On The Properties of N-Dimensional Simplex with Orthocenter Existence

Xingyuan Li

Guangzhou College of South China University of Technology, Guangzhou
Email: 742096830@qq.com

Received: May. 12th, 2020, published:May. 15th, 2020

Abstract

As everyone knows, any triangle must have a orthocenter, but any tetrahedron does not necessarily have a orthocenter, only the orthocenter tetrahedron can have the orthocenter [1]. It can be inferred, when *n*≥3, any *n*-dimensional simplex does not necessarily have a orthocenter. In this paper, we try to define a *n*-dimensional simplex with a orthocenter, it's called *n*-dimensional orthocenter simplex, the orthocenter property of *n*-dimensional orthocenter simplex is given.

Keywords

N-Dimensional Simplex, Orthocenter, Vector

有关垂心存在的*n*维单形之性质

李兴源

华南理工大学广州学院，广州
Email: 742096830@qq.com

收稿日期：2020年5月12日；发布日期：2020年5月15日

摘　要

众所周知，任意三角形必存在垂心，但任意四面体不一定存在垂心，只有垂心四面体才会存在垂心**[1]**。可以推断，当 $n \geq 3$ 时，任意的**n**维单形也不一定存在垂心。本文尝试对存在垂心的**n**维单形作出定义，称为**n**维垂心单形，给出了**n**维垂心单形的垂心性质。众所周知，任意三角形必存在垂心，但任意四面体不一定存在垂心，只有垂心四面体才会存在垂心**[1]**。可以推断，当 $n \geq 3$ 时，任意的**n**维单形也不一定存在垂心。本文尝试对存在垂心的**n**维单形作出定义，称为**n**维垂心单形，给出了**n**维垂心单形的垂心性质。

*脚注。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51012. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 12 May 2020, publ: 15 May 2020

关键词

***n*维单形，垂心，向量**

1. 引言

定义1 当$n\ge 3$时，对于n维欧氏空间E^n中的n维单形$A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$中的任意四点$A_i,A_j,A_k,A_l$，$0\le i,j,k,l\le n$且$i,j,k,l$互不相等，若满足

$$A_iA_j\perp A_kA_l,,$$

则称n维单形$A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$为$n$维垂心单形。

本文约定n维单形$A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$的各顶点都在$n$维球面$O$上，设该球面半径

$$|\boldsymbol{OA}_i|=R,\ 0\le i\le n,\ n\ge 3.$$

2. *n* 维垂心单形的外心角、外心向量与棱之间的等价关系

2.1. *n* 维垂心单形的外心角余弦定理、外心向量恒等式与棱勾股定理

当任意n维单形$A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$内接于$n$维球面$O$，则$A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$为$n$维垂心单形的充要条件为：

$$\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_j+\boldsymbol{OA}_k\cdot\boldsymbol{OA}_l=\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_k+\boldsymbol{OA}_j\cdot\boldsymbol{OA}_l=\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_l+\boldsymbol{OA}_j\cdot\boldsymbol{OA}_k, \tag{1}$$

$$\cos\angle A_iOA_j+\cos\angle A_kOA_l=\cos\angle A_iOA_k+\cos\angle A_jOA_l=\cos\angle A_iOA_l+\cos\angle A_jOA_k, \tag{2}$$

$$|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j|^2+|\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_l|^2=|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_k|^2+|\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_l|^2=|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_l|^2+|\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_k|^2, \tag{3}$$

$0\le i,j,k,l\le n$， $n\ge 3$且i,j,k,l互不相等。

证明：

充分性：

根据n维垂心单形的定义，有

$$0=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j\cdot\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_l=(\boldsymbol{OA}_j-\boldsymbol{OA}_i)(\boldsymbol{OA}_l-\boldsymbol{OA}_k)=\boldsymbol{OA}_j\cdot\boldsymbol{OA}_l-\boldsymbol{OA}_j\cdot\boldsymbol{OA}_k+\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_k-\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_l,$$

