_{k=1}^{p}\binom{kp-1}{p-1}=\frac{(p^2)!}{(p!)^{p+1}}$$

我们可以用恒等式的左边和右边分别计算出同类项$h_5^5r_0$，$h_6^6r_0$的系数。但是，两种计算过程需要计算的位数是不同的，利用恒等式的左边公式用普通计算器辅助计算就可以得到

$$h_5^5r_0\text{的系数}=5194672859367，h_6^6r_0\text{的系数}=3708580189738192261\,12$$

最后查表 1 得

$$h_3^4h_4^3r_1\text{的系数}=15400\cdot5775\cdot\frac{(1+3\cdot4+4\cdot3)!}{1!\,(3\cdot4)!\,(4\cdot3)!}=88935000\cdot67603900$$
$$=88935\cdot(676040-1)\cdot10^5=60123528465\cdot10^5$$

显然，不利用组合的性质无法仅用普通计算器完成上述的计算。

我们知道，文献[13]引入局部 r-贝尔多项式是为了把第一类和第二类 Spirling 数合并在一起研究。文献[12,13]清楚地说明了第二类 Spirling 数的计算公式

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\left(\binom{m}{m}m^n-\binom{m-1}{m}(m-1)^n+\binom{m-2}{m}(m-2)^n-\cdots\right)$$

与局部Bell多项式的联系,本文的定理1指出的是两类Spirling数与局部Bell多项式更进一步的联系。对现实的直接应用来说,定理 1 和表 1 用于量子力学时,揭示的是量子缠绕的性质,不在本文赘述。

7 定理 1 的研究展望

令：函数$H(x)$： $=h_x^x$的系数，那么单变量函数 H(x)的增长率几乎是伽马函数 $\Gamma(x)$的平方，属于一种新的超越函数；它的研究对解决分析方面的困难问题是有益的。

由局部 Bell 多项式可以看出：对于有限制条件的同类项，可以对应着无穷多个不同的正整数；反之，如果知道了大量的这类正整数，是否存在和怎样求解其限制条件的问题，属于著名的小世界问题。 因此研究定理 2 的逆具有重要的现实意义。具体来说，我们简单限制定理 1 中的 p_k，q_k；就可以得到许多类型的 Bell 多项式的恒等式。它们都是有现实意义的。

坦率地说，定理 1 更重要的性质是它蕴含着整数的特性，它涉及到的是数学基础问题。下面我们指出与人们习惯不同的、由定理 1 导致的两个研究方向：

第一， 定理 1 本质上给出的是最简单循环级数(震荡级数)的多次求导法则（与分部积分相反的过程）。由文献[4]可以看出，定理 1 类似于连续的 Möbius 函数$\mu(\frac{p}{d})$。因此把多次求导的结果反过来，可以研究循环级数的的积分问题[9]。换句话说，我们给出了 Möbius 函数$\mu(\frac{n}{d})$的插值（与微积分的中值定理相对应）法则，并且由定理 1 及其推广也可以得到广义（循环级数）的 Taylor 公式。这个研究方向已经在一些文献中初露端倪，但没有一种论述是简明的。

第二， 限制定理 1 中的 p_k 为素数，使得 $p_0=2$，$p_1=3$，$p_2=5$，$p_3=7$，$p_4=11$，…。在这种情形下，定理 2 中求和条件$p_0+q_1p_1+q_2p_2+\cdots+q_sp_s=n-1$就表示成为了素数的线性多项式。由此得到的 Bell 多项式的恒等式深刻揭示了分析学的离散性质，它为许多困难问题的解决提供了一种新方法。这个方向的研究是如此的生僻，至今未发现这方面的、与 Bell 多项式相关的研究文献。

参考文献 (References)

[1]Bell, E. T. (1934). Exponential polynomials. Annals of Mathematics,35(2), 258-277.
[2]L. Comtet, Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions, D. ReidelPublishing Co., Dordrecht, 1974.
[3]Cvijović, D. (2011). New identities for the partial bell polynomials. Applied Mathematics Letters, 24(9), 1544-1547.

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 21 August 2017, publ: 21 August 2017

[4]Pure Mathematics Vol.07 No.04(2017), Article ID:21265,7 pages 10.12677/PM.2017.74033.

[5]Fan E, Hon Y C. Generalized Super Bell Polynomials with Applications to Superymmetric Equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 2010, 53(1):2415.

[6]Natalini, P., & Ricci, P. E. (2004). An extension of the bell polynomials.Computers & Mathematics with Applications, 47(4), 719-725.

[7]Wang, W., & Wang, T. (2009). General identities on bell polynomials.Computers & Mathematics with Applications, 58(1), 104-118.

[8]Hoggatt, V. E. J., & Lind, D. A. (2013). Compositions and fibonacci numbers. Fibonacci Quarterly(7), 253-266.

[9]Courgeau D. Classic Topics on the History of Modern Mathematical Statistics: From Laplace to More Recent Times by Gorroochurn Prakash (review)[J]. Population English Edition, 2017, 72.

[10]Stanley, R. P. (2011). Enumerative combinatorics, vol. i. Wadsworth & Brooks/cole Advanced Books & Software Monterey Ca, 39(2), 195.

[11]Ebrahimifard, K., & Gray, W. S. (2017). The Fa àdi bruno hopf algebra for multivariable feedback recursions in the center problem for higher order abel equations.

[12]Mihoubi, M., & Rahmani, M. (2013). The partial r -bell polynomials. Afrika Matematika, 1-17.

[13]Broder, A. Z. (1984). The r -Stirling numbers . Discrete Math., vol.49 , 241-259.

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21018. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 21 August 2017, publ: 21 August 2017