

同心鼓问题的数学模型

罗智勇, 骆焱依, 胡月, 陈国华*

湖南人文科技学院数学与金融学院, 湖南 娄底
Email: 1509875037@qq.com, *hnlcgh@163.com

收稿日期: 2021年1月4日; 录用日期: 2021年5月5日; 发布日期: 2021年5月12日

摘要

为了研究“同心鼓运动”的最佳协作策略, 本文分别对排球的下落、碰撞、上升进行受力分析, 建立了协作策略优化模型。通过求解微分方程及利用遍历搜索, 得到该策略下每个人的发力时机、大小及竖直面与绳子的夹角, 进一步探讨实际情况下遇到鼓面倾斜问题该如何调整, 建立了同心鼓倾斜修正模型并给出调整策略。

关键词

同心鼓运动, 协作策略优化模型, 倾斜修正模型, 微分方程

Mathematical Model of Concentric Drum Problem

Zhiyong Luo, Yiyi Luo, Yue Hu, Guohua Chen*

School of Mathematics and Finance, Hunan University of Humanities, Science and Technology, Loudi Hunan
Email: 1509875037@qq.com, *hnlcgh@163.com

Received: Jan. 4th, 2021; accepted: May 5th, 2021; published: May 12th, 2021

Abstract

In order to study the best cooperation strategy of “concentric drum movement”, this paper analyzes the force of falling, collision and rising of volleyball, and establishes the optimization model of cooperation strategy. By solving differential equations and using ergodic search, the timing and size of each person’s exertion and the angle between vertical plane and rope under this strategy are obtained. Further discussion is made on how to adjust the problem of drum tilt in actual situation. A correction model of concentric drum tilt is established and an adjustment strategy is given.

*通讯作者。

Keywords

Concentric Drum Movement, Cooperative Strategy Optimization Model, Tilt-Corrected Model, The Differential Equation

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

“同心鼓运动”是一种考验团队间的协作能力的团建活动，需要多人共同用力拉起带有绳子的鼓去接弹在空中跳动的排球。通过团队间的密切协调配合，排球能够稳定地在鼓面上跳动。以此为基础，本文对“同心鼓运动”最佳协作策略进行研究。如下图 1 所示：



Figure 1. Schematic diagram of concentric drum game

图 1. 同心鼓游戏示意图

对“同心鼓运动”的最佳协作策略的研究，不仅是为了取得游戏的胜利，也是为了促进团队间的密切协调配合能力，提升队员在活动中的参与感、荣誉感。首先假设在每个人均能准确把握用力方向、力度以及控制同时发力的情况下，制定最佳的协作方案。其次在实际操作中因为会存在一定误差，导致鼓面发生倾斜，故而要将进一步探讨在此情况下鼓面的调整策略。

2. 数据来源及模型假设

本论文研究所用数据来源于 2019 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛。

http://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/b0ae8510b9ec0cc0deb2266d2de19ecb.html

- 1) 假设 g 取 9.8 N/kg ;
- 2) 假设理想状态下颠球过程无风力影响，改变排球运动轨迹；
- 3) 假设空气密度均匀，并设空气阻力系数为 0.5 ；
- 4) 假设忽略排球与鼓面的摩擦力；
- 5) 假设问题一中排球与鼓面碰撞时间取 0.01 s ，绳子半径取值为 1 m ；
- 6) 假设人在击鼓拉绳时，每个人均是静止站在地面上，不产生位移；
- 7) 假设在颠球过程中不考虑横向风的阻力或其他因素影响球的运动轨迹；
- 8) 假设队员绕鼓分布为均匀分布，即以两名队员所站位置为边组成的圆心角相等。

3. 模型的建立与求解

3.1. 协作策略优化模型

把球的运动分为三个过程：球的下落过程、球与鼓碰撞过程、碰撞后的上升过程。由于求解需要，我们先分析带有空气阻力的自由落体运动，然后研究碰撞后的上升过程，最后分析与鼓面碰撞过程。该问题我们仅以团队成员为 8 人的情况为例。

3.1.1. 碰撞后的下降过程

排球释放瞬间 8 人立即将鼓向下调整至低于水平面的高度，对排球下落时的运动状态进行受力分析，此过程中排球受重力以及空气阻力的影响[1] [2]，如下图 2 所示：

