Interdisciplinary Science Letters 交叉科学快报, 2019, 3(4), 59-64
Published Online December 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/isl
https://doi.org/10.12677/isl.2019.34010

Hans汉斯

The New Theory Derived from the Number Theory Solves the Perplexity in the Field of Measurement for a Hundred Years and Finds the Shortcomings in the Teaching Materials

Youyi Huang

Guangdong Tengye Technology Co., Ltd., Shantou Guangdong
Email: 1214592398@qq.com

Received: Nov. 2nd, 2019; accepted: Nov. 20th, 2019; published: Nov. 27th, 2019

Abstract

Vernier universal angle ruler has a history of more than a hundred years, and its engraving principle has not yet been recognized as a theoretical basis. A small number of people are still questionable whether this principle holds forever. Because the principle of the vernier universal angle ruler is not recognized, there are still problems in the licensed patent. And the reasons are analyzed in this paper. The new theory in this paper proves that the principle of vernier caliper and the principle of vernier universal angle ruler are special cases of the new theory. The new theory finds that the calculation formula of step angle of stepper motor in teaching materials is insufficient, and a new formula is given.

Keywords

Adjacent Theorem, Meterage, Vernier Principle, Angle

源自数论的新理论解决计量领域百年困惑发现教材中的不足

黄友谊

广东腾业科技有限公司，广东 汕头
Email: 1214592398@qq.com

收稿日期：2019年11月2日；录用日期：2019年11月20日；发布日期：2019年11月27日

文章引用: 黄友谊. 源自数论的新理论解决计量领域百年困惑发现教材中的不足[J]. 交叉科学快报, 2019, 3(4): 59-64.
DOI: 10.12677/isl.2019.34010

摘　要

游标万能角度尺出现已经有一百多年的历史，其刻线原理还没有公认的理论依据，此原理是否恒成立少数人对此还有疑问，在已授权的专利中，由于不认可游标万能角度尺的原理，还存在问题，这里分析了其中的原因。这里的新理论证明了游标卡尺的原理、游标万能角度尺的原理都是新理论的一种特例，新理论还发现了教材中步进电机的步距角计算公式存在不足，并给出了新公式。

关键词

相邻定理，计量，游标原理，角度

1. 引言

法国数学家皮尔·维尼尔于1631年给出游标卡尺的结构和原理，但此原理至今没有公认的证明，也没有数学定理能解释此原理[1] [2]。游标万能角度尺的原理就是源于游标卡尺的原理，由于游标万能角度尺上的每格弧长对应的圆心角，可以是无数角度值中的任意一个，其原理是否在任意条件下都成立也没有公认的证明，这些都是百年公知的常识，不同人有不同的观点也很正常。专利中的问题在当时没有理论能说明其存在错误[3]，这里不仅给出了理论依据和解决方案，还从位置不同而读数相同来说明其存在错误。步进电机出现已接近百年历史，其步距角计算公式还是一个经验公式，如果研发步距角是0.1度的电机，应用现在的步距角计算公式[4] [5]，算出转子齿数和相数，有很多不同的方案，但是多数方案实际验证步距角变大了，这就给新产品的研发造成困难。新理论[6]给出的步距角计算公式就解决了这种不足，根据新步距角计算公式，还能研发出多个定子磁极线圈，由一相控制的步进电机，现在步进电机一般一相控制两个定子磁极线圈[4] [5]。根据新理论，绝对值编码器、千分尺、百分表等都有了测量精度更高的新原理，有指针的所有仪器仪表，只要刻度线在圆周上等距离排列，都能应用新理论使其精度提高，新理论与现有电子技术相结合，还能研发出多种电子数显的测量工具。通过本文希望更多的人知道游标卡尺的原理、游标万能角度尺的原理已经有理论依据了，都是正确的，促使大家深入研究，统一认识，在今后的应用中没有争议不出错误，让新理论有更广泛的应用。

2. 理论探讨

相邻定理：a 与 b 是正实数，且 $a > b$，在数轴的上方用红色画出 a 的整数倍的点，在数轴的下方用黑色画出 b 的整数倍的点，若 $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$，且 m 与 n 是互素的正整数，则有：

