A Review of the Literature "Exploration of the Mathematical Proof of the Four-Color Theorem"

Tao Chen

Guang'an electric vocational and technical school
Email: 1940400155@qq.com

Received: May. 12th, 2020, published:May. 15th, 2020

Abstract

After an in-depth study of the article "Exploration of the Mathematical Proof of the Four-Color Theorem", it has made a more detailed introduction and review of its ideological methods, theoretical construction, and proof methods. We found and solved the problems in the article. We hold positive opinions on its academic value. We believe that the original text basically solves the problem of theoretical proof of the famous four-color theorem, and it is worth further review or confirmation by experts and scholars in related fields at home and abroad.

Keywords

Four Color Theorem, Ideological Approach, Theoretical Construction, Method of Proof, There Are Problems and Solutions

《探索四色定理的数学证法》文献述评

陈　陶

广安电力职业技术学校(原岳池县白庙职业中学校)
Email: 1940400155@qq.com

收稿日期：2020年5月12日；发布日期：2020年5月15日

摘　要

在深入研究了《探索四色定理的数学证法》一文后，对它的思想方法、理论构建、证明方法等做出了较为详细的介绍和述评，我们发现并解决了文章中存在的问题。对其学术价值持肯定意见，认为原文基本

*脚注。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51010. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 12 May 2020, publ: 15 May 2020

上解决了著名四色定理的理论证明问题，值得国内外相关领域的专家学者进一步审查或确认。

关键词

四色定理，思想方法，理论构建，证明方法，存在问题及解决方法

1. 引言

四色定理从 1852 年问世至今，尚未获得纯数学的理论证明。160 多年来，国内外众多专家学者(其中有不少著名数学家)都为之做过不懈努力，但均未获得成功。上世纪 70 年代，美国学者借助计算机证明了四色问题(四色猜想)成立，成为四色定理。但是，其过程相当冗长和十分繁难，且不可阅读和人工检视。后来虽有过几次修订或改进，但没有获得本质性的突破。对此，业界持有两种观点，一是认可，但希望有一个用数学方法的证明，特别是简短的证明；二是不予认可，是因为计算机证明至少失去了数学本身应有的规范和价值，仅仅似一本电话簿(被称为“暴力数学”的一个经典案例，见百度百科“暴力数学”)。时至今日，在国内外科研院所和高等院校中，有专家学者仍在探究四色定理的数学理论证明。笔者利用业余时间，从 2014 年初开始接触并研究四色问题，并经过数百次修改，数十次投稿和退稿，最终于 2018 年 8 月 19 日在中国科学院《科学智慧火花》栏目的数学板块刊发了《探索四色定理的数学证法》(http://idea.cas.cn/viewdoc.action?docid=64713)一文(限制不超过 3000 字，导致不少术语或语句不得不使用符号表示，使该文高度浓缩)。经再深入研究，形成了近 8000 字完整的《四色定理的初等证明》但遗憾的是已无机会再发表(拒绝非首发)，现对该文的思想方法、理论构建、证明方法、存在问题及解决方法等做出必要的介绍和分析。供国内外相关领域的专家学者进一步审查或确认。就国内来说，在中科院与有关 985 高校等就有一批相关领域的研究单位和权威专家，以其雄厚的实力，再进一步审查，审查的最终结果无论是对或错，一定能得出一个实事求是的正确评价。

2. 思想方法

对于四色定理的理论证明问题，吸取了历史教训，文章放弃了持续 100 多年来传统的主流研究方法—图论方法，回到原始状态，另辟蹊径。基于著名的肯普定理：每幅正规地图至少有一国具有二、三、四或五个邻国，没有每一国的邻国个数都是大于五的正规地图。以此作为切入点，逐步深入地思考、分析、证明四色定理。在思维方面，作者的理念独特，构思巧妙，思想方法和理论体系自成一体，专为解决四色问题的理论证明量身定制。做到了零起点、全原创、原汁原味、通俗易懂，避免了理论上的拔高，采用经典数学理论方法(构造法、反证法、第二数学归纳法及欧拉公式等)，得到了一个初等化的证明。但是，曾有相近专业的一位博导在看过作者在研究过程中的相关博文后称：要进入其思维理念是需要花时间和功夫的。这可能就是原创所具有的特点吧。

3. 理论构建

作者的构思巧妙而恰当，构建的理论体系，符合学术共同体，符合数学科学标准，是对现有经典数学理论的继承和发展。依据肯普定理，首先就科学地提出和阐明了构形(含二构形、三构形、四构形和五构形)、构形国、正规地图边界、边沿国和圈等概念。其次，证明四色定理的关键和核心就在于五构形的情形，这是众所周知的。而作者恰好就抓住了这个重点、难点和关键，巧妙的利用构造法、反证法和第二数学归纳法分别证明了关于五构形的引理 1：五构形的国家个数的集合 W＝｛12,14,15,…,n,…｝、引理