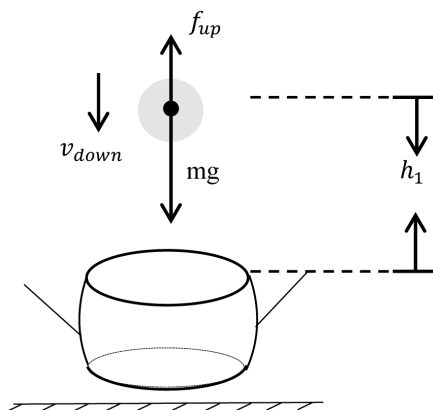


Figure 2. Force analysis of the ball when it falls
图 2. 球下落时的受力分析

根据动能定理并结合上述分析可得到排球接触鼓面时的瞬时速度 $v_{末}$ 与空气阻力 f 的关系式：

$$\frac{1}{2}mv_{末}^2 - \frac{1}{2}mv_{初}^2 = mgh - fh \tag{1}$$

当空气密度均匀时，我们可以将物体在运动过程中所受的空气阻力近似看作与速度成正比关系，即

$$f = kv \tag{2}$$

式中： k 为空气阻力系数， v 为物体在某一时刻的瞬时速度。

由于不同时刻的速度会发生变化，那么式中 f 即为一个变化的物理量，则可表示为：

$$f_i = kv_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \tag{3}$$

式中： v_i 表示 i 秒时的瞬时速度， m 表示第 m 秒时球与鼓面恰好接触。

此时无法直接使用动能定理，而 v_i 均匀变化。因此，我们用速度的平均值来描述时刻变化的速度。对(2)式改进后得到：

$$f_i = kv_i \tag{4}$$

其中

$$v_i = \frac{(v_i + v_0)}{2} \tag{5}$$

因此球下落的整个过程受到重力和空气阻力二力影响得到加速度与速度的关系式为：

$$ma = mg - kv \quad (6)$$

式中： a 为排球下落的加速度。

在空气阻力影响下的自由落体的运动探究中发现：对(6)式运用微分方程求解可得到速度与时间的规律关系式[3]：

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \quad (7)$$

因此可得到排球在下落过程的运动时间 t 的动力学方程：

$$t = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{k}{mg} v \right) \quad (8)$$

3.1.2. 碰撞后的上升过程

对球上升过程的受力分析，此过程受重力以及空气阻力的影响。如下图 3 所示：

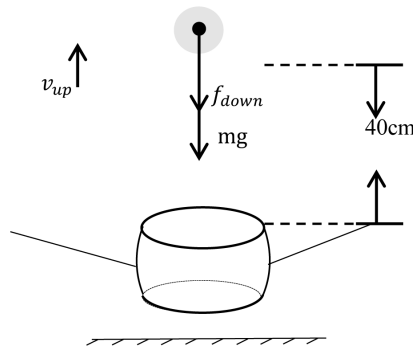


Figure 3. Process diagram of ascending motion
图 3. 上升运动过程图

该过程可近似看作球在下落过程的相反过程。因此可得到该过程时间 t 与速度 v 关系式

$$t = -\frac{m}{k} \ln \left(\frac{kv}{mg} + 1 \right) \quad (9)$$

式中： v 表示球上升过程的初速度。

结合上述两种运动过程即可得到在规定的总时间 $t_{\text{总}}$ 内，球运动的频率：

$$P = \frac{t_{\text{总}}}{t_{\text{up}} + t_{\text{down}}} \quad (10)$$

3.1.3. 球与鼓碰撞过程

此时过程可将鼓与球看作一个质点，可以减少对复杂内力的讨论。对其进行受力分析，如图 4 所示。

竖直方向上拉力 $F_{\text{拉}} \cos \alpha$ 与向下的重力 $(m_1 + m_2)g$ 共同作用，产生球与鼓运动的加速度 a 。由加速度得到用力力度和方向。即：

$$\begin{cases} a = \frac{v_2 - v_1}{t} \\ F_{\text{拉}} \cos \alpha - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \end{cases} \quad (11)$$