移项得

$$\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_k+\boldsymbol{OA}_j\cdot\boldsymbol{OA}_l=\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_l+\boldsymbol{OA}_j\cdot\boldsymbol{OA}_k.$$

再根据i,j,k,l的一般性，有

$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_k\cdot\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_l=0,$$

同理可证得

$$\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_j+\boldsymbol{OA}_k\cdot\boldsymbol{OA}_l=\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_k+\boldsymbol{OA}_j\cdot\boldsymbol{OA}_l=\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_l+\boldsymbol{OA}_j\cdot\boldsymbol{OA}_k.$$

因为

$$|\boldsymbol{OA}_i|=|\boldsymbol{OA}_j|=|\boldsymbol{OA}_k|=|\boldsymbol{OA}_l|=R,$$

所以

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51012. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 12 May 2020, publ: 15 May 2020

$$\frac{\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_j+\boldsymbol{OA}_k\cdot\boldsymbol{OA}_l}{R^2}=\frac{\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_j}{|\boldsymbol{OA}_i||\boldsymbol{OA}_j|}+\frac{\boldsymbol{OA}_k\cdot\boldsymbol{OA}_l}{|\boldsymbol{OA}_k||\boldsymbol{OA}_l|}=\cos\angle A_iOA_j+\cos\angle A_kOA_l$$
$$=\frac{\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_k+\boldsymbol{OA}_j\cdot\boldsymbol{OA}_l}{R^2}=\frac{\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_k}{|\boldsymbol{OA}_i||\boldsymbol{OA}_k|}+\frac{\boldsymbol{OA}_j\cdot\boldsymbol{OA}_l}{|\boldsymbol{OA}_j||\boldsymbol{OA}_l|}=\cos\angle A_iOA_k+\cos\angle A_jOA_l$$
$$=\frac{\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_l+\boldsymbol{OA}_j\cdot\boldsymbol{OA}_k}{R^2}=\frac{\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_l}{|\boldsymbol{OA}_i||\boldsymbol{OA}_l|}+\frac{\boldsymbol{OA}_j\cdot\boldsymbol{OA}_k}{|\boldsymbol{OA}_j||\boldsymbol{OA}_k|}=\cos\angle A_iOA_l+\cos\angle A_jOA_k$$

根据三角形的余弦定理，有

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j|^2+|\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_l|^2\\&=|\boldsymbol{OA}_i|^2+|\boldsymbol{OA}_j|^2-2|\boldsymbol{OA}_i||\boldsymbol{OA}_j|\cos\angle A_iOA_j+|\boldsymbol{OA}_k|^2+|\boldsymbol{OA}_l|^2-2|\boldsymbol{OA}_k||\boldsymbol{OA}_l|\cos\angle A_kOA_l\\&=2R^2\left(2-\cos\angle A_iOA_j-\cos\angle A_kOA_l\right)\end{aligned}$$

同理

$$|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_k|^2+|\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_l|^2=2R^2\left(2-\cos\angle A_iOA_k-\cos\angle A_jOA_l\right);$$
$$|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_l|^2+|\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_k|^2=2R^2\left(2-\cos\angle A_iOA_l-\cos\angle A_jOA_k\right).$$

由(2)得

$$|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j|^2+|\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_l|^2=|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_k|^2+|\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_l|^2=|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_l|^2+|\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_k|^2.$$

至此，充分性得证，下证必要性：
由于

$$\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_j+\boldsymbol{OA}_k\cdot\boldsymbol{OA}_l=\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{OA}_k+\boldsymbol{OA}_j\cdot\boldsymbol{OA}_l,$$

对上式移项可得

$$\boldsymbol{OA}_i\cdot\left(\boldsymbol{OA}_j-\boldsymbol{OA}_k\right)=\left(\boldsymbol{OA}_j-\boldsymbol{OA}_k\right)\cdot\boldsymbol{OA}_l=\boldsymbol{OA}_i\cdot\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_j\cdot\boldsymbol{OA}_l,$$

