

Dynamic Response Analysis of Double-Ended Resonant Beams

Weiwei Xing, Haolin Li, Shuo Zhang, Shangchun Fan

School of Instrumentation Science and Opto-Electronics Engineering, Beihang University, Beijing
Email: alex.xing@163.com, 492515865@qq.com

Received: Nov. 22nd, 2017; accepted: Dec. 6th, 2017; published: Dec. 12th, 2017

Abstract

The resonant sensor has attracted more attention because of its high sensitivity, small footprint, stability, compatibility with multiple-phase samples. The typical resonant sensor measures resonant frequency modulated by axial load to realize mass sensing. Dynamic characteristic is an important factor to evaluate stability of resonant beam, and the key point is to analyze the dynamic response of the resonant beam under dynamic axial load. The article is based on infinitesimal method; mathematical model of vibration of resonant beam impacted by dynamic axial force was established through the resonant beam micro mechanical balance and analyzed through Mathieu equation. Equivalent circuit method was chosen to solve vibration model. The simulation of the circuit shows the dynamic response of resonant beam under the typical axial load. Besides, the article studied the effect of damping on the resonant beam and concluded the damping only influenced on vibration amplitude scarcely on frequency.

Keywords

Resonant Beam, Dynamic Response, Sensor, Equivalent Circuit, Damping

双端固支谐振梁动态响应分析

邢维巍, 李昊霖, 张 硕, 樊尚春

北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院, 北京
Email: alex.xing@163.com, 492515865@qq.com

收稿日期: 2017年11月22日; 录用日期: 2017年12月6日; 发布日期: 2017年12月12日

摘 要

谐振式传感器的高动态应用近年来得到越来越多的关注。典型谐振式传感器利用反映被测量的轴向载荷

调制谐振梁的固有频率实现这种映射。高动态应用中的核心问题是动态轴向载荷下谐振梁的振动特性。本文以微元法为基础,利用基本的微元力学平衡关系建立了动态轴向力作用下谐振梁振动的数学模型,利用Mathieu方程的一般形式进行分析,引入了等效电路方法进行模型求解。通过对等效电路的仿真,得到了谐振梁在典型动态载荷下的振动响应。此外,本文研究了阻尼对谐振梁的影响,得出阻尼项仅影响谐振梁的振幅,基本不影响谐振梁的频率的结论。

关键词

谐振梁, 动态响应, 传感器, 等效电路, 阻尼

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

谐振式压力传感器因其高精度、高灵敏度得到越来越多的关注[1]。典型谐振式传感器多以谐振梁作为敏感元件,通过测量谐振梁振动频率的变化来测量待测压力。实际应用中谐振梁的高动态应用日益受到重视,在动态载荷的作用下,谐振梁需做出快速精确的响应,为保证测量结果的准确性,对谐振梁的动态响应进行分析显得尤为重要。目前对谐振梁振动特性的研究局限于移动力或只对梁的结构进行分析[2][3][4],本文试图从理论上探讨动态载荷对欧拉梁振动特性的作用机理,建立更一般形式的动态轴向载荷下梁的振动的数学模型。该模型在特定情况下可以对应为Mathieu方程,然而Mathieu方程在求解过程中有一定的局限性,因此采用等效电路的方法对该模型进行分析[5]。此外,考虑到实际振动中谐振梁的阻尼损耗,分别通过对谐振梁边界条件的理论计算以及Comsol软件仿真分析了阻尼对谐振梁振动特性的影响。

2. 谐振梁振动数学模型建立

假设谐振梁在动态轴向载荷的作用下为伯努利-欧拉梁的模型[6],受力模型如图1。以微元 dx 段为研究对象,受力分析如图2。

图中各项的物理意义:

F ——梁承受的载荷;