式中： α 为拉力与竖直方向的夹角。 $F_{\text{拉}}$ 为 8 个人作用下竖直方向上的总的拉力。 a 为 t 时间内的排球的加速度。

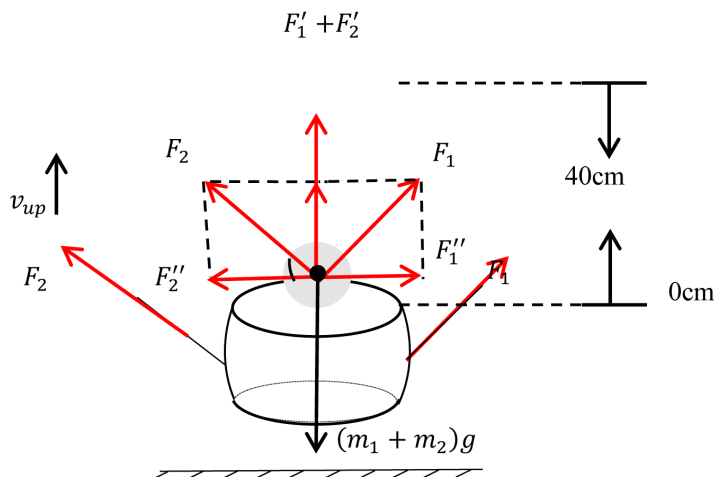


Figure 4. Force analysis diagram of collision process
图 4. 碰撞过程受力分析图

3.1.4. 最优策略

1) 颠球高度的选择

运用 MATLAB 进行编程，得到颠球次数与运动高度的关系，如下图 5 所示：

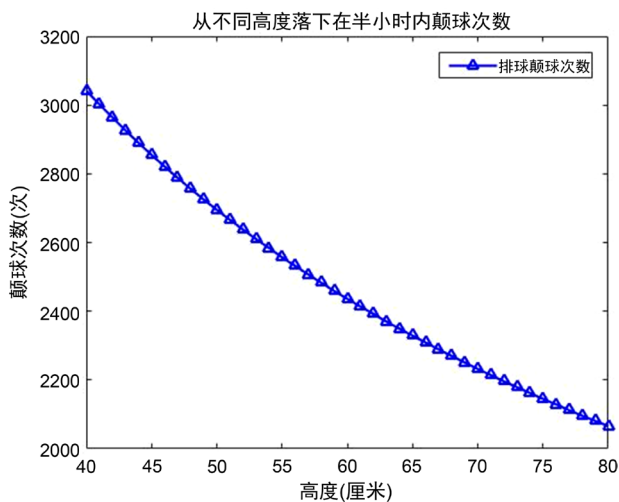


Figure 5. Variation pattern of bouncing height and number of bouncing balls
图 5. 颠球高度与颠球次数变化规律图

结论：当运动高度在 40 cm 时颠球次数最大，但超过 40 cm 时颠球次数随高度增加而减小，由此可以知道，初始颠球高度为 40 cm 时是最佳的高度。

2) 用力时机、用力方向以及力度

理想状态下，取各个队员可同时发力，此时为最佳时机。通过上述数学模型编程计算，得到在不同高度下绳与竖直方向上夹角 α 和每个人需用力的大小 F 的值。并得到了不同的高度下的数值变化的示意图如图 6 所示。

综上所述，我们得到最优的策略为：开始时每个人同时发力，即发力时机为 0，且发力大小为 84.9 N；然后控制绳子与竖直面的夹角大小为 50.2°；此时球的弹跳高度保持在 40 cm 处。