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51010. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 12 May 2020, publ: 15 May 2020

2：任意五构形中存在构形国不是边沿国、引理 3：在 $n \geq 15$ 的五构形中，若包围构形国 Q 的每个邻国与 Q 只有一条共同边界，Q 的邻国两两相邻的组数是五，这五个邻国中存在邻国个数大于五的国 P，则四色定理成立。总之，这些概念的定义和引理在证明四色定理的过程中分担着不同的角色，并起作重要作用，引理 3 还起到了最为关键性的作用。

(一) 引理 1 表明：除 12 外，W 中每个 n 所对应五构形不同结构的个数及复杂程度无论如何，皆可视为由“四圈”型五构形演变而成。所构造的五构形相当特殊，是因为只需要得到五构形的国家个数的集合，其目的是用来证明引理 3，以表明国家个数为 $15,16,\ldots,n$，…时的五构形都是存在的，是连续不间断的。

(二) 引理 2，专门为证明五构形的情形而建立，避免了讨论五构形中的构形国是边沿国的众多情形，并首先就予以明确。遗憾的是在证明过程中出现了一个小小瑕疵，即错误的认定了“五构形 G 的边沿国一定能形成一个圈 T 包围其它所有国家”，而事实上是，五构形 G 的边沿国不一定能形成一个圈 T 包围其它所有国家。关于这一点，我们把它放在“存在问题及解决方法”中介绍。

(三) 引理 3，专门为证明“②Q 的邻国中每一国的邻国个数不都是五”的情形而建立，这个引理在证明四色定理中起到了最为关键性的作用。证明采用的是第二数学归纳法，其难度之大，所占篇幅之多，这在全文中是唯一的。为了第二步便于设置归纳假设的“模式”和递推，对初始值的验证就提前设置了相应的着色“模式”，大大地增加了着色难度，特别是换色前和换色后的归纳假设“模式”的相互“转换”及其等价性的论证，其难度更是使人望而生畏，举步维艰，无路可走。经反复推敲，终于绝地逢生，突破了被人们视为根本不可能闯入的“禁区”，并获得成功。历史上深入研究过四色问题的专家学者，恐怕有不少人遭遇过这个问题，使人总是无法突破，而导致研究失败的尴尬局面。

4. 证明方法

在四色定理的证明方法上，还是采用的第二数学归纳法。

(一)初始值的验证，本身这个值可以设置为 1(或 1，2，3，4)，但为何这个值却设定为小于或等于 15 呢？这是因为我们的目的是便于适应后面各种构形的情形的证明。在此条件下，四色定理成立是公认的，没有必要再具体验证。

(二)归纳假设的设置常规而简单，递推时，第一层次按四种构形分类，层层深入，层次清晰，逻辑严谨，步步到位。分类最多达到了八个层次，真可谓“山重水复疑无路”，繁难程度可想而知。二构形、三构形的证明(递推)非常简单。

1，四构形的情形较简单，文章在讨论“2，Q 的邻国中至少有一国与 Q 至少有两条共同边界”情形时，首段文字叙述的意思是(以表明此处理的方式或方法符合数学特点，是可行的)：这时，如果有 Q 的邻国 A 和 B 分别与 Q 形成圈 T 和 H，显然，H 在 T 内或 T 外，并且相互独立而互不干扰。即使有 Q 的两个邻国与 Q 形成圈 S，S 也在 T 内或 T 外。事实上，我们在证明时，只需要 Q 的邻国中有一国与 Q 至少有两条共同边界(形成一组圈，这组圈可以是一个圈)就足够了。当 T 或(可兼“或”，即除了不可“兼”以外，还有“可兼”的情形)S 型圈超过一组时，根据这些圈的特点和相互关系，完全可以不给出相应的图形，当然相应的证明也可以“省略”。即使给出证明，也跟只有一组圈是一样的，并且如同后面的证明，是可以批量的进行证明。经具体考察，后面有 10 个相关的图形没有给出，也没有“证明”。这 10 个图形都是可以在后面相关图形的基础上符合条件地增加相应的圈而得到，但要去掉重复的。对以下的五构形，在这种情形下也是按此方法处理，不再赘述。

关于“此法仅适用于 T 及 S 型圈”的说明，即“此法仅适用于由两国或三国形成的 T 型圈或 S 型圈”

