

The Surface Displacement Amplitudes of Rectangular Planar Region Including Circular Lining When Enduring Out-Plane Dynamic

Jingfu Nan^{1*}, Bin Liang², Fukun Xiao¹, Gang Liu¹

¹Heilongjiang University of Science and Technology, Harbin Heilongjiang

²Harbin Supervision and Inspection Institute of Mechanical and Electrical Special Equipment, Harbin Heilongjiang
Email: 13936665009@163.com

Received: Jun. 8th, 2018; accepted: Jun. 21st, 2018; published: Jun. 28th, 2018

Abstract

The dynamic response of rectangular planar infinite region including circular lining while bearing out-of-plane dynamic incidenting in an arbitrary angle is investigated. The out-plane wave field acting on the rectangular planar infinite region is expanded into the out-plane wave field acting on semi-infinite space region, and the field of stress and displacement is deduced to solve the problems of the model, the solution of which is a set of infinite algebraic equations. The results of numerical example show that, the surface displacement amplitude of the model is affected by the incident wave frequency, Angle of the incident wave and parameters such as the location of the lining and the thickness of the lining.

Keywords

Out-of-Plane Dynamic, Rectangular Planar Infinite Region, Circular Lining, Dynamic Response, Surface Displacement Amplitudes

含圆形衬砌的直角平面区域受出平面动力时地表位移幅值

南景富^{1*}, 梁滨², 肖福坤¹, 刘刚¹

¹黑龙江科技大学, 黑龙江 哈尔滨

²哈尔滨市机电类特种设备监督检验研究院, 黑龙江 哈尔滨

*第一作者。

Email: 13936665009@163.com

收稿日期: 2018年6月8日; 录用日期: 2018年6月21日; 发布日期: 2018年6月28日

摘要

本文研究了含圆形衬砌的直角平面无限区域对任意角度入射的出平面的动力响应问题。利用数学物理方法, 将作用于直角平面无限区域内的出平面波场扩展成半无限空间区域内的出平面波场, 借助于边界条件推导出问题模型的应力场和位移场, 其解为一组无穷代数方程组。算例结果表明, 模型的地表位移幅值受入射波频率、入射波角度、衬砌的位置和衬砌的厚度比等参数影响。

关键词

出平面动力, 直角平面无限区域, 圆形衬砌, 动力响应, 地表位移幅值

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Open Access

1. 引言

人们对由地振动动力引起地表地形变化的研究, 大部分以地表凹陷地形和凸起地形两种形式为主。文献[1] [2] [3] [4] [5]应用 Green 函数法和复变函数法求解了出平面动力波动对地表任意形凹陷地形的动力响应。文献[6] [7] [8] [9] [10]采用波函数展开法研究了地表含半圆形和任意圆弧形凸起对出平面波动的动力响应问题。文献[11] [12] [13] [14] [15]利用 Fourier-Bessel 级数展开法求解出圆弧形层状凹陷地形对出平面动力响应二维问题的解析解; 利用波函数展开法求解出地表含多个沉积层凹陷地形对出平面动力波响应二维问题的解析解。文章利用数学物理方法, 将作用于直角平面无限区域内的出平面波场扩展成半无限空间区域内的出平面波场, 借助于边界条件推导出问题模型的应力场和位移场, 不仅为研究由地振动动力引起地表地形变化问题提供了一个新模型, 对研究弹性介质缺陷问题成果在矿产石油勘探、定量无损检测以及雷达、水下声纳和爆破等许多工程技术的应用和发展具有重要意义。

2. 力学模型

图 1 为所研究问题内含的圆形衬砌平面直角域力学模型, 两域内介质符合各向同性、均匀、连续假设, 直角域内介质参数质量密度用 ρ 表示, 切变模量用 μ 表示, 衬砌内介质参数质量密度用 ρ_1 表示, 切变模量用 μ_1 表示, 所建立的二维直角坐标系用 xoy 表示。出平面动力波在平面内振动引起区域内介质位移的 $W(x, y, t)$ 的方向和二维平面 xoy 垂直。