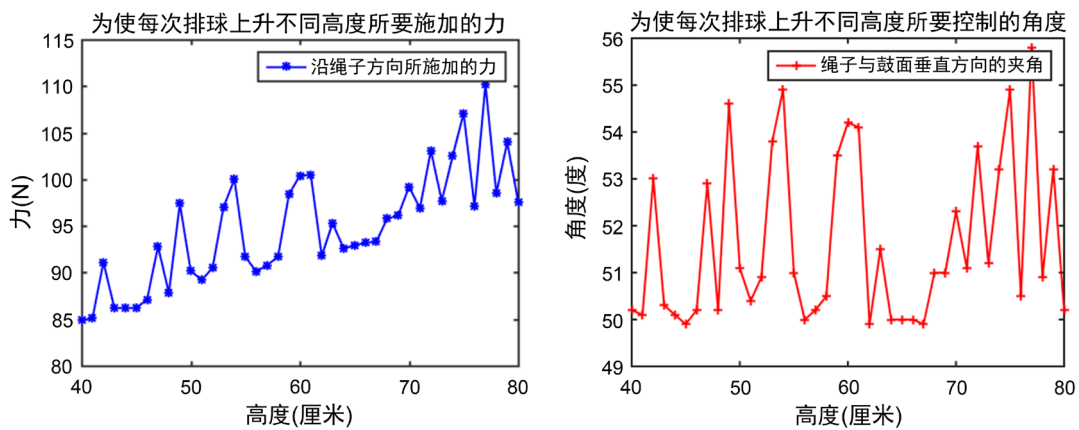


Figure 6. Optimal F, α variation diagram at different heights
图 6. 不同高度下最优 F, α 的变化图

3.1.5. 模型改进与优化

为提高计算精度，降低计算成本，可对上述模型进一步改进，由球运动过程的受力分析结合微分方程的背景知识可得到如下模型：

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} + k \frac{dh}{dt} = mg \tag{12}$$

其中 h 为排球下落高度， t 为排球下落时间， k 为空气阻力系数， m 为排球质量。

将初始条件，即 $h|_{t=0} = 0, h'|_{t=0} = 0$ 代入，求出常数，得到时间位移关系：

$$h = e^{\frac{k}{m} t} \frac{m^2 g}{k^2} \left(1 + \frac{k}{m} e^{\frac{k}{m} t} t - e^{\frac{k}{m} t} \right) \tag{13}$$

利用 MATLAB 得出结果，得到改进后的结果，如下图 7 红线条所示：

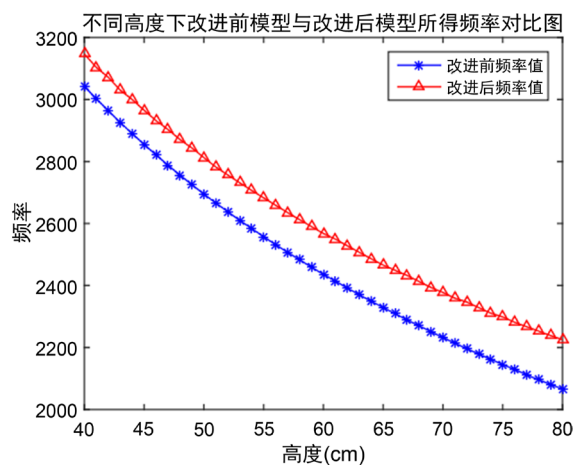


Figure 7. Optimal comparison of calculation results before and after the improved model
图 7. 改进模型前后计算结果对比图

3.1.6. 模型检验(准确性研究)

基于对完善后的协作策略优化模型的分析，对结果准确性进行了如下研究：

以颠球高度为自变量，分别以下降末速度、上升初速度、下降时间及上升时间为自变量，探究他们之间的关系。首先，运用动能定理和能量守恒定律建立高度 - 速度模型：

$$\frac{1}{2}mv_{\text{down}}^2 = mgh - f_{\text{up}}h_{\text{down}} \tag{14}$$

以及

$$\frac{1}{2}mv_{\text{up}}^2 = mgh + f_{\text{down}}h_{\text{up}} \tag{15}$$

式中： v_{down} 表示下降过程的末速度； h_{down} 表示下降过程的高度； v_{up} 表示上升过程的初速度； h_{up} 表示上升过程的高度。然后更改高度参数，利用时间 - 速度模型：

$$t_{\text{down}} = -\frac{m}{k} \ln\left(1 - \frac{k}{mg}v_{\text{down}}\right) \tag{16}$$

以及

$$t_{\text{up}} = -\frac{m}{k} \ln\left(\frac{kv_{\text{up}}}{mg} + 1\right) \tag{17}$$