即

$$0=\left(\boldsymbol{OA}_i-\boldsymbol{OA}_l\right)\cdot\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{A}_i\cdot\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_j.$$

因此

$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_l\perp\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_k.$$

同理可证

$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j\perp\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_l,\ \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_k\perp\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_l.$$

根据 i,j,k,l 的一般性和任意性，可知 n 维单形 $A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 即为 n 维垂心单形。

2.2. 推论

当任意四面体 $ABCD$ 内接于球面 O，该四面体为垂心四面体的充要条件为：

$$\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{OD}=\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OB}\cdot\boldsymbol{OD}=\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OD}+\boldsymbol{OB}\cdot\boldsymbol{OC},$$
$$\cos\angle AOB+\cos\angle COD=\cos\angle AOC+\cos\angle BOD=\cos\angle AOD+\cos\angle BOC,$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51012. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 12 May 2020, publ: 15 May 2020

$$|\boldsymbol{AB}|^2+|\boldsymbol{CD}|^2=|\boldsymbol{AC}|^2+|\boldsymbol{BD}|^2=|\boldsymbol{AD}|^2+|\boldsymbol{BC}|^2.$$

综上所述，当 $n\ge 3$ 时，n 维单形 $A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为 n 维垂心单形的另一充要条件为：$\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 中的任意四点所构成的四面体为垂心四面体。

3. n 维垂心单形的垂心、偏垂心、垂线

定义 2 当 $n\ge 3$ 时，对于 n 维垂心单形 $A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，若点 H 满足

$$\boldsymbol{OH}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{OA}_i,$$

则点 H 称为 n 维垂心单形 $A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 的垂心。[2]

定义 3 当 $n\ge 3$ 时，对 n 维垂心单形 $A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 去掉任一点 A_i 得到的 $n-1$ 维单形记作 $\overline{\{A_i\}}$，对 $\overline{\{A_i\}}$ 所在的 n 维超平面记作 π_i。若点 H_i 满足

$$\boldsymbol{OH}_i=\frac{1}{n-2}\left(\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{OA}_j-\boldsymbol{OA}_i\right),$$

则点 H_i 称为顶点 A_i 的偏垂心。

3.1. n 维垂心单形的顶点、垂心、偏垂心共线定理

当 $n\ge 3$ 时，在 n 维垂心单形 $A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 中，A_i,H,H_i 三点共线。

证明：

显然

$$\boldsymbol{A_iH}=\boldsymbol{OH}-\boldsymbol{OA}_i=\frac{1}{n-1}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{OA}_j-\boldsymbol{OA}_i,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{HH}_i=\boldsymbol{OH}_i-\boldsymbol{OH}&=\frac{1}{n-2}\left(\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{OA}_j-\boldsymbol{OA}_i\right)-\frac{1}{n-1}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{OA}_j\\&=\frac{1}{(n-1)(n-2)}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{OA}_j-\frac{1}{n-2}\boldsymbol{OA}_i\\&=\frac{1}{n-2}\boldsymbol{A_iH}=\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A_iH_i}\end{aligned}$$

故 A_i,H,H_i 三点共线。

定义 4 将 A_i,H,H_i 三点所在的直线称作 n 维垂心单形 $A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 的一条垂线。

3.2. n 维垂心单形的垂线性质

当 $n\ge 3$ 时，n 维单形 $A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为 n 维垂心单形的充要条件为：任意一条垂线 A_iH 均垂直于 $\overline{\{A_i\}}$ 所在的 n 维超平面 π_i。

证明：

当 n 维单形 $A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为 n 维垂心单形时，由定义可知

$$A_1A_2\perp A_0A_i,\ 3\le i\le n.$$

因此

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51012. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 12 May 2020, publ: 15 May 2020