在稳态情况下, 在复平面 (z, \bar{z}) 内本问题的 Helmholtz 方程:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4} k^2 W = 0 \quad (1)$$

其中: $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$, $k = \omega/c_s$ 为出平面波的波数, ω 为入射波圆频率, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ 为介质的出平面波的波速。

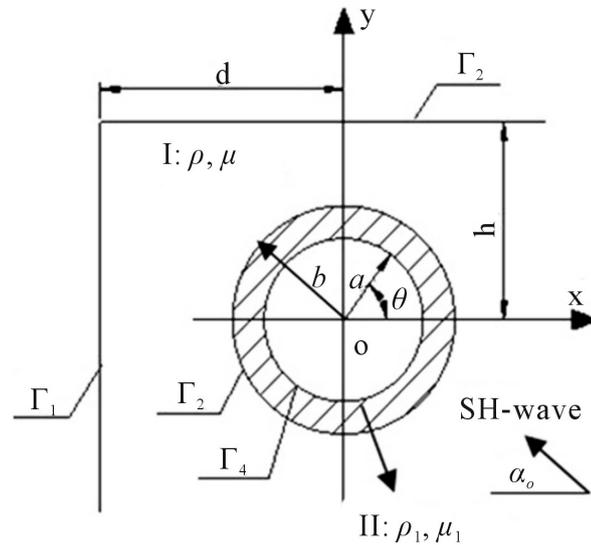


Figure 1. The model of rectangular planar region including circular lining

图 1. 内含的圆形衬砌平面直角域力学模型

直角坐标应力表达式为:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right) \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right)\end{aligned}\quad (2)$$

极坐标应力表达式为:

$$\begin{aligned}\tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right) \\ \tau_{\theta z} &= i\mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right)\end{aligned}\quad (3)$$

3. 振动引起的位移函数

3.1. 直角域内的入射波位移函数和反射波位移函数

在复平面 \$(z_h, \bar{z}_h)\$, 其中 \$z_h = z - ih\$, 直角域内的入射波位移函数 \$W^{(i)}\$ 表示为:

$$W^{(i)} = W_0 \exp \left\{ \frac{ik}{2} \left[z_h e^{-i(\pi-\alpha_0)} + \bar{z}_h e^{i(\pi-\alpha_0)} \right] \right\} \quad (4)$$

利用镜像法, 将该直角平面区域镜像为半无限空间, 如图 2 所示, 并以边界 \$\Gamma_1\$ 为对称界线加入与入射波位移函数 \$W^{(i)}\$ 对称的位移函数 \$W^{(r)}\$。

由此可以得到在半无限空间中入射波位移函数 \$W^{(i,e)}\$ 和反射波位移函数 \$W^{(r,e)}\$:

$$W^{(i,e)} = W_0 \left\{ \exp \left[\frac{ik}{2} (z_h e^{-i\beta_0} + \bar{z}_h e^{i\beta_0}) \right] + \exp \left[\frac{ik}{2} (z'_h e^{-i\alpha_0} + \bar{z}'_h e^{i\alpha_0}) \right] \right\} \quad (5)$$

$$W^{(r,e)} = W_0 \left\{ \exp \left[\frac{ik}{2} (z_h e^{i\beta_0} + \bar{z}_h e^{-i\beta_0}) \right] + \exp \left[\frac{ik}{2} (z'_h e^{i\alpha_0} + \bar{z}'_h e^{-i\alpha_0}) \right] \right\} \quad (6)$$