由上述公式得到颠球高度分别与排球下降初速度、上升末速度、下降时间、时间的关系图。得到的结果如下图 8 所示：

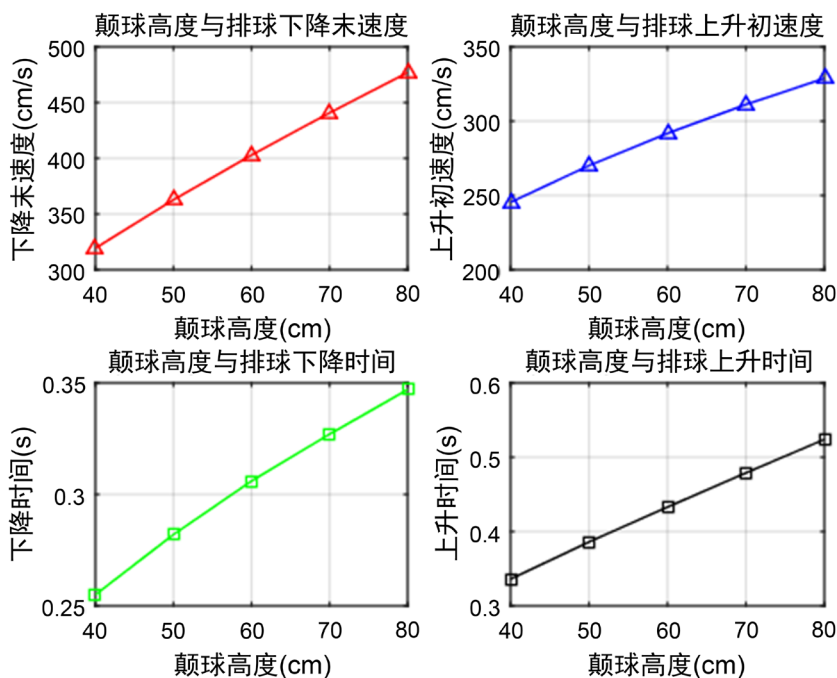


Figure 8. Relation diagram of bouncing ball height and different factors
图 8. 颠球高度与不同因素关系图

由分析可知，上述四种因素均与高度呈正相关。另外，由图 6 中蓝色曲线图可知：当颠球高度变化时，为使每次排球上升不同高度所要施加的力呈上升的趋势，同时根据能量守恒定律可以推断高度越大则所施加的力相应要越大。综上均符合事实逻辑，可进一步说明在不同参数下的模型结果具有合理性。

3.2. 同心鼓倾斜修正模型

3.2.1. 模型准备

在模型一求解的基础上考虑现实中常见的几种可导致鼓面倾斜的情况得到发力时机与用力大小的关系表格。得到如下表 1 所示的数据：

Table 1. Three types of situations after improvement

表 1. 改进后的三类情况表

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8
1	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0
	用力大小	94.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9
2	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0
	用力大小	94.9	94.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9
3	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0
	用力大小	94.9	84.9	84.9	94.9	84.9	84.9	84.9	84.9
4	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0
	用力大小	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9
5	发力时机	-0.1	-0.1	0	0	0	0	0	0
	用力大小	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9
6	发力时机	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	0
	用力大小	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9
7	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0
	用力大小	94.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9	84.9
8	发力时机	0	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0
	用力大小	94.9	84.9	84.9	94.9	84.9	84.9	84.9	84.9
9	发力时机	0	0	0	0	-0.1	0	0	-0.1
	用力大小	94.9	84.9	84.9	94.9	84.9	84.9	84.9	84.9

注：以下所有表格发力时机单位均为：秒，用力大小单位均为：N。

将 8 名队员分为 4 组，其中 1 号与 5 号为一组，2 号与 6 号一组，3 号与 7 号一组，4 号与 8 号一组，并分别记为 G_1, G_2, G_3, G_4 。表格中的序号 1 记为情形 1，以此类推；将上表所述的 9 种情形分为三类：I) 同时发力时拉力大于约定拉力，II) 未按照约定时间提前发力，III) 提前发力并且力度超过约定拉力大小。

对初始状态即鼓保持静止进行受力分析。如下图 9 所示：

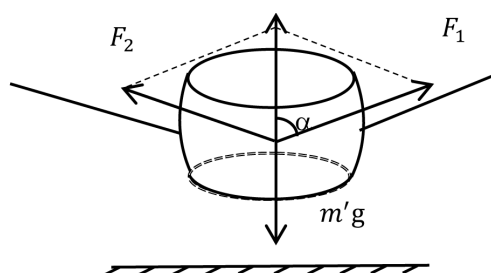


Figure 9. Force analysis diagram of the initial state drum surface

图 9. 初始状态鼓面的受力分析图

注：图中的 F_1, F_2 分别表示两名队员对鼓施加的拉力。 $m'g$ 表示两名队员施加拉力后需承受鼓的重力。 α 为拉力与竖直方向之间的夹角。因为我们考虑的是 n 组队员的受力情况，所以下文所提到的 m' 均表示 $\frac{n}{4}m$ ，其中表示出现情况异常的组数(后续模型均按此约定)。

