

Notes for Gravitational Wave Detection Principles: Five Physical Origins of LIGO Interference Phase Shift

Jianqi Shen

Center for Optical and Electromagnetic Research, College of Optical Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang
Email: jqshen@zju.edu.cn

Received: May 13th, 2017; accepted: May 28th, 2017; published: May 31st, 2017

Abstract

Giant Michelson interferometer is one of the essential means of gravitational wave detection. The influence of gravitational-tidal-force assisted laser wavelength stretch and laser-frequency soft coherence on the interference phase in LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) is investigated. It can be found that there are five physical origins of LIGO interference phase shift in LIGO gravitational wave detection: i) purely geometric change in standard length of interferometer arms (non-tidal contribution), ii) purely geometric change in standard length of laser wavelength (non-tidal contribution), iii) gravitational-wave tidal-force assisted change in interferometer arms (tidal contribution), iv) gravitational-wave tidal-force assisted change in laser wavelength (tidal contribution), and v) feeble coherence of laser frequency caused by gravitational wave in LIGO interferometer. The laser frequency shift in two vertical interference arms can occur due to gravitational wave, and hence such a faint coherence condition would also lead to interference pattern change when the gravitational wave propagates through the LIGO. The effect of flexion and extension in laser wavelength resulting from gravitational tidal force caused by a passing gravitational wave would have significance of measurement in LISA (Laser Interferometer Space Antenna). The frequency change rate of GW150914 gravitational wave signal resulting from in spiral, merger and ring-down of black-hole binaries has been addressed, and it can be found that the logarithm of the detected gravitational-wave frequency change rate agrees with the first-order Blanchet frequency equation within accuracy of $\pm 30\%$.

Keywords

LIGO, Gravitational Tidal Force, LIGO Interference Phase, Faint Coherence Condition

引力波探测原理札记：LIGO干涉相移的五个起源

沈建其

浙江大学紫金港校区光电学院, 光及电磁波研究中心, 浙江 杭州
Email: jqshen@zju.edu.cn

收稿日期: 2017年5月13日; 录用日期: 2017年5月28日; 发布日期: 2017年5月31日

摘要

巨型迈克尔逊激光干涉仪是探测引力波的有效手段。本文研究了激光干涉引力波观察仪(Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, LIGO)中的干涉臂长、干涉激光波长和频率等物理量在引力波振幅与引力波潮汐力作用下的变化量。本文总结出引力波引起LIGO干涉相位移动的五物理因素: ①干涉臂标准长度的纯几何改变(非潮汐力贡献); ②激光标准波长的纯几何改变(非潮汐力贡献); ③干涉臂长度受潮汐力影响导致的改变(属引力波潮汐力贡献); ④激光波长受潮汐力影响导致的胀缩效应(属引力波潮汐力贡献); ⑤激光频率的弱相干效应。在引力波作用下, 在互相垂直的两条干涉臂中的激光会有不同频移, 这一频率弱相干条件也会影响干涉相位差。本文说明引力波潮汐力(引力落差)所导致的干涉激光波长屈伸效应能在LISA (Laser Interferometer Space Antenna)中有测量意义。本文还讨论了GW150914引力波信号频率变化率与描述螺旋合并双黑洞的引力波Blanchet频率方程之间的符合程度, 发现GW150914引力波信号观察与理论在 $\pm 30\%$ 差距上相符。

关键词

引力波干涉仪, 引力波潮汐力, LIGO相移, 频率弱相干性

Copyright © 2017 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1915年, 爱因斯坦基于三个基本工具或基本线索(以狭义相对论在弯曲空间的推广作为基本出发点、以黎曼几何为基本数学手段、以牛顿引力为弱场近似迎合条件)为基础建立了广义相对论[1][2][3]。广义相对论解释和预言了太阳系内若干新引力效应, 如水星近日点反常进动、星光弯曲、引力红移、雷达回波延迟等现象, 理论与实验的一致性让物理学家们相信广义相对论是一个正确的相对论性引力理论。正如加速运动的电荷会辐射电磁波, 加速运动的质量也会辐射出引力波。广义相对论预言了引力波的存在[1][2][3][4]。根据该理论, 时间与空间并非刚性, 而是可以弯曲与扭曲的, 如弯曲表现为引力(曲率), 扭曲表现为挠率。时空的弯曲可以以时空的振动(涟漪)传播开来, 表现为引力波。在过去五十年, 探测引力波的手段主要有二[5][6][7]: 质量四极振子共振法与激光干涉法。前者由于噪声太高、探测频率单一、需要维持低温, 效率不高。探测引力波的希望被寄托在激光干涉法。