1) 相邻重合点之间的距离都是 na 或 mb。

2) 数轴上的点以相邻重合点的中垂线相对称，以重合点相对称。

3) 相邻两点的距离分别是 $\frac{b}{n},\frac{2b}{n},\frac{3b}{n},\cdots,\frac{nb}{n}$ 或 $\frac{a}{m},\frac{2a}{m},\frac{3a}{m},\cdots,\frac{na}{m}$，在相邻重合点之间每种距离仅有两个，且以中垂线相对称。

证明：

1) 数轴上的重合点可以用不定方程 $ax = by$ 表示，由方程的整数解的数量可知重合点有无数个，由 $tna = tmb$ ($t \in Z$)，易知在数轴上满足条件 tna 的点都是重合点，假设 tna 与$(t + 1)na$ 之间还有重合点 $tna + xa$ ($x \in Z^+$)，则有 $\frac{tna + xa}{b}$ 必是整数，$tna + xa < (t+1)na \Rightarrow x < n$ 。m 和 n 没有相同素因子，由 $x < n$，可知 n 中至少有一个素因子在 x 中不存在，因此 $\frac{mx}{n}$ 不是整数，$\frac{tna + xa}{b} = tm + \frac{mx}{n}$ 不是整数，即 $tna + xa$ 不是重合点，tna 与$(t + 1)na$ 是相邻重合点，之间的距离是 $(t+1)na - tna = na$ 。

2) 证略。

3) 假设数轴上的黑点可以左右整体移动，任意取一个红点和一个黑点，使其成为重合点，并把此重合点定为零点，同样可证明结论 1)和结论 2)是成立的，因此左右整体移动黑点，只要出现重合点就是无数个，所有出现重合点的状态，相邻重合点之间的点，分布状况永远相同。此结论是理解证明过程的关键之一。令相邻两点的最小距离是 y，由结论 2)可知，黑点向左或向右移动 y 都会出现重合点，进一步可推知，黑点任意移动多少个 y，都会出现重合点，黑点整体移动是 b 时(b 是相邻两点的最大距离)也会出现重合点，因此 b 是 y 的整数倍，下面就讨论黑点每次只移动 y，向同一方向移动多少次总距离是 b。

任意取两个相邻的重合点，并在两个红点处做上标记，其中不是重合点的红点有 $n - 1$ 个。黑点每次移动 y，在有标记的两个红点之间只会出现一个重合点，如果出现两个以上的重合点，相邻重合点的距离就有小于 na，如果不出现重合点，相邻重合点的距离就有大于 na，这与结论 1)相矛盾。不是重合点的任意一个红点，与两侧黑点的距离之和都是 b，因此黑点定向移动总距离是 b 的过程中，每个红点仅有一次成为重合点，如果有一个红点没有成为重合点，一定出现过相邻两点的最小距离不是 y 的情况，这与相邻重合点之间的点，分布状况永远相同相矛盾。由以上可知黑点每次只移动 y，向同一方向移动 n 次(不是重合点的红点数加一)总距离是 b，即 $ny = b \Rightarrow y = \frac{b}{n}$，因此相邻两点的距离分别是 $\frac{b}{n},\frac{2b}{n},\frac{3b}{n},\cdots,\frac{nb}{n}$，在相邻重合点之间，相邻两点的距离总数是 $2(n-1)+2 = 2n$，由结论 2)可知每种距离仅有两个，且对称分布。

推论 1)：两个相等的同心圆，从一点起把一圆周 c 等分，另一圆周 k 等分，将一圆任意转动，若 $\gcd(k,c) = d$，则每转动 $\frac{360d}{kc}$ 度，就有 d 个重合点等分两圆(起点视为重合点)。

证明：在数轴上取长为 nad 的线段组成一个圆，圆周上红点有 nd 个，黑点有 $\frac{nad}{b} = \frac{mbd}{b} = md$ 个，重合点有 d 个，令 $k = md$，$c = nd$，则有 $\gcd(k,c) = d$，因此这个圆可视为满足推论要求的两个同心圆，由相邻定理的证明过程可知，把一圆任意转动，每转动 $\frac{b}{n}$ 个弧长，就会出现 d 个重合点均分圆周，$\frac{b}{n}$ 个弧长所对应的圆心角是 $\frac{b}{n}\times\frac{360}{mbd} = \frac{360d}{nd \times md} = \frac{360d}{kc}$ 。