在下述情况中当施加更多的拉力使鼓面倾斜时，拉力的方向不变，一直为沿绳方向，接着结合上述理论，讨论三类情况下的模型。

3.2.2. 第一类：同时发力时拉力大于约定拉力

以相同时间发力，但 1 号队员施加了 94.9 N 的情形 1 为例，受力分析如下图 10 所示：

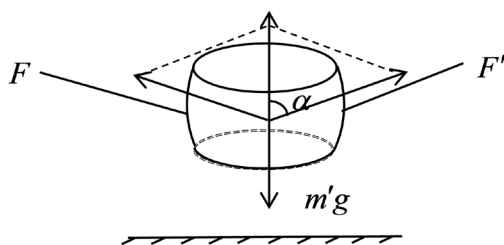


Figure 10. Force analysis diagram of inclined direction
图 10. 倾斜方向的受力分析图

其中 F, F' 为 G_1 组两名队员施加的拉力(由于初始时的竖直方向的拉力已经平衡重力，所以倾斜时施加的力不需要再考虑重力的影响)。

从图 4 中可以看出倾斜的角度是由鼓面直径与不同力作用下的高度差的比值所决定。即

$$\theta = \arcsin \frac{\Delta h}{d} \tag{18}$$

其中 θ 为鼓与水平面的夹角。同理可得到序号 2、3 情形的倾斜角模型。受力分析如下图 11、图 12 所示：

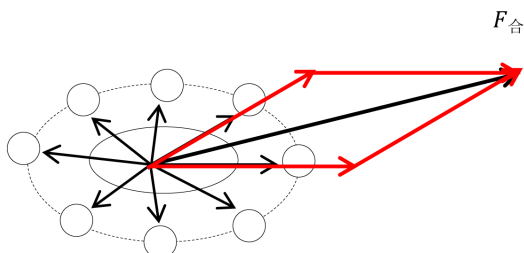


Figure 11. Top view of two force synthesis
图 11. 二力合成俯视图

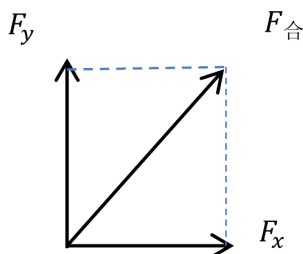


Figure 12. Facet view of decomposition force
图 12. 分解合力正视图

3.2.3. 第二类：未按照约定时间提前发力

以 1 号队员提前 0.1 s，施加 84.9 N 的力的情形 4 为例，受力分析如下图 13 所示：

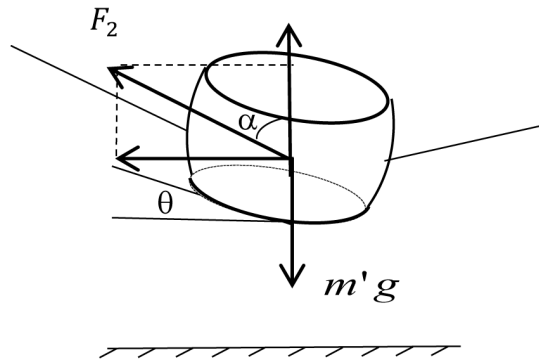


Figure 13. Force analysis diagram of the second type
图 13. 第二类情况受力分析图

此时鼓的加速度出现，破坏了鼓面的受力平衡导致鼓面出现倾斜，借助加速度我们可以求出在 0.1 s 内鼓面升高的高度。后述步骤的模型建立与第一类相似。为了避免繁杂，此处不再赘述。

3.2.4. 第三类：提前发力并且力度超过约定大小

以情形 9 为例，即 5 号和 8 号队员提前 0.1 s 施加 84.9 N 的力，其余队员同时发，1 号和 4 号队员施加 94.9 N 的拉力。受力分析俯视图如下图 14 所示：