激光干涉法需要设计巨型迈克尔逊干涉仪。为了能测量到微弱引力波经过时导致的迈克尔逊干涉仪干涉相位的移动, 需要从三个角度来提高测量精度: 千米长的干涉臂(以便放大干涉相位移动); 高的激光功率(光子数越多, 越能提高清晰度); 多的反射次数(增加干涉臂的有效长度)[2]。随着激光干涉技术、各种减震技术、数据分析技术的发展, 经过三十多年多次LIGO技术改进, 目前激光干涉引力波观察仪(Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, LIGO)探测手段已经能测量到幅度为 $h = 1.0 \times 10^{-21}$ 量

级(无量纲)的引力波。

2015年9月14日,位于路易斯安那州(Livingston)和华盛顿州(Hanford)的两个“激光干涉引力波天文仪”(LIGO)均独立接受到了一阵相同的时空涟漪(引力波)[8]。该引力波事件被称为GW150914。它们被认为来自13亿光年(误差约正负五亿光年)之外的质量分别为大约36倍太阳质量和大约29倍太阳质量的超越恒星水平级的两个黑洞合并过程。探测到的引力波频率为35~250 Hz,引力波幅度为 $h=1.0\times 10^{-21}$ 。该引力波事件的误报率为二十万三千年一次[8]。GW150914事件既被认为是人类历史上首次直接探测到了引力波,也被认为是在历史上人类首次观察到了(用引力波来观察)“双黑洞合并”这一宇宙中最剧烈的事件,从而人们也可以认为GW150914事件真正开创了引力波天文学[8]。继GW150914之后不久,美国路易斯安那州和华盛顿州的LIGO研究组又于2015年12月26日探测到另一个也来自双黑洞合并的引力波信号GW151226[9]。

本文主要介绍和研究了LIGO中的干涉臂长、干涉激光波长和频率等物理量在引力波振幅与引力波潮汐加速度作用下的变化量,尤其是引力波LIGO激光波长的引潮力屈伸效应及频率弱相干条件对干涉相位的影响,其核心方法是研究LIGO干涉臂两端悬浮镜和干涉臂内光子(在引力波振幅和引力波潮汐加速度作用下)的运动方程。本文中的推理是按照本人的理解和钻研编排的,仅供对引力波探测原理感兴趣的研究人员参考。本文不涉及引力波探测具体技术(如各种减震技术与去噪声技术)。

本文认为,引力波引起LIGO干涉相位移动有五个物理因素:①干涉臂长度的纯几何改变(非潮汐加速度贡献);②激光波长的纯几何改变(非潮汐加速度贡献);③干涉臂长度受潮汐加速度影响导致的改变(属引力波潮汐加速度贡献);④激光波长受潮汐加速度影响导致的胀缩效应(属引力波潮汐加速度贡献);⑤激光频率的弱相干效应(因引力波的存在,互相垂直的干涉臂内的激光频率有略微不同)。其中①②两条效应恰好互相精确抵消(这类似如下一个比方:一根受热胀冷缩影响的钢尺测不出一根用同材料制成的钢条的热胀冷缩系数),所以①②两条可以不计;第③条即为传统文献内所提的LIGO干涉相移来源;第④条在LIGO实验中不重要,但在未来的LISA(Laser Interferometer Space Antenna)实验观察中重要[10][11]。由于本文研究LIGO相移,所以不再对第④条详细分析;第⑤条是本文研究重点。根据光的波动干涉理论,产生稳定干涉图纹的条件是:两列光波具有相同频率、位相差恒定且振动方向一致。在引力波存在时,激光的色散关系是: $(\omega/c)^2 = k_x k_x$ 。一旦出现引力波,激光的色散关系是 $(\omega/c)^2 = -g^{xx} k_x k_x$,其中 $-g^{xx}$ 相对于1的偏离,就是引力波波幅。我们可以看出,当引力波存在时,激光频率 ω 发生了改变(相对于当引力波不存在时),数值改变量正比于引力波振幅。进一步可以分析,沿着X和Y轴干涉臂传播的激光的频率改变量是相反的,因为 $-g^{xx}$ 与 $-g^{yy}$ 相对于1的偏离量(即 $-g^{xx}-1$ 与 $-g^{yy}-1$)刚好大小相等、符号相反,因此干涉条件(两列光波具有相同频率)便不再精确满足,不再能形成稳定干涉图纹。我们发现,第⑤条因素导致的干涉相移与第③条恰好大小相等。但是,文献中一般仅仅介绍第③条因素而忽略第⑤条因素,这就导致所计算的干涉相移只有实际值的一半,这样与LIGO实验比较,会造成人为将引力波振幅数值放大一倍的后果。若真是这样,那么实际的引力波源距离地球,可能只有原先预测值的一半。如GW150914引力波信号被认为来自约13亿光年之外的两个黑洞合并过程,那么如果考虑上面第⑤条因素,实际引力波源可能仅仅位于六七亿光年之外。