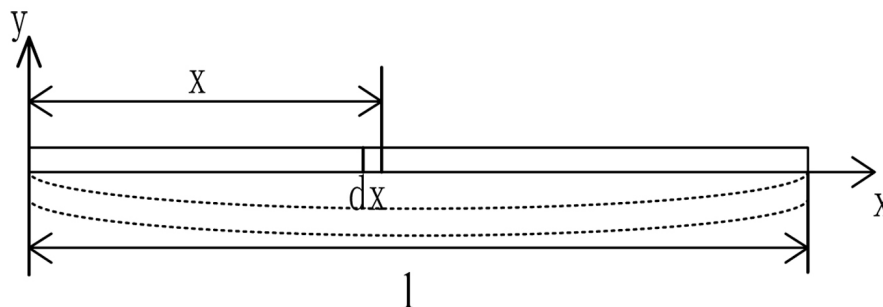


Figure 1. Schematic diagram of bending vibration of double end fixed beam under dynamic axial force

图 1. 动态轴向载荷作用下双端固支梁弯曲振动示意图

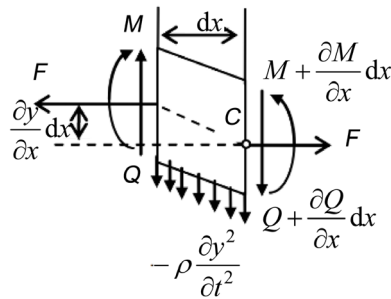


Figure 2. Force analysis of the micro section dx of the resonant beam
图 2. 谐振梁微段 dx 受力分析

ρ ——梁的密度；

E ——梁的弹性模量；

I ——梁横截面对中性轴的惯性矩。

A 、 L 、 h 、 b 分别是梁的横截面积、长度、高度、宽度。设 $y(x,t)$ 表示谐振梁上距原点为 x 处的截面在 t 时刻的横向位移，由力矩平衡公式与弯矩平衡公式共同联立得梁横向弯曲振动的方程为：

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

用分离变量法求该方程的解，设方程(1)的解为：

$$y(x,t) = \phi(x) \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

其中 ω 为梁振动的固有频率， $Y(x)$ 为梁振动的模态函数。则式(1)可变形为：

$$EI \frac{d^4 Y}{dx^4} - F \frac{d^2 Y}{dx^2} - \rho A Y \frac{d^2 P}{dt^2} = 0 \quad (3)$$

解得梁自由振动振型公式：

$$\varphi_i(x) = \text{ch} \lambda_i x - \cos \lambda_i x + \eta_i (\text{sh} \lambda_i x - \sin \lambda_i x) \quad (4)$$

谐振梁在实际振动时，总有能量通过谐振梁两端的固支端损失，因此将谐振梁的边界等效为弹簧支撑情况代入有阻尼的边界条件，其中 k 表示弹性系数

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 Y(0)}{dx^2} = 0 \\ \frac{d^2 Y(l)}{dx^2} = 0 \\ EI \left[\frac{d^3 Y(0)}{dx^3} \right] = kY(0) \\ EI \left[\frac{d^3 Y(l)}{dx^3} \right] = kY(l) \end{array} \right. \quad (5)$$

解得

$$\cos \lambda l \text{ch} \lambda l + 1 = -\frac{k}{EI \lambda^3} (\cos \lambda l \text{sh} \lambda l - \sin \lambda l \text{ch} \lambda l) \quad (6)$$

谐振梁的各项参数取值如表 1 所示：

Table 1. Parameters of the resonant beam
表 1. 谐振梁各项参数取值

参数	描述	值
ρ	梁的密度	$2.33 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
E	梁的弹性模量	$1.7 \times 10^{11} \text{ Pa}$
L	梁的长度	10^{-3} m
b	梁的宽度	10^{-4} m
h	梁的高度	10^{-5} m

代入各项已知数值后, 计算出此时谐振梁频率为 88 kHz, 经 Matlab 计算可得, 在仿真计算中发现, 中所定 k 值的改变不影响两方程交点的改变, 因此, 得到一阶结果为

$$\lambda_1 l = 1.880 \quad (7)$$

对应参数

$$\eta_1 = \frac{\cos \lambda L - \text{ch} \lambda L}{\text{sh} \lambda L - \sin \lambda L} \quad (8)$$

得出梁自由振动 - 阶振型公式

$$\phi(x) = \text{ch} \lambda x + \cos \lambda x + 0.7341(\text{sh} \lambda x + \sin \lambda x) \quad (9)$$