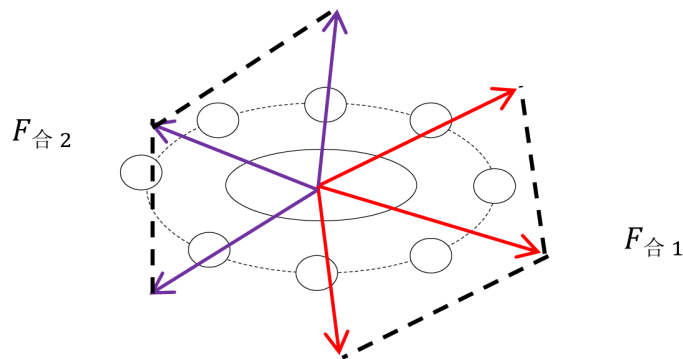


Figure 14. Top view of the third type of force
图 14. 第三类用力情况俯视图

图中 $F_{合1}$ 为 5 号和 8 号队员提前发力所产生的合力， $F_{合2}$ 为 1 号和 4 号队员用力超过约定拉力的合力。对两个合力进行合成，将其转换为一个方向上的总合力，即：

$$F_{合2} - F_{合1} = F_3 \quad (19)$$

式中 F_3 表示鼓面在两个合力作用下的力，即该系统的合力，利用此时的合力求解加速度进而求出鼓面上升高度，得到倾斜角度。

由此将模型进行推广得出计算表格中 7 和 8 两种情况的倾斜角度。

3.2.5. 模型结果

经过计算求解得到上述三类情况下每种情形的鼓面倾角的结果。如下表 2 所示：

Table 2. Drumhead inclination under different conditions

表 2. 不同情形下的鼓面倾角

序号	1	2	3	4	5
鼓面倾角(度)	0.1287	0.2573	0.2557	1.0299	2.0585
序号	6	7	8	9	
鼓面倾角(度)	2.0458	1.1586	2.0458	0.2557	

3.2.6. 调整策略的提出

以情形 2: 8 人同时发力, 但 1 号和 2 号队员用力过大、情形 5: 8 人发力大小相同, 但有两人提前发力、情形 9: 有两人提前发力, 且在游戏开始时又有两人用力过大的情况为例, 进行分析并给出相应的调整:

1) 对情形 2 进行调整

对 1 号和 2 号队员施加的拉力进行受力分析, 具体用力情况如下图 15 所示:

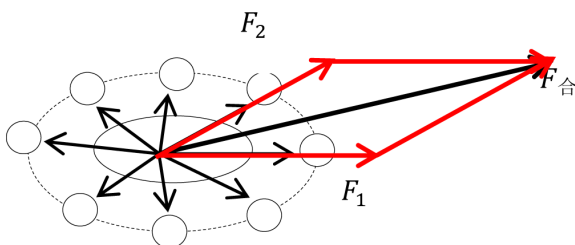


Figure 15. Analysis of excessive force

图 15. 用力过大受力分析

由图分析可知: 鼓受到两人的拉力和自身的重力。由于每个人的拉力方向不变, 力度增大, 从而使鼓的一侧产生了向上的加速度导致鼓面倾斜。因此针对此种情况我们采取策略为: 增大对面队员的拉力来调整鼓面保持水平。

分析得到合力 $F_{合}$ 与夹角 θ 的关系式, 为

$$\begin{cases} h_1 = \frac{1}{2}at^2 \\ F_{合} \cos\theta = m'a \end{cases} \quad (20)$$

式中 a 为鼓面上升的加速度。

通过合力计算加速度以及此时鼓面倾斜的高度。利用拉力使得鼓面平行于地面。从而求出能抵消高度差的力。将模型进行推广, 得出表 1 中序号 1、2、3 中情形的对应改进策略, 所得表格如下表 3 所示:

Table 3. Result table of strategy improvement in the first type of situation

表 3. 第一类情况下策略改进结果表

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8
1	发力时机	0	0	0	0	-0.1	0	0	0
	用力大小	94.9	84.9	84.9	84.9	104.9	84.9	84.9	84.9
2	发力时机	0	0	0	0	-0.1	-0.1	0	0
	用力大小	94.9	94.9	84.9	84.9	104.9	104.9	84.9	84.9
3	发力时机	0	0	0	0	-0.1	0	0	-0.1
	用力大小	94.9	84.9	84.9	94.9	104.9	84.9	84.9	104.9

注: 表格发力时机单位为: 秒, 用力大小单位为: N。

改进策略:

情形 1: 提前 5 号队员的发力时机以及增大拉力力度;