本文计算引力波LIGO相移十分翔实具体,这当然有利于读者,但也使得本文陈述显得冗长。之所以如此翔实考察,是因为我们怀疑过去几十年对LIGO相移的计算并不完整,即他们仅仅考虑由引力波潮汐加速度引起的LIGO干涉臂长度变化所产生的“潮汐相移”(tidal interference phase shift),而忽视了由(弱相干)激光频移致使的干涉相移(X轴与Y轴干涉臂内传播的激光在引力波作用下其频率其实并不相同),我们发现此“弱相干性相移”(weak-coherence interference phase shift)在数值上与“潮汐相移”大小相等,因此也必须考虑其在LIGO实验中的贡献。

2. 作用量原理与引力场中质点的短程线方程

为了研究在引力波作用下 LIGO 干涉臂长度变化及激光各参量(波数和频率)的变化,我们需要研究干涉臂终端悬浮镜和干涉臂内光子的运动方程。首先我们研究弯曲时空中的运动粒子的作用量原理与引力场中质点的短程线方程。按照一般的狭义相对论经典粒子力学,质点的作用量为 $S = -m_0 c \int ds$, 其中 ds 为四维时空线元。此做法可以推广到弯曲时空, 即 $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ 。于是弯曲时空内质点作用量为

$$S = -m_0 c \int \sqrt{g_{\mu\nu} (dx^\mu/ds)(dx^\nu/ds)} ds = -m_0 c \int \sqrt{g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu} ds, \quad (1)$$

其中四维逆变速度定义为 $dx^\mu/ds = U^\mu$, $dx^\nu/ds = U^\nu$ (希腊指标 $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$)。于是质点的 Lagrange 量为 $L(x^\mu, dx^\mu/ds) = -m_0 c \sqrt{g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu}$ 。当然, 在运动方程中 $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu$ 会等于 1。不过在 Lagrange 量中(此时运动方程还未得到), 我们还不能认为 $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu$ 等于 1, 只能把它看作是一个可供做变分运算的泛函, 泛函变量是 x^μ 与 dx^μ/ds 。

根据 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial U^\lambda} \right) = 0, \quad (2)$$

我们可以计算得到

$$\frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = -m_0 c \frac{1}{2} \frac{\partial_\lambda g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu}} U^\mu U^\nu, \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial U^\lambda} = -m_0 c g_{\lambda\beta} U^\beta / \sqrt{g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu} = -m_0 c U_\lambda / \sqrt{g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu}. \quad (4)$$

此时可以使用 $\sqrt{g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu} = 1$ 条件, 于是利用 Euler-Lagrange 方程(2), 我们得到质点在引力场(弯曲时空)中的运动方程(短程线方程)

$$\frac{d}{ds} U_\lambda - \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) U^\mu U^\nu = 0. \quad (5)$$

当然, 它其实就等价于协变方程 $dU_\lambda/ds - \Gamma_{\mu\nu\lambda} U^\mu U^\nu = 0$, 其中无挠 Levi-Civita 联络(Christoffel 符号)为 $\Gamma_{\mu,\nu\lambda} = (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda})/2$ 。

上法其实并不新鲜, 在一般广义相对论教材中已经隐含。在上面的方法中, 我们选取了四维时空距离 s 作为演化(发展)参数, 这明显具有广义坐标变换不变性。其实我们也可以选取时间 t 作为演化参数。虽然它不具有明显的广义坐标变换不变性, 但是所得结果与前述方程(1)一致。该法(选取时间 t 作为演化参数)的目的主要是为了将引力场中的质点力学与传统分析力学衔接起来。讨论如下:

在时轴正交情形下, 质点的作用量为

$$\begin{aligned} S &= -m_0 c \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt = -m_0 c \int \sqrt{g_{00} \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} + g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \\ &= -m_0 c \int \sqrt{g_{00} c^2 + g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt, \end{aligned} \quad (6)$$

其中拉丁指标 $i, j = 1, 2, 3$ 。故而质点的 Lagrange 量为

$$L = -m_0 c \sqrt{g_{00} c^2 + g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} = -m_0 c \sqrt{g_{00} c^2 + g_{ij} v^i v^j}, \quad (7)$$

其中三维普通速度为 $v^i = \frac{dx^i}{dt}$, $v^j = \frac{dx^j}{dt}$ 。为了方便, 我们定义一个有效速度 $c' = \sqrt{g_{00}c^2 + g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}$ 。于是我们可以得到

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = -m_0 c \frac{\partial_k g_{ij}}{2c'} v^i v^j - m_0 c \frac{\partial_k g_{00}}{2c'} v^0 v^0, \quad (8)$$

其中 $v^0 v^0 = c^2$, 最终得到

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = -m_0 c \frac{\partial_k g_{\mu\nu}}{2c'} v^\mu v^\nu \quad (9)$$