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51010. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 12 May 2020, publ: 15 May 2020

的说明，对由三个国家形成的圈，在四种颜色中，取三种色的组合有四种情形：123，124，134，234；任取两组，只有一种色不同，其圈上两次着色容易做到完全吻合。对由四个或四个以上的国家形成的圈，则不能做到所有情形都能完全吻合。这是因为不仅要涉及到圈上国家个数的奇偶性，还要涉及到圈上着色的种数与“次序”等。就是说，存在圈上两次着色不相吻合的情形，如：假设一个圈上有四个国家，前次着色是 1212，而后次着色则可能是 1213，色的种数不同)

2，五构形的情形复杂多变，分类的层次繁多，最多达到了八个层次，这部分是重点、难点及关键。根据引理 2，首先就令构形国 Q 不是边沿国，引理 2 的独特作用显现出来，使得其分类减至最少，避免了讨论构形国 Q 是边沿国的 7 种情形，功不可没。每种情形都需要仔细体会、需要慢慢推敲领悟、需要小心应对。这是因为全是用的一些“哪些国家可以视为一国、哪两个或三个国家可以形成一个圈、哪些国家应该怎样着色或者怎样换色、哪些国家可以怎样拓展或者怎样收缩及其还原等等”文字性语言推理论证。由于各种情形变化多端，似有规律可寻而又无规律，所以，导致处理方式灵活多变，着色与换色手法多种多样，非常规的处理方式随处可见，有的情形的论证(或着色或换色)甚至是批量处理的。利用引理 3，②Q 的邻国中每一国的邻国个数不都是五的情形的证明得以顺利解决，获得了关键性突破。关于“2，Q 的邻国中至少有一国与 Q 至少有两条共同边界”的情形，本情形是按“四构形”相应情形的方法处理，“省略”的 6 个图形都可以在相关图形的基础上增加相应的圈而得到，但要去掉重复的。

5. 存在问题及解决方法

任何一项原创性研究成果，可以说都经历过十磨九难，苦苦追寻的艰难历程才获得的。反思是必不可少的环节，修订或查漏补缺也属正常的学术惯例。四色问题的计算机解决是在上世纪 70 年代，后来也是经过多年多次才最终定案。

(一)定理与定义的细化

因《科学智慧火花》投稿系统控制文章不超过 3000 字，导致原文不得不把出现频率较高的术语或语句用符号表示。举例如下：

肯普定理：每幅正规地图至少有一国具有二、三、四或五个邻国，没有每一国的邻国个数都是大于五的正规地图。

定义：

1，根据肯普定理，我们称每个国家的邻国个数都不小于 n (含 n。n 分别取 2、3、4、5)的正规地图为 n 构形。

按此，正规地图可分为二构形、三构形、四构形和五构形等四种情形。

2，对正规地图的各种构形，称邻国个数最少的国家为构形国。

3，约定正规地图所有的国家连成一片(若不是连成一片的，对每一片都做出同样的证明即可)且内部没有空的区域(若有空的区域，待着色后，去掉即可)，并称内部和外部的分界线(简单闭曲线)为正规地图边界。

4，如果一个国家有一段边界在正规地图边界上，则称这个国家为边沿国。

5，如果一些国家(至少有两个)包围了其它国家，则称这些国家形成的环为圈。

(二) 其它存在的问题见《探索四色定理的数学证法》评论中的 7 楼和 11 楼。

6. 结束语

对文章《探索四色定理的数学证法》，通过以上介绍、思考、分析、修订和部分细化等，认为：1，

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51010. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 12 May 2020, publ: 15 May 2020

文章《探索四色定理的数学证法》中的理论属“0~1”型原创，其处理方法有别于传统，自始至终保持在“数学科学共同体”内展开讨论，其理论体系独立，自成一体，是对经典数学的继承和发展；其证明简洁、初等，逻辑层次清晰、严谨，用语朴实且通俗。2，原文章基本解决了著名四色定理的理论证明问题，或者至少取得了重大进展，或者开辟了一条研究四色问题的新途径、新方法，其理论价值、学术价值及社会意义等值得肯定。3，把原文(含 7 楼和 11 楼的评论)和本述评结合起来，实际上四色定理的理论证明问题已得到圆满的解决。4，根据以上三点，值得国内外相关领域的专家学者进一步研究审查或者确认，以使四色定理的理论证明问题早日得到彻底解决。

参考文献

[1] 陈陶(陈涛)(2018)探索四色定理的数学证法.http://idea.cas.cn/viewdoc.action?docid=64713.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51010. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 12 May 2020, publ: 15 May 2020