对式(3)两边都乘以 $Y(x)$, 再对 x 进行积分, 利用分部积分法以及齐次边界条件可得:

$$\left(\int_0^l \rho A \phi^2 dx \right) \frac{d^2 P}{dt^2} + \left(\int_0^l EI (\phi'')^2 dx - F(t) \int_0^l (\phi')^2 dx \right) \cdot P = 0 \quad (10)$$

式(10)简化可写为:

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + (A - B \times F(t)) \cdot P = 0 \quad (11)$$

其中 A, B 为常量, 该式为一般载荷形式作用下梁的振动模型。

输入载荷为正弦时, 通过如式(10)的变量代换:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K} = \frac{\int_0^l EI (\phi'')^2 dx}{\int_0^l \rho A \phi^2 dx} \\ \tilde{\alpha} = \frac{\varepsilon \cdot \int_0^l (\phi')^2 dx}{2 \int_0^l \rho A \phi^2 dx} \end{array} \right. \quad (12)$$

将式(10)进行转换后, 可得到如式(13)所示的标准形式的 Mathieu 方程。

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + (\tilde{K} - 2\tilde{\alpha} \cos(\omega \cdot t)) P = 0 \quad (13)$$

将公式中的参数全部统一为国际单位制后, 经过数值计算, 式(11)为:

$$\frac{d^2P}{dt^2} + (3.0434 \times 10^{11} - N(t) \times 5.2798 \times 10^{12}) \cdot P = 0 \quad (14)$$

通常可以利用 Mathieu 方程可以推导出在动态输入载荷下谐振梁的振动模型,但是 Mathieu 方程对输入载荷的形式有要求,因此有局限性。故本文采取建立等效电路的方法模拟动态轴向载荷下谐振梁振动方程特性,来实现动态输入载荷的一般性[7]。

3. 谐振梁振动模型电路模拟

根据已经建立的谐振梁振动模型建立输出谐振梁振动信号的等效电路,如图3所示。

其中 $F(t)$ 即对应系统中的输入载荷,通过改变输入来模拟动态力的加载模式。

根据数值要求及电路自激振荡的条件确定电路各项参数后,对电路输入不同的激励进行仿真,如图所示,分别为对电路输入载荷为 0 mv 的直流电压、-20 mv 的直流电压、频率为 10 kHz 载荷为 10 mv 及 20 mv 的交流电压和频率为 50 kHz 载荷为 10 mv 的交流电压(如图4)。

根据电路仿真结果可以看出,当电压频率及幅值改变时,输出响应的频率和幅值也相应改变,且当输入信号增大时,输出响应出现频率被调制的现象。符合在机械系统中,

因外载荷增大而系统刚度增大,振荡频率升高而振幅下降的现象。

4. 阻尼对谐振梁振动特性影响

在谐振梁的分析中,阻尼的分类主要有以下几种:1) 锚点损耗,当谐振器振动时,谐振梁的动能通过边界传递到锚点,再通过锚点将动能传递到谐振器基底,最后造成能量耗散;2) 表面能量损耗,由表面晶格缺陷以及表面含有吸附物造成的表面应力损耗;3) 空气阻尼,当谐振器工作在空气中时,空气阻尼损耗是谐振器的主要能量损耗方式,为了提高谐振器 Q 值,必须对谐振器采用真空封装以减小阻尼损耗。然而绝对真空的封装是很难实现的,空气阻尼损耗也不可能完全消除;4) 热弹性阻尼,当谐振器振