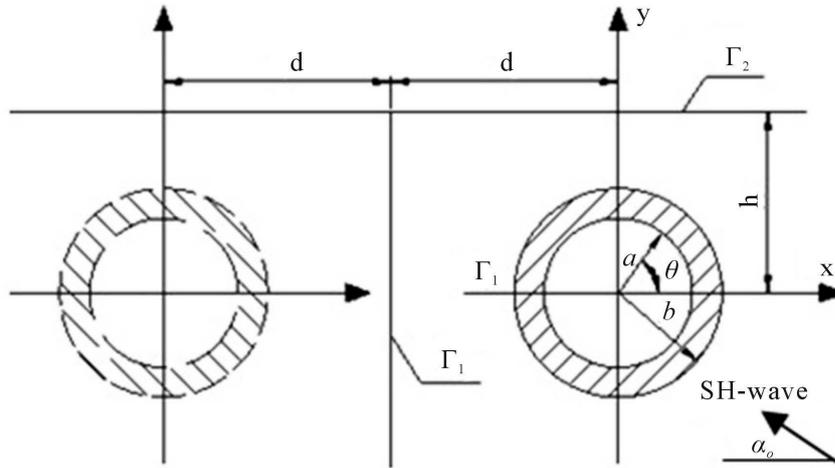


Figure 2. The mirror model
图 2. 镜像模型

式中: $\beta_0 = \pi - \alpha_0$, $z'_h = z_h + 2d$ 。

3.2. 直角域内的散射波位移函数

在复平面 (z, \bar{z}) 上, 方程(1)的解析解为:

$$W^{(s)}(z, \bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(k|z|) \cdot [z/|z|]^n \tag{7}$$

式中, $H_n^{(1)}(*)$ 为 n 阶第一类 Hankel 函数。

在该问题中, 利用移动坐标方法及叠加原理将该问题构造为全空间的散射波位移函数为:

$$W^{(s,e)}(z, \bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{j=1}^4 S_n^{(j)} \tag{8}$$

其中:

$$\begin{cases} S_n^{(1)} = H_n^{(1)}(k|z|) [z/|z|]^n \\ S_n^{(2)} = H_n^{(1)}(k|z-2ih|) [(z-2ih)/|z-2ih|]^n \\ S_n^{(3)} = (-1)^n H_n^{(1)}(k|z'|) [(z')/|z'|]^n \\ S_n^{(4)} = (-1)^n H_n^{(1)}(k|z'-2ih|) [(z'-2ih)/|z'-2ih|]^n \end{cases}$$

式中: $z' = z + 2d$, A_n 为待定的数, 可通过边界条件来确定。

3.3. 衬砌内的散射波位移函数

圆形衬砌外边界圆和内边界圆所激发的散射波位移函数记为 $W^{(s)}|_{r=b}$ 和 $W^{(s)}|_{r=a}$ 。

在复平面 (z, \bar{z}) 上, 位移函数方程分别为:

$$W^{(s)}|_{r=b} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(k_2|z|) \cdot [z/|z|]^n \tag{9}$$

$$W^{(s)}|_{r=a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(k_2|z|) \cdot [z/|z|]^n \tag{10}$$

3.4. 内含的圆形衬砌平面直角域模型的边界条件

总波场能满足直角域自由表面上应力自由边界条件。控制方程(1)的边界条件可写为:

$$\begin{cases} \Gamma_3: \tau_{rz}^{(i,e)} + \tau_{rz}^{(r,e)} + \tau_{rz}^{(s)} = \tau_{rz}^{(s)} \Big|_{r=b} + \tau_{rz}^{(s)} \Big|_{r=a} \\ \quad W^{(i,e)} + W^{(r,e)} + W^{(s)} = W^{(s)} \Big|_{r=b} + W^{(s)} \Big|_{r=a} W_{rz}^1 \\ \Gamma_4: \tau_{rz}^{(s)} \Big|_{r=b} + \tau_{rz}^{(s)} \Big|_{r=a} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

表示在公共边界应力和位移连续, 自由表面应力为零。

结合式(1)~(10):

