

Stability Analysis of the High Bridge Pier under Condition of Elastic Supports

Shaohong Lu¹, Linong Liang¹, Xiong Liang¹, Xueming Fan², Zhigang Liang², Keyan Li²

¹Guangdong Highway Design Institute Co., Ltd., Guangzhou Guangdong

²School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong

Email: fanxm@scut.edu.cn

Received: Oct. 23rd, 2015; accepted: Nov. 10th, 2015; published: Nov. 17th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Recently, with the development of mountain highway, the height of bridge pier has also increased. Stability of the high pier of bridge is a crucial part of bridge design; therefore, stability analysis of high pier is increasingly outstanding. In this paper, based on existing stability calculation methods, we make a further research into the problem of stability analysis of the high pier with elastic supports in both sides and derive corresponding formulas, which are applied into actual bridge design. A further research into the problem of stability calculation of piers with elastic supports in both sides is made, and corresponding formulas are derived and applied into actual bridge design. Number examples also show the validity of calculation formulas in this paper.

Keywords

High Pier, Stability Analysis, Elastic Support

桥梁高墩在弹性支座条件下的稳定性计算

卢绍鸿¹, 梁立农¹, 梁雄¹, 范学明², 梁志刚², 李可严²

¹广东省公路勘察规划设计院股份有限公司, 广东 广州

²华南理工大学土木与交通学院, 广东 广州

Email: fanxm@scut.edu.cn

收稿日期：2015年10月23日；录用日期：2015年11月10日；发布日期：2015年11月17日

摘要

近年来，随着山区公路建设的发展，桥梁的墩高也在不断增加，高墩桥梁的稳定性计算是桥梁设计的重要环节，故桥墩墩身的稳定性计算的重要性日益突显。本文在现有的稳定计算的基础上，进一步研究了桥墩上下两端均为弹性支撑的桥墩的稳定性计算问题，推导出相应计算公式。数值算例结果验证了公式的正确性。

关键词

高墩，稳定分析，弹性支撑

1. 引言

随着我国高速公路里程数不断增加，桥梁建设也进入了蓬勃发展阶段。对于山岭与丘陵地段，特别是西部山区，高速公路在跨越峡谷或者特殊地形时，大量的高墩桥梁被修建，桥墩墩身的稳定性计算的重要性日益突显。文献[1]从能量法角度出发，推导了考虑弹性基础影响下桥墩稳定分析临界荷载的理论解答，文[2]考虑了上部结构对桥墩稳定分析的影响，给出了相应的理论解答[2]。本文基于现有结构稳定计算理论中梁的弯曲变形公式[3]，导出了上下两端同时具有弹性支撑条件下桥墩临界荷载的计算公式。通过算例计算与现有成熟理论计算结果对比，得出结论。

2. 计算模型的选取

在《公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范(JTG D62-2012)》5.3.1条给出了桥墩在理想边界条件下的稳定计算公式(欧拉公式),但其没有考虑实际结构中上部结构和桩土支撑对桥墩两端约束的影响。为了同时考虑这两部分因素对桥墩两端约束的影响,本文选取计算模型如图1(a)所示。设桥墩高为 l ,墩顶作用一竖向力 F_p ,桥墩的抗弯刚度为 EI ,桥梁上部结构对桥墩顶部的边界约束用水平弹簧 k_1 和转角弹簧 k_θ 模拟,桩土支撑对桥墩底部的边界约束的影响用水平弹簧 K_1 和转角弹簧 K_θ 模拟。

3. 临界荷载的计算

假设桥墩在临界轴向荷载 F_p 的作用下处于微弯平衡构型,如图1(b)所示。 $y(x)$ 为桥墩的失稳挠曲线函数, $\theta(x)$ 为桥墩的失稳转角函数。取整体进行受力分析,得

$$\left. \begin{aligned} Q_0 + Q_l &= 0 \\ M_0 + M_l - F_p [y(l) - y(0)] - Q_l l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

取下半部分为隔离体进行分析,如图1(c)所示,得

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= -Q_0 \\ M(x) &= F_p [y(x) - y(0)] - Q_0 x - M_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