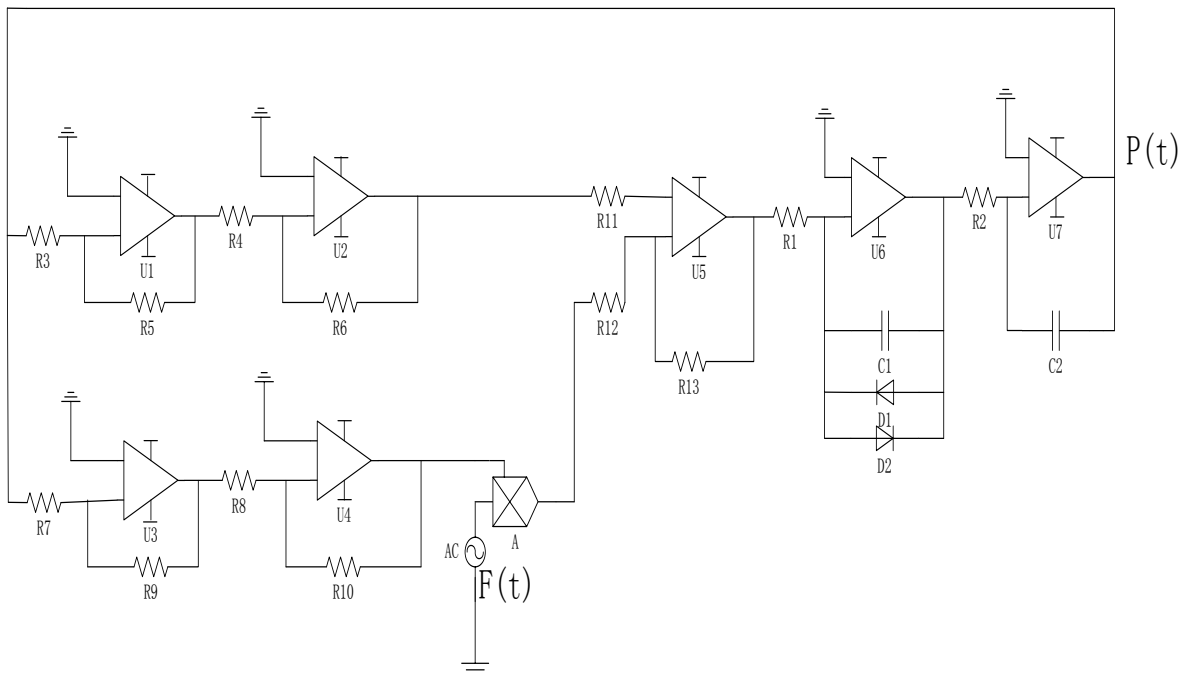


Figure 3. Equivalent circuit for the dynamic response of the output resonant beam

图3. 谐振梁动态响应等效电路图

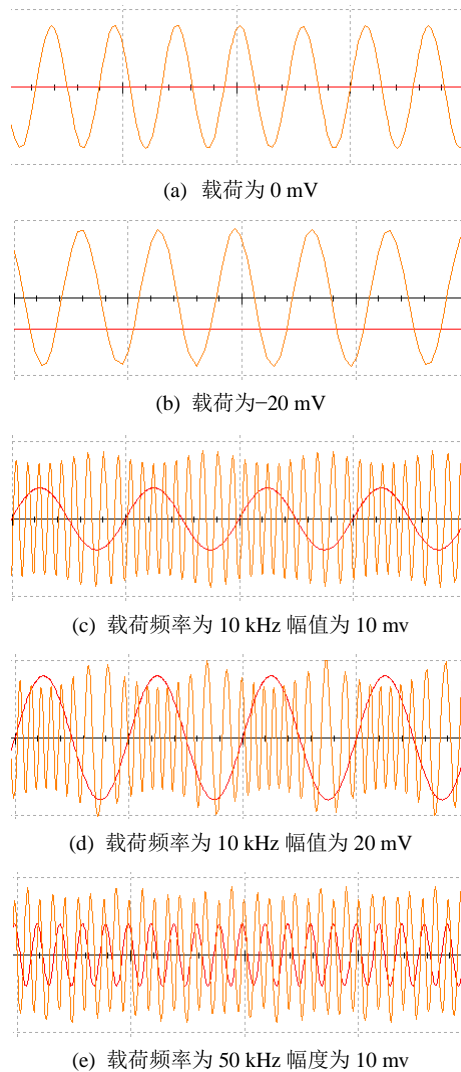


Figure 4. Circuit simulation results

图 4. 电路仿真结果

动时，谐振梁内部温度会发生变化，使得谐振梁内部的温度场为非均匀温度场，由于材料热胀冷缩的性质，会产生相应的应力、应变，阻碍谐振器的振动，造成能量损耗，可以将其称为热弹性阻尼[7] [8]。