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A_0H}\cdot\boldsymbol{A_1A_2}&=\left(\boldsymbol{OH}-\boldsymbol{OA_0}\right)\left(\boldsymbol{OA_2}-\boldsymbol{OA_1}\right)\\&=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{OA_i}-(n-2)\boldsymbol{OA_0}\right)\left(\boldsymbol{OA_2}-\boldsymbol{OA_1}\right)\\&=\frac{1}{n-1}\left(\boldsymbol{OA_1}+\boldsymbol{OA_2}+\sum_{i=3}^{n}\boldsymbol{OA_i}-(n-2)\boldsymbol{OA_0}\right)\left(\boldsymbol{OA_2}-\boldsymbol{OA_1}\right)\qquad[3]\\&=\frac{1}{n-1}\left(\left|\boldsymbol{OA_2}\right|^2-\left|\boldsymbol{OA_1}\right|^2\right)+\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=3}^{n}\boldsymbol{OA_i}-(n-2)\boldsymbol{OA_0}\right)\left(\boldsymbol{OA_2}-\boldsymbol{OA_1}\right)\\&=\frac{1}{n-1}\sum_{i=3}^{n}\left(\boldsymbol{OA_i}-\boldsymbol{OA_0}\right)\left(\boldsymbol{OA_2}-\boldsymbol{OA_1}\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=3}^{n}\boldsymbol{A_0A_i}\cdot\boldsymbol{A_1A_2}=0\end{aligned}$$

同理可证 A_0H 垂直于 $\overline{\{A_0\}}$ 上的其余各棱，故 A_0H 垂直于 $\overline{\{A_0\}}$ 所在的 n 维超平面 π_0。

易证 A_iH 也垂直于 $\overline{\{A_i\}}$ 所在的 n 维超平面 π_i，$0\le i\le n$。至此，充分性得证，下证必要性：

若 n 维单形 $A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 满足任意一条垂线 A_iH 均垂直于 $\overline{\{A_i\}}$ 所在的 n 维超平面 π_i，$0\le i,j,k\le n$，且 i,j,k 互不相等，可得

$$\boldsymbol{A_iH}\cdot\boldsymbol{A_jA_k}=\frac{1}{n-1}\sum_{(0\le l\le n,l\ne i,l\ne j,l\ne k)}\boldsymbol{A_iA_l}\cdot\boldsymbol{A_jA_k}=0.$$

即

$$\sum_{(0\le l\le n,l\ne i,l\ne j,l\ne k)}\boldsymbol{A_iA_l}\cdot\boldsymbol{A_jA_k}=0.$$

把 i,j,k 的所有符合条件的整数值分别代入上式，可以得到由 $n(n+1)(n-1)$ 个关于 $\boldsymbol{A_iA_l}\cdot\boldsymbol{A_jA_k}$ 的齐次线性方程组成的齐次线性方程组，每个方程有 $n-2$ 个项。显然，这个齐次线性方程组只有零解。

因此，当 $0\le i,j,k,l\le n$ 且 i,j,k,l 互不相等时

$$\boldsymbol{A_iA_l}\cdot\boldsymbol{A_jA_k}=0.$$

故 n 维单形 $A:\{A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为 n 维垂心单形。必要性得证。

另外，本理的充分性和必要性也可以对 n 使用数学归纳法求证，有兴趣的读者可自行试证。

致　谢

敬请各位读者对于本文给予纠错指正。

参考文献

[1] 万述波. 四面体“垂心”的存在性问题及存在的充要条件[J]. 数学通报, 2002, 11(1): 20-21.

[2] 熊曾润. n 维共球有限点集的垂心及其性质[J]. 鲁东大学学报(自然科学版), 2012, 28(3): 193-197.

[3] 曾建国. 垂心四面体的垂心的一个向量形式[J]. 中学数学研究(高中版), 2009, 2(1): 27-28.