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi_{1n}^{(1)} + B_n \xi_{2n}^{(1)} + C_n \xi_{3n}^{(1)} = \eta_1 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi_{1n}^{(2)} + B_n \xi_{2n}^{(2)} + C_n \xi_{3n}^{(2)} = \eta_2 \quad (n=0, \pm 1, \dots) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \xi_{2n}^{(3)} + C_n \xi_{3n}^{(3)} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{式中: } \begin{cases} \xi_{1n}^{(1)} = \frac{k_1 \mu}{2} \left\{ \sum_{j=1}^4 \phi_n^{(j)} \cdot e^{i\theta} + \sum_{j=1}^4 \phi_n^{(j)} \cdot e^{-i\theta} \right\} \\ \xi_{2n}^{(1)} = \xi_{2n}^{(3)} = \frac{k_1 \mu}{2} \left\{ H_{n-1}^{(2)}(k_1 |z|) \cdot \left[\frac{z}{|z|} \right]^{n-1} e^{i\theta} - H_{n+1}^{(2)}(k_1 |z|) \cdot \left[\frac{z}{|z|} \right]^{n+1} e^{-i\theta} \right\} \\ \xi_{3n}^{(1)} = \xi_{3n}^{(3)} = \frac{k_1 \mu}{2} \left\{ H_{n-1}^{(1)}(k_1 |z|) \cdot \left[\frac{z}{|z|} \right]^{n-1} e^{i\theta} - H_{n+1}^{(1)}(k_1 |z|) \cdot \left[\frac{z}{|z|} \right]^{n+1} e^{-i\theta} \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_{1n}^{(2)} = \sum_{j=1}^4 S_n^{(j)} \\ \xi_{2n}^{(2)} = H_n^{(2)}(k_1 |z|) \cdot [z/|z|]^n \\ \xi_{3n}^{(2)} = H_n^{(1)}(k_1 |z|) \cdot [z/|z|]^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta_1 = -i\tau_0 \cos(\theta - \beta_0) \exp \left\{ \frac{ik}{2} (z_h e^{-i\beta_0} + z_h e^{i\beta_0}) \right\} - i\tau_0 \cos(\theta - \alpha_0) \exp \left\{ \frac{ik}{2} (z'_h e^{-i\alpha_0} + \bar{z}'_h e^{i\alpha_0}) \right\} \\ \quad - i\tau_0 \cos(\theta + \beta_0) \exp \left\{ \frac{ik}{2} (z_h e^{i\beta_0} + z_h e^{-i\beta_0}) \right\} - i\tau_0 \cos(\theta + \alpha_0) \exp \left\{ \frac{ik}{2} (z'_h e^{i\alpha_0} + \bar{z}'_h e^{-i\alpha_0}) \right\} \\ \eta_2 = w_0 \left\{ \exp \left[\frac{ik}{2} (z_h e^{-i\beta_0} + \bar{z}_h e^{i\beta_0}) \right] + \exp \left[\frac{ik}{2} (z'_h e^{-i\alpha_0} + \bar{z}'_h e^{i\alpha_0}) \right] \right\} \\ \quad + w_0 \left\{ \exp \left[\frac{ik}{2} [z_h e^{i\beta_0} + \bar{z}_h e^{-i\beta_0}] \right] + \exp \left[\frac{ik}{2} [z'_h e^{i\alpha_0} + \bar{z}'_h e^{-i\alpha_0}] \right] \right\} \end{cases}$$

其中: A_n, B_n, C_n 为待定系数, 可通过计算简化为一组无穷代数方程组。

4. 地表位移幅值

利用叠加法, 问题模型空间区域内的总波场的位移函数为:

$$W^{(t)}(z, \bar{z}) = W^{(i,e)}(z, \bar{z}) + W^{(r,e)}(z, \bar{z}) + W^{(s)}(z, \bar{z}) \tag{16}$$