目前很多传感器均采用真空封装，这样将会减小谐振器的空气阻尼损失，虽然绝对真空的封装是很难实现的，空气阻尼损耗也不可能完全消除，但是其影响在真空封装的作用下，已有很大的减少。热弹性阻尼及表面损耗阻尼均属于内部损耗，在此不多加讨论。因此，本部分主要讨论锚点损耗对谐振梁的影响。

① 等效电路方法分析

考虑在谐振梁的振动方程中加入阻尼项，则原振动方程的一般形式变为

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + c \cdot \frac{dP}{dt} + (A - B \times F(t)) \cdot P = 0 \quad (15)$$

其中 c 为阻尼系数，则原始的电路模型变为(如图 5)。

加入由比例放大电路构成的阻尼模块，从第一级积分输出引出到加法器的输入端，设第一级积分输

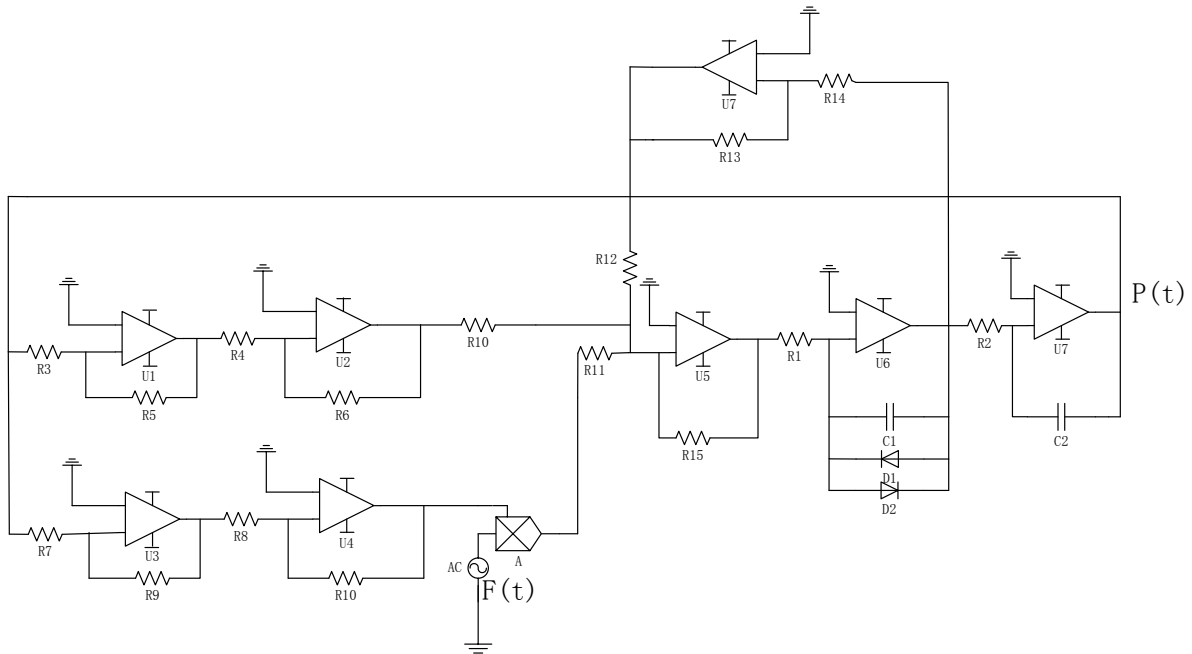


Figure 5. Equivalent circuit for the dynamic response of the output resonant beam with damping
图 5. 有阻尼谐振梁动态响应等效电路图

出为 $u_1(t)$ ，阻尼模块放大倍数为 k' ，根据输入输出关系列出如下方程：

$$\begin{cases} \frac{-1}{C_1 R_1} \int_0^t -((A - B \times F(t)) \cdot P + k' u_1(t)) dt = u_1(t) \\ \frac{-1}{C_2 R_2} \int_0^t u_1(t) dt = P \end{cases} \quad (16)$$