当杆内的应力不超过比例极限时,压杆的挠曲线近似微分方程为

$$EIy''(x) = -M(x) = -F_p [y(x) - y(0)] + Q_0 x + M_0 \quad (3)$$

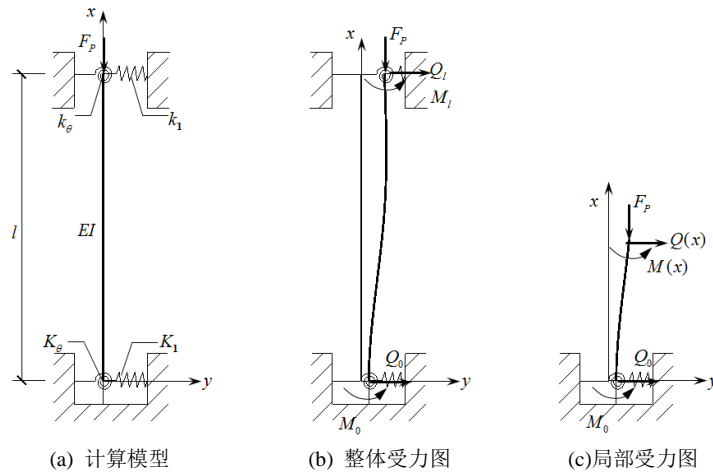


Figure 1. Calculation diagram
图 1. 计算简图

令 $n^2 = \frac{F_p}{EI}$ ，则(3)式可改写成以下形式：

$$y''(x) + n^2 y(x) = \frac{F_p}{EI} y(0) + \frac{Q_0 x + M_0}{EI} \quad (4)$$

其解为

$$y(x) = A \sin nx + B \cos nx + y(0) + \frac{Q_0 x + M_0}{F_p} \quad (5)$$

式中 A 、 B 为积分常数，可以用压杆挠曲线的边界条件确定， Q_0 、 M_0 等支座反力可通过边界条件和受力分析确定。下面分别讨论在不同边界条件下，压杆临界荷载的确定。

3.1. 压杆两端均为简支。

由边界条件和受力分析可知， $y(0) = y(l) = 0$ ， $Q_0 = Q_l = 0$ ， $M_0 = M_l = 0$ ，所以压杆挠曲线可以表示为

$$y(x) = A \sin nx + B \cos nx \quad (6)$$

分别代入上下两端的边界条件，得

$$\begin{cases} y(0) = B = 0 \\ y(l) = A \sin nl + B \cos nl = 0 \end{cases} \quad (7)$$

要使方程组取得非零解，即 A 、 B 不同时为零，由此可以得到

$$\sin nl = 0 \quad (8)$$

于是有

$$nl = m\pi \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

解出临界荷载 F_p 为

$$F_p = \frac{m^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (10)$$

当 $m = 1$ 时，该荷载为最小临界荷载，即

$$F_P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (11)$$

由式(11)可知, 两端简支压杆的计算长度系数为 1。

3.2. 压杆两端均为固支

由边界条件和受力分析可知, $y(0) = y(l) = 0$, $y'(0) = y'(l) = 0$, $Q_0 = Q_l = 0$, $M_0 = M_l$, 所以压杆挠曲线可以表示为

$$y(x) = A \sin nx + B \cos nx + \frac{M_0}{F_P} \quad (12)$$

分别代入上下两端的边界条件, 得

$$\begin{cases} y(0) = B + \frac{M_0}{F_P} = 0 \\ y'(0) = An = 0 \\ y(l) = A \sin nl + B \cos nl + \frac{M_0}{F_P} = 0 \\ y'(l) = An \cos nl - Bn \sin nl = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式(13)前两个方程可以解得, $A = 0$, $B = -M_0/F_P$, 将其回代到后两个方程, 得

$$\begin{cases} \cos nl = 1 \\ \sin nl = 0 \end{cases} \quad (14)$$

于是有

$$nl = 2m\pi \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

解出临界荷载 F_P 为

$$F_P = \frac{4m^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (16)$$

当 $m=1$ 时, 该荷载为最小临界荷载, 即

$$F_P = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2} \quad (17)$$

由式(17)可知, 两端简支压杆的计算长度系数为 0.5。

3.3. 压杆两端均为弹性支撑

考虑到支座位移与支座反力之间的关系, 各支座反力可以表示为

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= -K_1 y(0) \\ Q_l &= -k_1 y(l) \\ M_0 &= K_\theta y'(0) \\ M_l &= k_\theta y'(l) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

压杆挠曲线仍为式(5)所示, 将其代入边界条件, 得

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= B + y(0) + \frac{M_0}{F_p} \\ y(l) &= A \sin nl + B \cos nl + y(0) + \frac{Q_0 l + M_0}{F_p} \\ y'(0) &= An + \frac{Q_0}{F_p} \\ y'(l) &= An \cos nl - Bn \sin nl + \frac{Q_0}{F_p} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

将式(1)和式(18)代入式(19), 得

$$\left. \begin{aligned} B + \frac{M_0}{F_p} &= 0 \\ A \sin nl + B \cos nl + \left(\frac{l}{F_p} - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{K_1} \right) Q_0 + \frac{M_0}{F_p} &= 0 \\ An + \frac{Q_0}{F_p} - \frac{M_0}{K_\theta} &= 0 \\ An \cos nl - Bn \sin nl + \left(\frac{1}{F_p} + \frac{l}{k_\theta} - \frac{F_p}{k_\theta k_1} - \frac{F_p}{k_\theta K_1} \right) Q_0 + \frac{M_0}{k_\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