推论 2)：A，B 两个相等的同心圆，从同一点起，在 A 圆周上画出连续相等的 m 格，把 B 圆周 k 等分，A 圆周上的 m 格与 B 圆上的 n 格圆心角相等，将一圆向同一方向转动，若 $\gcd(m,n) = 1$，则每转动 $\frac{360}{km}$ 度，就会出现一个或两个重合点，每转动 m 次才会出现两个重合点，且是 A 圆的首尾两点(起点视为重合点)。

证明：在相邻定理的数轴上任意取两个相邻的重合点，并做标记，其中红点有 n 格，黑点有 m 格。此时向同一方向整体移动黑点或红点，每次只移动 $\frac{a}{m}$，有 $a \div \frac{a}{m} = m$ 可知移动 m 次有标记的首尾两个黑

点再一次成为重合点，在此过程中每一次移动$\frac{a}{m}$的距离，由相邻定理证明过程可知，在首尾两个黑点之间只会出现一个重合点。任意取线段，长度大于或等于有标记的相邻重合点，即线段满足条件$ka = k_1 b \ge na = mb$，k与k_1是正实数，其中包括做标记的两个重合点，把此线段组成两个相等的同心圆，有黑点的圆是A圆，A圆视为只有连续的m格，有红点的圆是B圆，B圆周有k个a，B圆的n格与A圆的m格圆心角相等。向同一方向转动A圆或B圆，每次只转动$\frac{a}{m}$弧长，同理有上述特征，$\frac{a}{m}$弧长对应的圆心角是$\frac{360}{ka} \times \frac{a}{m} = \frac{360}{km}$度。

当$m < n$，$\gcd(m,n) = 1$时，也可证明推论2)成立。

注释：当a和b是正整数，且$\gcd(a,b) = d$，则有$a = md$，$b = nd$，此时相邻定理的结论3)是：相邻两点的距离分别是$d, 2d, 3d, \cdots, \frac{b}{d}d$，这与文献[7]的结论是一致的，由此可知数轴上任意红点与黑点的距离是$ax - by = kd$ （x，y，k是整数)。文献[8] [9]中定理：a与b的最大公约数是d，存在整数x与y，使得$ax - by = d$。此定理的证明过程中明确指出d是$ax - by$的最小正整数，此定理相当于相邻定理的一个推论，由此说明相邻定理是正确的。求$ax - by = d$的整数解在RSA密码系统中有重要应用[10]，由相邻定理可知最小一组整数解的范围是$|x| \le \frac{n}{2} = \frac{b}{2d}$，$|y| \le \frac{m}{2} = \frac{a}{2d}$，$ax$除以$b$的余数等于相邻两点的距离，只要算出最小一组解就能给出无数解的通式，文献[10]还没有这方面的应用。

相邻两点的距离是指红点与黑点的相邻距离，b是相邻两点的最大距离，当$a - b > \frac{b}{n}$时，在相邻重合点之间b有多个，但能满足要求的b仅有两个。当k不是正整数时，B圆周没有被等分，但是推论2)还是成立的，因实用性差，在文献[6]中未说明。由$a - b = \frac{b}{n}$可知$m - n = 1$，当m除以n的余数是1或$n-1$时，此时数轴上相邻两点的距离从小到大顺序排列，可以解释游标卡尺的原理。当$m - n = 1$时，推论2)的计算结果与游标万能角度尺的原理计数结果是相等的，也可以证明推论1)在$\gcd(k,c) = k - c$时，相邻两点的圆心角从小到大顺序排列[6]。当m除以n的余数不是1或$n - 1$时，相邻两点的距离不是按照从小到大的顺序排列，游标尺的读数是混乱的，因此游标尺的每一个刻度线都要标注序号，这样的测量工具最好是电子数显的，读数比较方便。新理论在应用中，主尺相当于所有的红点或黑点，游标尺就是相邻的重合点，取其中的黑点或红点作为游标尺。综上所述相邻定理及其推论的适用条件是：必须存在相邻的重合点，主尺每格与游标尺每格不相等。