整理后可得到，

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + \frac{k'}{R_1 C_1} \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} (A - B \times F(t)) \cdot P = 0 \quad (17)$$

带入相关参数后对电路进行仿真，设定阻尼系数，此时可得到如下仿真结果，其中红色实线表示加入阻尼后的电路输出情况，黑色实线表示未加入阻尼的电路输出情况(图 6)：

仿真结果显示，在电路中加入阻尼后几乎不会对电路的谐振频率产生影响，但幅值因阻尼的加入有所改变。

② COMSOL 方法分析

实验中利用 *Comsol Multiphysics 5.0* 对谐振梁进行仿真分析，仿真模型中，设置了一个参数 k ，定义为阻尼系数，即在两侧的连接边界设置固定载荷，载荷 $T = kv$ ，该式为矢量式，即受到来自外部的应力(Pa)正比于边界处的速度(m/s)，那么如此定义的阻尼系数单位为[Pa*s/m]。仿真时，使用参数化扫描对 k 的值进行变化， k 分别取值为 0, 50, 100, 150, 200, 250, 300。其中，0 则代表自由边界。

图 7 和图 8 所示坐标图为以上 7 个 k 值下，谐振梁中心点的振幅，已归一化到最大值为 1。

仿真结果显示，在不同阻尼的影响下，所得谐振频率基本相同，随着两端阻尼系数的增加，谐振梁能量在锚点损耗，振幅逐渐减小，但谐振频率基本保持不变，由此可以得出结论，不同阻尼导致的边界条件下，阻尼的改变仅对谐振梁的幅值变化有影响，对谐振梁的谐振频率并不存在很大的影响。文献[9]