如果入射的出平面波的位移幅值为 W_0 ， W_d 代表水平地表的无量纲位移幅值，计算式为：

$$W_d = |W^{(t)} / W_0| \tag{17}$$

衬砌对地表动位移分布的影响用系数 d^* 表示，计算式为：

$$d^*(x_h) = |W^{(t)}(x_h) / (W^{(i,e)} + W^{(r,e)})| - 1 \tag{18}$$

式中： x_h 为地表的水平方向坐标。

$d^*(x_h) > 0$ 说明衬砌对地表位移有增强作用； $d^*(x_h) < 0$ 说明衬砌的对地表位移有减弱作用， $d^*(x_h) = 0$ 说明衬砌对地表位移没有影响。

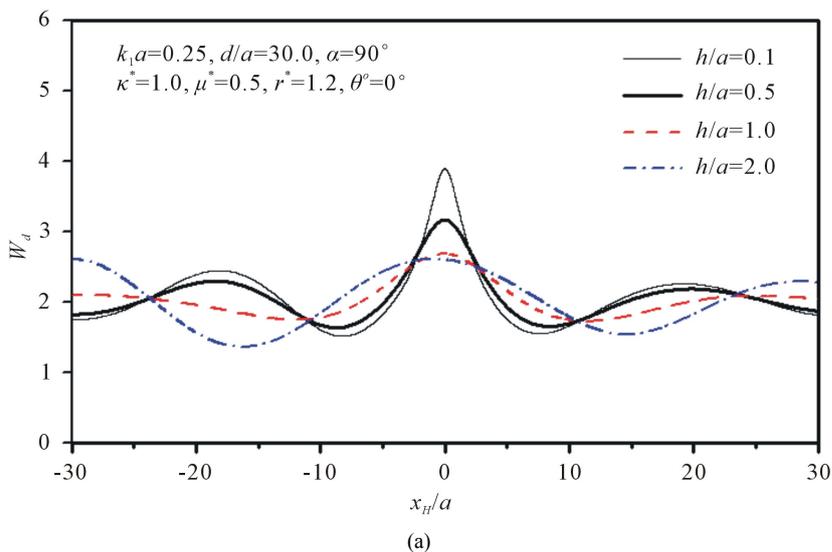
5. 算例与结果分析

图 3 给出了图 1 所示问题模型在衬砌内外半径比值为 30.0，出平面动力波动入射角度为 90° 条件下，自由表面 Γ_2 水平地表无量纲位移幅值 W_d 的变化情况。

图 3(a) 给出了入射波波数 $ka = 0.25$ 时，圆形衬砌距离地表不同位置对水平地表位移幅值 W_d 的影响情况。由图中可看见，地表位移幅值以衬砌中心的 Y 轴为对称轴，向两侧振荡衰减变化。随着衬砌的埋深增加，地表位移幅值的振荡幅度变小。衬砌正上方处地表位移幅值 W_d 达到最大值。图中的地表位移幅值 W_d 最大值不超过 4，说明当入射波波数 $ka = 0.25$ ，出平面动力波动入射角度为 90° ，即低频垂直入射时，衬砌对水平地表位移幅值 W_d 的影响不大。

图 3(b) 为衬砌中心到地表的垂直距离与衬砌内半径的比值 $h/a = 1.5$ (即衬砌埋深不变)，出平面波以不同波数垂直入射时，自由表面 Γ_2 水平地表无量纲位移幅值 W_d 的变化情况。图中给出了波数 ka 分别为 0.1、0.5、1.0 和 2.0 四种情况时地表的幅值 W_d 的变化情况，随着入射波数 ka 的增加，地表位移振荡逐渐加剧，同样以衬砌中心的 Y 轴为对称轴，向两侧振荡衰减变化。当 $ka = 1.0$ 和 $ka = 2.0$ 时，衬砌中心上方地表位移幅值 W_d 最大值达到了 11。说明出平面高频垂直入射时对地表动位移的影响明显。

图 3(c) 给出了波数不同且垂直入射时， $x_H = 12.0$ 位置的水平地表处无量纲位移幅值 W_d 随衬砌埋深变化的情况。随着衬砌埋深的增加，衬砌对位移幅值 W_d 呈脉动较小趋势。