3. 游标原理证明

游标卡尺的原理：主尺每格是a毫米，游标尺的m格与主尺的$m - 1$格长度相等，则游标尺每格表示(测量精度)：$a - \frac{(m-1)a}{m} = \frac{a}{m}$毫米，游标尺的读数是根据重合的刻度线读取的。证明：游标卡尺的测量精度是根据相邻两点的最小距离，在相邻定理中，当$a - b = \frac{b}{n}$时，把$a = \frac{bm}{n}$代入此式可知$m - n = 1$，此时$a - b = a - \frac{an}{m} = \frac{(m-n)a}{m} = \frac{a}{m}$。如果数轴下方的黑点是主尺，相邻重合点之间的红点有n格，作为游标尺，测量精度是$\frac{(n+1)b}{n} - b = \frac{b}{n}$，此时主尺读数顺序与游标尺读数顺序相反。

文献[2]给出的游标卡尺的原理是：$ny = (zn \pm 1)x$，测量精度$\Delta x = \frac{x}{n}$，n是游标尺格数，y是游标尺

每格的长度，x 是主尺每格的长度，$z = 1$ 或 2。

证明：在相邻定理中 $a > b$，因此 $y = a$，$x = b$，$ny = (zn \pm 1)x$ 可知 $na = (zn \pm 1)b$，即 $\frac{a}{b} = \frac{zn \pm 1}{n}$，若 $z \ge 1$ 时，由欧几里德算法可知 $zn \pm 1$ 与 n 互素，相邻两点最小距离就是 $\frac{b}{n} = \frac{x}{n}$。

游标万能角度尺的原理在绝大多数教材中，只通过人们认可的几个应用实例来说明其测量原理[11]，没有给出一般的表达式，因为很难给出公认的证明，这里根据推论 2)给出的游标万能角度尺的原理是：主尺每格圆心角是 a 度，游标尺上的 m 格与主尺上的 $m-1$ 格的圆心角相等，游标尺每格表示的度数是(测量精度) $a - \frac{(m-1)a}{m} = \frac{a}{m}$ 度。游标尺度数是通过重合的刻度线读取。证明：令 $a = \frac{360}{k}$ (k 是正实数)，A 圆每格是 $\frac{360}{k}$ 度，B 圆每格是 $\frac{360n}{km}$ 度，当 $m - n = 1$ 时，$\frac{360}{k} - \frac{360n}{km} = \frac{360(m-n)}{km} = \frac{360}{km} = \frac{a}{m}$。

4. 新理论发现应用中的不足

文献[3]是已授权的实用新型专利，有两个是同心圆的圆盘，基盘圆周 100 等分，标有 0~99 刻度线，每一格圆心角称为 1^{p}；游盘圆周 101 等分，标有 0~100 刻度线，每格表示 0.01^{p}，基盘的读数是根据游盘零刻度线读取的，游盘读数是根据重合的刻度线读取的，游盘以圆心为轴能够在基盘上转动。如果根据游标万能角度尺的原理可知游盘每格表示 $\left(\frac{1}{101}\right)^{\mathrm{p}}$，但是专利文中没有明确的应用游标原理给出准确值，也没有说明游盘每格表示 0.01^{p} 是近似值，只是说游盘一格与基盘一格相差约 0.01^{p}，也未明确说游盘每格表示 0.01^{p} 就是根据此，由此可知创造人和审查员都认为游标万能角度尺的原理不一定恒成立，或此情况不适用游标万能角度尺的原理。如果游盘改为有连续相等的 100 格，且与基盘的 99 格相等，应用游标万能角度尺的原理可知游盘每格表示 0.01^{p}，在没有理论能说明专利是否正确的情况下，创造人和审查员都应该能想到用这个例子进行对比分析，分析的结果就是他们都认为游标万能角度尺的原理不一定恒成立。总之理论依据不足的游标原理，不同人有不同的观点，有人挑战游标原理都很正常，有争论才能让真理越辩越明。应用推论(1)也可以说明游盘每格表示 $\left(\frac{1}{101}\right)^{\mathrm{p}}$ 是正确的，$k = 101$，$c = 100$，$\gcd(k,c) = d = 1$，$100^{\mathrm{p}} = 360$度，$\frac{360d}{kc}$度 $= \left(\frac{100d}{kc}\right)^{\mathrm{p}} = \left(\frac{1}{101}\right)^{\mathrm{p}}$。从读数也能说明游盘每格表示 0.01^{p} 是有问题的，当游盘的零刻度线与基盘一刻度线对齐时，读数是 1^{p}，回转一点游盘使基盘的零刻度线与游盘的 100 刻度线对齐，此时读数也是 1^{p}，两处角度不同而读数相同，读数是 2^{p}，3^{p}，……都有类似问题。