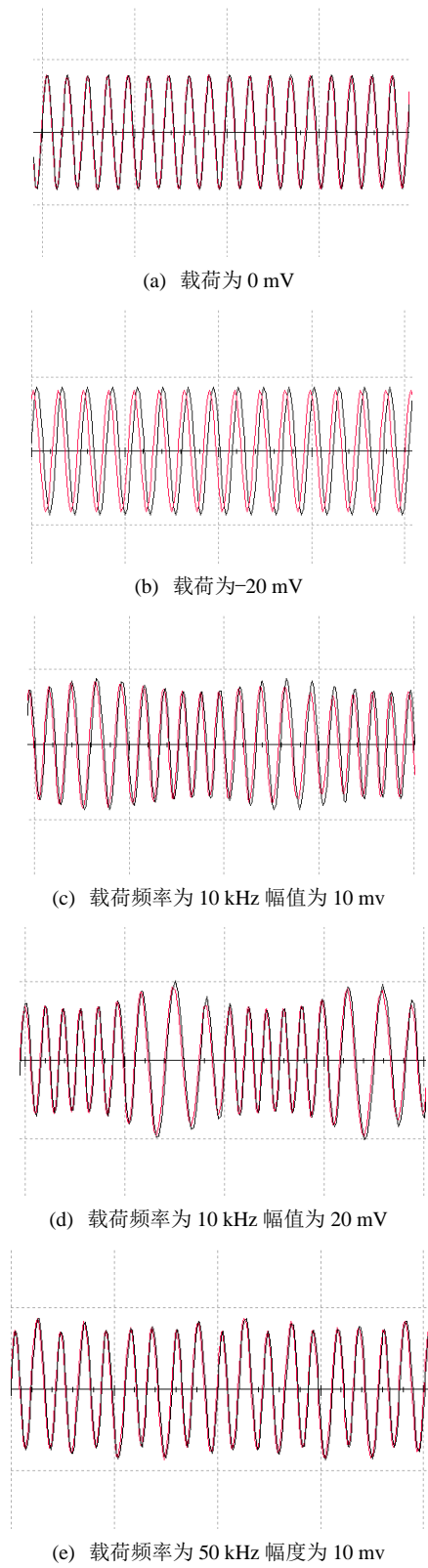


Figure 6. Circuit with damping simulation results

图 6. 有阻尼电路仿真结果

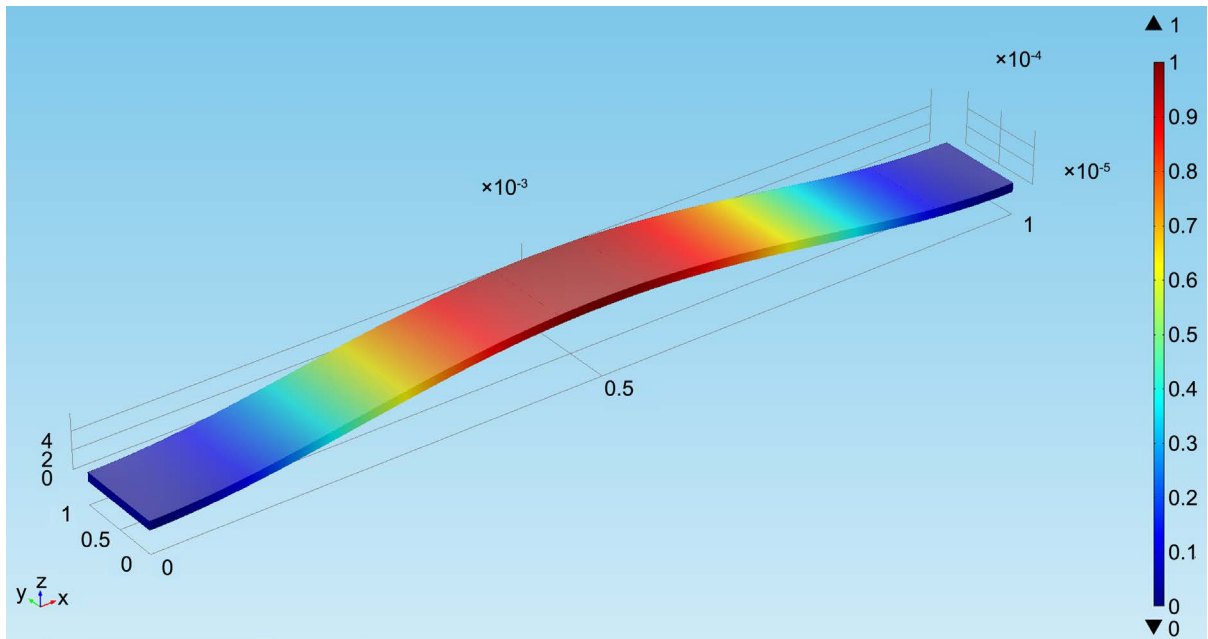


Figure 7. Simulation of resonant beam's amplitude by comsol

图 7. Comsol 对谐振梁仿真中心振幅变化

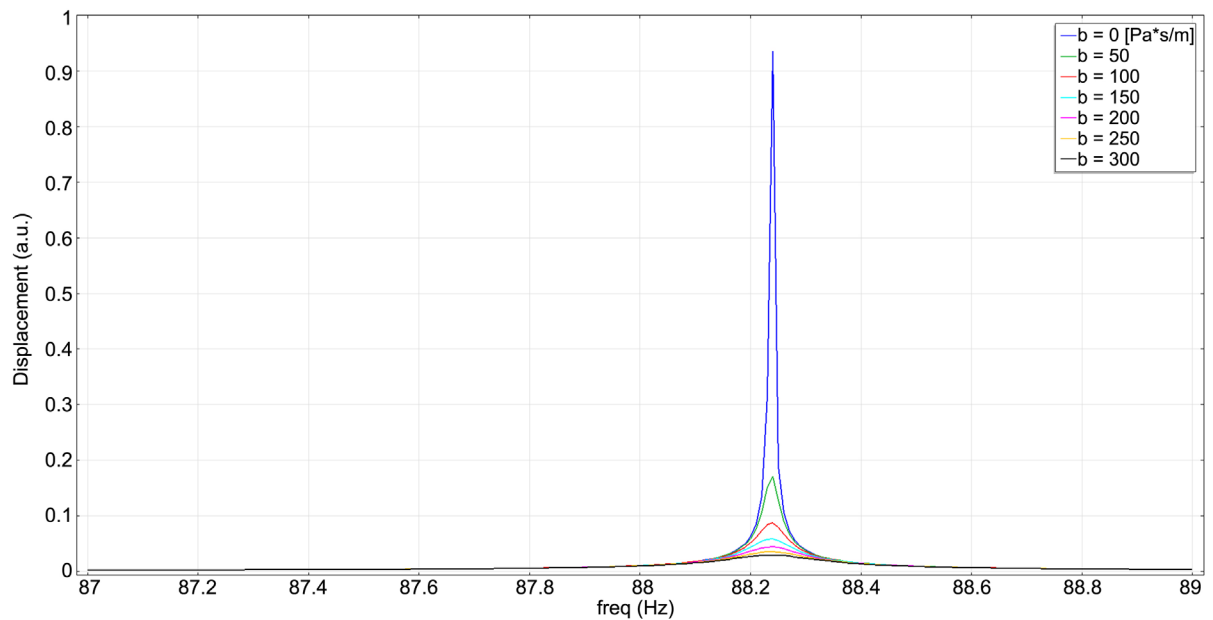


Figure 8. Simulation of resonant beam's frequency by comsol

图 8. Comsol 对谐振梁仿真频率变化

利用小参数摄动法所得出的结论中,带阻尼类 Mathieu 方程与不带阻尼类 Mathieu 方程仅在幅值项上有区别,对频率项没有影响,与实验结果相符合[9]。

5. 结论

载荷的输入对谐振式压力传感器敏感元件谐振梁的振动频率会产生影响。在等效电路实验中,输出信号会根据输入电压信号的频率与幅值改变而产生相应的变化,电路中的调制现象与机械系统的振动特

性相符合, 即当增加外载荷时, 机械系统振动频率变大, 当外载荷达到最大值时, 振动系统刚度最大, 谐振频率最高, 但会出现振幅下降的现象。此外, 通过在等效电路中加入阻尼项及利用 *Comsol* 仿真后得到, 阻尼仅影响谐振梁的振幅大小, 对频率没有影响, 因此对频率型谐振器来说, 在工作过程中其准确性不会受到阻尼影响。

此外, 本文中所设计的谐振梁模型及实验仿真都是在理想条件下进行, 实际谐振器振动过程中将面临不同类型的输入叠加及梁体构造的不同, 后期工作也将对此展开进一步的研究探讨。

致 谢

感谢总装基金以及“长江学者和创新团队发展计划资助(IRT_16R02)”的资助。

参考文献 (References)

- [1] 樊尚春. 传感器技术及应用[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2004.
- [2] 邢维巍, 张硕, 樊尚春. 动态轴向载荷下谐振梁振动响应分析[J]. 传感技术学报, 2016, 29(9): 1372-1375.