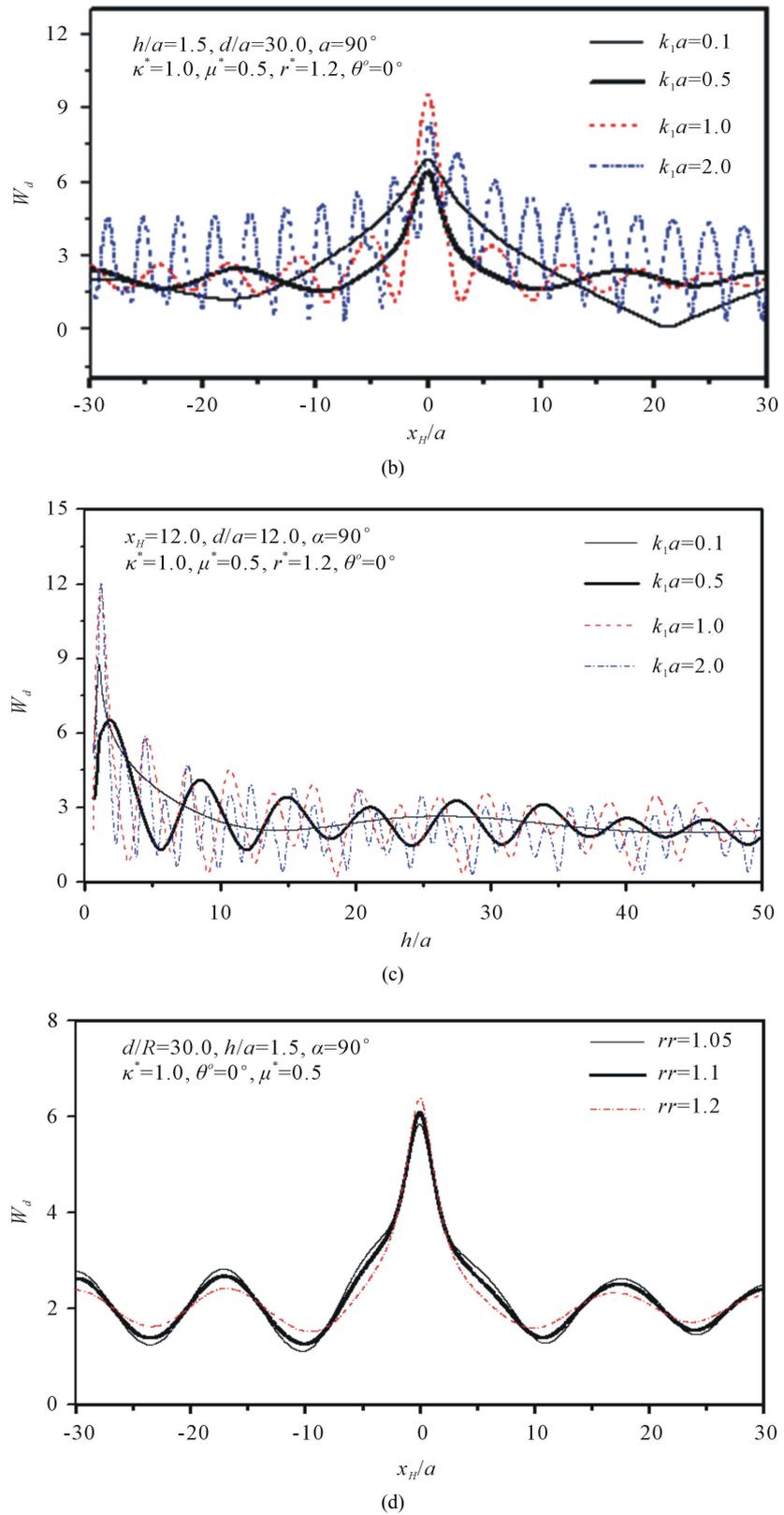


Figure 3. The change distribution of surface displacement amplitudes “ W_d ”
图 3. 地表面幅值 W_d 的变化分布