情形 2: 提前 5 号、6 号的发力时机, 并增加两者的力度;

情形 3: 提前 5 号、8 号队员的发力时机, 并增加两者的力度。

2) 对情形 5 进行调整

由于提前发力导致鼓面倾斜, 破坏了鼓面平衡的状态, 此时的合力应为两人拉力的合力在竖直方向上的力。然后, 利用加速度-位移公式求解在时间为 0.1 s 的条件下产生的高度差。利用 MATLAB 进行编程, 定步长搜索最优拉力, 从而消除鼓面倾角。将模型进行推广, 得到情形 4、情形 5、情形 6 的改进策略。如下表 4 所示:

Table 4. Strategy improvement results table in the second category**表 4.** 第二类情况下策略改进结果表

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8
4	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0
	用力大小	84.9	84.9	84.9	84.9	164.9	84.9	84.9	84.9
5	发力时机	-0.1	-0.1	0	0	0	0	0	0
	用力大小	84.9	84.9	84.9	84.9	164.9	164.9	84.9	84.9
6	发力时机	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	0
	用力大小	84.9	84.9	84.9	84.9	164.9	84.9	84.9	164.9

注: 表格发力时机单位为: 秒, 用力大小单位为: N。

改进策略:

情形 4: 5 号队员增大拉力;

情形 5: 5 号、6 号队员增大拉力;

情形 6: 5 号、8 号队员增大拉力。

3) 对情形 9 进行调整

由于情形 9 中的合力为

$$F_{\text{合}2} - F_{\text{合}1} = F_3 \quad (21)$$

式中 $F_{\text{合}1}$ 为 5 号和 8 号队员提前发力的合力, $F_{\text{合}2}$ 为 1 号和 4 号队员用力过大的合力。 F_3 表示两个共线力进行力的合成后的合力, 即该系统的合力,

由于混合情况下发力力度以及时机混合作用, 无法进行对依次消除鼓面倾角, 于是采取当斜面倾角已经产生的情况下进行调整的策略, 得到如下表 5 所示的数据:

Table 5. Policy improvement results table in the third case**表 5.** 第三种情况下策略改进结果表

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8
7	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0
	用力大小	94.9	84.9	84.9	84.9	184.9	84.9	84.9	84.9
8	发力时机	0	-0.1	0	0	0.1	0	0	0.1
	用力大小	94.9	84.9	84.9	94.9	174.9	84.9	84.9	174.9
9	发力时机	0	0	0	0	0.1	0	0	0.1
	用力大小	94.9	84.9	84.9	94.9	104.9	84.9	84.9	104.9

注: 表格发力时机单位为: 秒, 用力大小单位为: N。

改进策略:

情形 7: 增加 5 号队员的力度;

情形 8: 增加 5 号队员、8 号队员拉力且延迟两名队员的发力时机 0.1 s;

情形 9: 增加 5 号、8 号队员拉力且延迟两者发力时机 0.1 s。

4. 结束语

本文以“同心鼓运动”项目为研究对象,运用动能定理、机械能转化等物理原理,借助微分方程对“同心鼓”进行多角度受力分析,得到理想状态下的团队最佳协作策略,以及多种不同步发力情况下的同心鼓多人控制系统的倾角测算,最后针对倾角的出现给出了调整策略。其中,协作策略优化模型测算出的同心鼓运动参数具有一定的现实意义,对项目调整策略的优化以及模型的改进推广有所帮助,该模型将生活中的团队游戏转化为了物理问题,真正地做到了学以致用,同时该模型充分研究自由落体运动,对运动学问题有一定的启发价值。

致 谢

感谢湖南人文科技学院数学与金融学院对本文的支持。

基金项目

湖南省学位与研究生教育改革研究项目:专业学位硕士研究生创新人才培养的数学建模“两轮驱动”模式研究与实践(湘教通[2019]293 号 No. 2019YGYB67)。

参考文献

- [1] 王建勇,曹烽程. 乒乓球训练的科学性分析[J]. 中学物理教学参考, 2019, 48(6): 76-77.
- [2] 刘峰. 浅谈物理学原理在乒乓球技术教学中的应用[J]. 吉林体育学院学报, 2008(4): 137+140.
- [3] 陈太荣. 空气阻力影响下自由落体运动规律的探究[J]. 湖南中学物理, 2014, 29(10): 66-68.