- [3] Piccardo, G. and Tubino, F. (2012) Dynamic Response of Euler-Bernoulli Beams to Resonant Harmonic Moving Loads. *Structural Engineering and Mechanics*, **5**, 681-704.
- [4] Piccardo, G., Ranzi, G. and Luongo, A. (2014) A Complete Dynamic Approach to the Generalized Beam Theory Cross-Section Analysis including Extension and Shear Modes. *Mathematics and Mechanics of Solids*, **19**, 900-924. <https://doi.org/10.1177/1081286513493107>
- [5] Mclachlan, N.W. (1964) Theory and Application of Mathieu Functions. Dover Publications, Inc.
- [6] Silvestre, N. and Camotim, D. (2013) Shear Deformable Generalized Beam Theory for the Analysis of Thin-Walled Composite Members. *Journal of Engineering Mechanics*, **139**, 1010-1024.
- [7] 周建发, 杨贵玉. 一种 MEMS 谐振梁的热弹阻尼分析[J]. 仪表技术与传感器, 2009(b11): 84-86.
- [8] 凌源. RF MEMS 自由梁谐振器特性研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 电子科技大学, 2014.
- [9] 续龙, 樊尚春, 曹乐, 等. 基于模拟电路方法的 Mathieu 方程特性研究[C]//中国仪器仪表学会. 全国敏感元件与传感器学术会议: 2014 年卷. 北京: 国防工业出版社, 2014.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2325-498X, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: ijm@hanspub.org