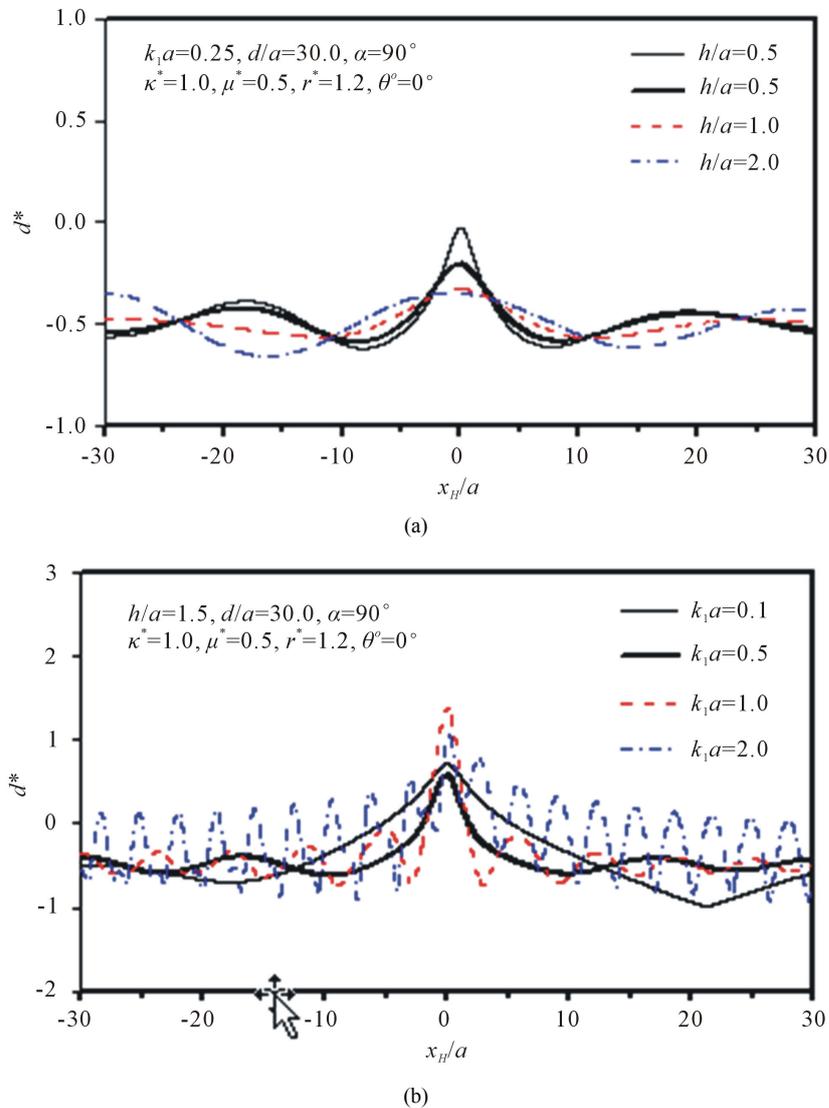


Figure 4. The influence coefficient of surface displacement
图 4. 地表位移影响系数

图 3(d)给出了波数不同且垂直入射时，水平地表位移幅值 W_d 随衬砌厚度变化的情况。由图可见，衬砌厚度的变化对位移幅值 W_d 的变化影响不明显。

图 4(a)给出了入射波波数 ka 为 0.25，不同埋深的圆形衬砌存在情况下，垂直入射时，衬砌对地表动位移分布的影响系数 d^* 的随圆形衬砌埋深变化分布规律。由图可见，在低频入射波且衬砌的埋深较大时，衬砌对地表的动位移有减弱作用。

图 4(b)给出了衬砌埋深 $h/a = 1.5$ ，出平面垂直入射时，衬砌对地表动位移分布的影响系数 d^* 随入射波波数变化的分布规律。图中看见， $ka = 1.0$ 和 $ka = 2.0$ 时， d^* 增强了 1.7 倍； $ka = 0.1$ 时， d^* 减弱了将近 50%。