现在教材中步进电机的步距角计算公式是 $\alpha = \frac{360}{nz}$，n 是相数，z 转子齿数，反应式步进电机一相控制两个定子磁极[4] [5]。如果应用此公式开发步距角 $\alpha = 0.1$ 度的电机，则有 $nz = 3600$，当 $n = 2$，3，4，5，6，10，12，18，20，……时，实际验证步距角都大于 0.1 度。例如 $n = 6$ 时，定子磁极数是 12 个，相邻磁极的圆心角是 30 度，$z = 600$，相邻转子齿之间的圆心角是 0.6 度，30 度有 50 个 0.6 度，磁极与转子齿对齐时，要转动 0.6 度才能再一次使磁极和转子齿对齐，即实际步距角是 0.6 度。推论 1)给出的步距角计算公式是 $\alpha = \frac{360d}{mz}$，m 是定子磁极数，z 是转子齿数，$\gcd(m,z) = d$，相数 $n = \frac{m}{d}$，一相控制 d 个磁极，且 d 个磁极等分圆周，这个公式有理论依据计算结果与实际是一致的。如果要求步距角是 0.1 度，且一相控制两个磁极，即 $\gcd(m,z) = d = 2$，由 $\frac{360d}{mz} = 0.1$ 可知 $mz = 7200 = 2^5 \times 3^2 \times 5^2$，当 $m = 16$，

$z = 2\times3^2\times5^2$ 或 $m = 18$，$z = 2^4\times5^2$ 或 $m = 50$，$z = 2^4\times3^2$，只有这三种情况下 $\gcd(m,z) = 2$。验证：$m = 16$ 相邻磁极之间的圆心角是 22.5 度，$z = 2\times3^2\times5^2$，转子相邻齿之间的圆心角是 0.8 度，29 个齿有 28 个 0.8 度，圆心角是 22.4 度，实际验证步距角也是 $22.5 - 22.4 = 0.1$ 度。当 d 是其它值时，同样的方法可以求出 m 与 z 的值。根据推论 1)也可以把教材中的步距角计算公式增加一些约束条件，$\gcd(n,z) = 1$ 或素数，当 $\gcd(n,z) = 1$ 时，从 z 中任意取一个因子乘以 n 就等于定子磁极数 m，当 $\gcd(n, z) =$ 素数时，这个素数在 z 中只能有一个，定子磁极数 $m = n$ 乘素数。

5. 结论

游标原理应用超前，其理论滞后，从而存在不同观点，这里从理论上让大家统一认识，探讨新理论的应用，完善各种相关教材中的不足。新理论在学术上有一定的参考价值。

参考文献

[1] 王伟东. 关于游标卡尺的教学策略研究[D]: [硕士学位论文]. 桂林: 广西师范大学, 2007.

[2] 孙清卫. 游标卡尺游标分度值的改进[J]. 职业, 2018(14): 126-127.

[3] 朱嘉慧. 百分度游盘量角器[P]. 中国专利, 201420197445.9, 2014.

[4] 史震, 张鹏, 巩冰. 自动控制元件[M]. 北京: 国防工业出版社, 2013.

[5] 芮延年. 机电一体化系统设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 2014.

[6] 黄友谊. 一种利用双同心圆的测量结构、方法及其应用[P]. 中国专利, 201610218336.4, 2016.

[7] 黄友谊. 源自生活中的新命题比数论中的一个重要定理用途更广[J]. 数学学习与研究, 2008(11): 119.

[8] [美]罗森(Rosen, K.H.). 离散数学及其应用[M]. 袁崇仪, 屈婉玲, 王捍平, 刘田, 译. 北京: 机械工业出版社, 2007.

[9] [美]格里马迪(Grimaldi, R.). 离散数学与组合数学[M]. 林永钢, 译. 北京: 清华大学出版社, 2007.

[10] 汪杨海, 贺细平. 扩展欧几里德算法改进探讨[J]. 电脑与信息技术, 2018(6): 16-18.

[11] 钟翔山. 机械设备装配全程图解[M]. 北京: 化学工业出版社, 2019.