欲使压杆在微弯构形下维持平衡, 需要 A, B, Q_0, M_0 不全为零的解, 而 A, B, Q_0, M_0 不全为零得到条件是它们的系数行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{F_p} \\ \sin nl & \cos nl & \frac{l}{F_p} - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{K_1} & \frac{1}{F_p} \\ n & 0 & \frac{1}{F_p} & -\frac{1}{K_\theta} \\ n \cos nl & -n \sin nl & \frac{1}{F_p} + \frac{l}{k_\theta} - \frac{F_p}{k_\theta k_1} - \frac{F_p}{k_\theta K_1} & \frac{1}{k_\theta} \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

解上述的行列式, 就可求得弹性支座桥墩的临界荷载。而根据公式 $\mu = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{F_p l^2}}$ 可以由临界荷载反推出对应的压杆稳定计算长度系数 μ 。

4. 算例

某一公路桥梁中, 使用了六种尺寸的双柱式圆桥墩, 桥墩的墩高和半径如表 1 所示。桥墩均采用强度等级为 C25 的混凝土, $E = 2.85 \times 10^4$ MPa。墩顶的水平刚度为 $k_1 = 1.875 \times 10^6$ kN/m, 转角刚度为 $k_\theta = 3.216 \times 10^6$ kN/m。桥梁承台的水平刚度为 $K_1 = 2.248 \times 10^6$ kN/m, 转角刚度为 $K_\theta = 3.786 \times 10^6$ kN/m。

分别采用本文方法和通用有限元软件 Strand 7 两种方法来计算各个桥墩的临界荷载。计算结果也在表 1 中展示。

从表中可以看出, 利用本文方法计算出来的结果和利用有限元软件计算出来的结果是一致的, 这说明了本文方法的有效性。

将计算出来的临界荷载转化成相应的压杆计算长度系数, 结果见表 2。

Table 1. The critical loads of pier
表 1. 桥墩临界荷载计算表

墩长(m)	墩径(m)	EI(N/m ²)	本文方法(kN)	Strand7(kN)	相对误差
25	1.8	2.94E+10	8.83E+05	8.82E+05	0.11%
	2	4.48E+10	1.17E+06	1.16E+06	0.47%
35	2	4.48E+10	6.69E+05	6.67E+05	0.29%
	2.2	6.55E+10	8.60E+05	8.59E+05	0.12%
40	2.2	6.55E+10	6.88E+05	6.87E+05	0.10%
	2.4	1.31E+11	1.12E+06	1.12E+06	0.00%

Table 2. The calculate length of compressed beam
表 2. 压杆计算长度系数对应表

墩长(m)	墩径(m)	临界荷载(kN)	压杆计算长度系数
25	1.8	8.83E+05	0.73
	2	1.17E+06	0.78
35	2	6.69E+05	0.74
	2.2	8.60E+05	0.78
40	2.2	6.88E+05	0.77
	2.4	1.12E+06	0.85

从表中可以看出，在考虑了支座的弹性约束之后，桥墩的压杆计算长度系数与规范给出的理想边界条件下的计算长度系数都不相同，而且此时桥墩的计算长度系数和桥墩自身的刚度也有关系。所以，在进行桥墩稳定性计算时，考虑实际的边界条件是十分有必要的。

5. 结论

弹性的边界条件对桥墩的稳定性计算有着很重要的影响，如果按照规范给出的理想边界条件进行计算，很可能会使计算结果产生较大的偏差。本文从弯矩微分方程出发推导出了考虑弹性支座条件下的桥墩压杆稳定计算公式，可以较为准确地计算出该条件下的桥墩压杆临界荷载。数值算例也验证了本文推导出的公式的正确性。因此本文的方法以及计算结果可供设计人员参考使用。

致 谢

感谢以下项目资助：广东省交通运输厅 2012 年科技项目(科技-2012-02-030)；高等学校博士学科点专项科研基金新教师类课题(20110172120038)；中央高校基本科研业务费专项资金资助；国家自然科学基金面上项目(51378009)。

参考文献 (References)

[1] 刘进, 邹银生, 湛发益. 弹性地基桥墩稳定性分析[J]. 山西建筑, 2004(4): 107-108.
 [2] 刘钢城, 谢新刚. 墩顶为弹性支承的桥墩压杆的计算长度[J]. 公路, 2013(1): 133-135.
 [3] 唐家祥, 王仕统. 结构稳定理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989.