6. 结论

数值结果表明，在本问题模型中，衬砌的埋深，入射波波数对地表位移幅值有较大的影响。浅埋衬砌时，在高频入射时，衬砌与直角平面区域自由表面之间存在强烈的相互作用，地振动将明显加剧，且在衬砌中心的正上方幅度最大，随衬砌埋深的增加，其影响逐渐减弱。所以工程上必须对直角平面区域

自由表面及地下浅埋衬砌的存在予以充分重视。对于本文数值结果的可靠程度，有待于实验数据加以验证，篇幅有限，不再加以论述。

基金项目

黑龙江省自然科学基金项目(A201419)，国家自然科学基金项目(51774121)。

参考文献

- [1] Liu D.K. and Han, F. (1990) Scattering of Plane SH-Waves by Cylindrical Canyon of Arbitrary Shape in Anisotropic Media. *Acta Mechanica Sinica*, **6**, 256-260. <https://doi.org/10.1007/BF02487648>
- [2] Liu, D.K. and Han, F. (1991) Scattering of Plane SH-Waves by a Cylindrical Canyon of Arbitrary Shape. *International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **10**, 249-255. [https://doi.org/10.1016/0267-7261\(91\)90018-U](https://doi.org/10.1016/0267-7261(91)90018-U)
- [3] 刘殿魁, 许贻燕. 各向异性介质中 SH 波与多个半圆形凹陷地形的相互作用[J]. 力学学报, 1993, 25(1): 93-102.
- [4] 崔志刚, 邹永超, 刘殿魁. SH 波对圆弧形凸起地形的散射[J]. 地震工程与工程振动, 1998, 18(1): 140-146.
- [5] 刘殿魁, 曹新荣, 崔志刚. 多个半圆形凸起地形对平面 SH 波散射[J]. 固体力学学报(特刊), 1998: 178-185.
- [6] 袁晓铭, 廖振鹏. 任意圆弧形凸起地形对平面 SH 波的散射[J]. 地震与工程振动, 1996, 16(2): 1-13.
- [7] 袁晓铭, 廖振鹏. 圆弧形凹陷地形对平面 SH 波散射问题的级数解答[J]. 地震与工程振动, 1993, 13(2): 1-11.
- [8] 袁晓铭, 廖振鹏. 圆弧形沉积盆地对平面 SH 波的散射[J]. 华南地震, 1995, 15(2): 1-8.
- [9] 袁晓铭, 廖振鹏. 自由表面圆弧形不规则边界对 SH 波的散射[J]. 科学通报, 1996, 42(3): 262-264.
- [10] Yuan, X.M. and Men, F.L. (1992) Scattering of Plane SH-Waves by a Semi-Cylindrical Hill. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **21**, 1091-1098. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290211205>
- [11] 梁建文, 张郁山, 顾晓鲁, 等. 圆弧形层状凹陷地形对平面 SH 波的散射[J]. 振动工程学报, 2003, 16(2): 158-165.
- [12] 梁建文, 罗昊, Lee, V.W. 任意圆弧形凸起地形中隧洞对入射平面 SH 波的影响[J]. 地震学报, 2004, 26(5): 495-508.
- [13] 杨彩红, 梁建文, 张郁山. 多层沉积凹陷地形对平面 SH 波散射问题的解析解[J]. 岩土力学, 2006, 27(12): 2191-2196.
- [14] 梁建文, 巴振宁. 弹性层状半空间中凸起地形对入射平面 SH 波的放大作用[J]. 地震工程与工程振动, 2008, 28(1): 1-10.
- [15] 梁建文, 巴振宁. 弹性层状半空间中沉积谷地对入射平面 SH 波的放大作用[J]. 地震工程与工程振动, 2007, 27(3): 1-9.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2325-498X, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: ijm@hanspub.org