(时空指标 $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$)。由于 $\frac{1}{c'} v^\mu = \frac{1}{c'} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{dx^\mu}{ds} = U^\mu$, 所以

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = -m_0 c c' \frac{\partial_k g_{\mu\nu}}{2} U^\mu U^\nu. \quad (10)$$

另一方面, 粒子的正则动量为

$$\frac{\partial L}{\partial v^k} = -m_0 c g_{kj} v^j / c' = -m_0 c g_{kj} U^j = -m_0 c U_k. \quad (11)$$

于是根据 Euler-Lagrange 方程 $\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^k} \right) = 0$, 我们就可以得到质点的运动方程

$$\frac{d}{dt} U_k - c' \frac{\partial_k g_{\mu\nu}}{2} U^\mu U^\nu = 0 \quad (12)$$

(空间指标 $k = 1, 2, 3$), 此也即(5) (对应于指标 $\lambda = 1, 2, 3$), 其中用到了 $ds = c' dt$ 。

下面我们来看该法下的质点粒子的哈密顿量 H 。先计算粒子的正则动量 $p_k = \partial L / \partial v^k = -m_0 c U_k$ (空间指标 $k = 1, 2, 3$), 于是根据分析力学, 质点粒子的哈密顿量应当为

$$H = p_k v^k - L = -m_0 c g_{kj} v^j v^k / \sqrt{g_{00}c^2 + g_{ij} v^i v^j} + m_0 c \sqrt{g_{00}c^2 + g_{ij} v^i v^j}, \quad (13)$$

该式子进一步可以写为

$$H = m_0 c \left(g_{00}c^2 + g_{ij} v^i v^j - g_{kj} v^j v^k \right) / \sqrt{g_{00}c^2 + g_{ij} v^i v^j}. \quad (14)$$

我们立即可以看出, 引力场中质点粒子的哈密顿量为

$$H = m_0 v^0 \left(g_{00}c^2 \right) / \sqrt{g_{00}c^2 + g_{ij} v^i v^j} = m_0 U^0 \left(g_{00}c^2 \right) = m_0 c^2 U_0, \quad (15)$$

此即 $H = p_0 c$ (p_0 为四维协变动量第零分量)。这里我们用到了如下关系式 $U^0 = v^0 / \sqrt{g_{00}c^2 + g_{ij} v^i v^j}$ 、 $v^0 = dx^0 / dt = c$ 以及 $U_0 = g_{00} U^0$ 。式(15)的哈密顿量的弱场近似包含了我们所熟悉的牛顿力学机械能:

$$\begin{aligned} H &\cong m_0 c^2 \frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{c^2}}} \cong m_0 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(1 + \frac{GM}{c^2 r} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &\cong m_0 c^2 \left(1 - \frac{GM}{c^2 r} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0 c^2 - \frac{GMm_0}{r} + \frac{1}{2} m_0 v^2. \end{aligned} \quad (16)$$

以上是本作者提出的引力场中质点粒子的分析力学理论方法。该方法说明引力场中质点粒子的四维协变动量第零分量可以看作是一个可测哈密顿量 ($H = p_0 c$), 因此研究四维协变动量在引力波作用下的变化尤为重要。

3. 干涉臂长度和激光波长的纯几何改变(非潮汐加速度贡献)

广义相对论中的(标准)长度、动量受引力波的两类贡献而发生变化: 纯几何意义上的变化、引力潮汐力(引力落差)致使物理量(长度、波长)屈伸。纯几何意义上的长度变化与引力波度规直接有关, 度规的梯度即为(传统的)引力场强, 不过这类效应原则上可以借助等效原理把它们消去。但是, 引力场强的梯度即引力落差也即引力波导致的(质点粒子之间的)潮汐加速度, 与黎曼曲率有关, 它是不可被等效原理消去的。

这里先研究第一类效应(在引力波影响下纯几何意义上的干涉臂长度变化与激光波长变化)。下面先简要介绍 LIGO 干涉仪探测引力波的基本工作原理(这方面文献很多, 例如[2] [3] [4])。LIGO 干涉仪(图 1)由两个相互垂直的长为四千米干涉臂组成, 干涉臂末端悬浮着具高反射率的镜面。在两臂交点处有一个束分器, 激光从光源射出, 光束被束分器一分为二, 进入互相垂直的干涉臂内, 传播四千米后, 被干涉臂末端的反射镜反射回束分器。为了提高干涉臂有效长度, 激光束还可以在干涉臂中来回振荡反射几十到几百次。最终两干涉臂内的激光返回来交会到束分器处, 再汇集到光探测器上, 形成 LIGO 干涉条纹。引力波会导致两干涉臂长度发生大小相反的变化(如一臂的长度略微变长, 另一臂的长度略微缩小), 从而发生由引力波导致的激光干涉相移效应。

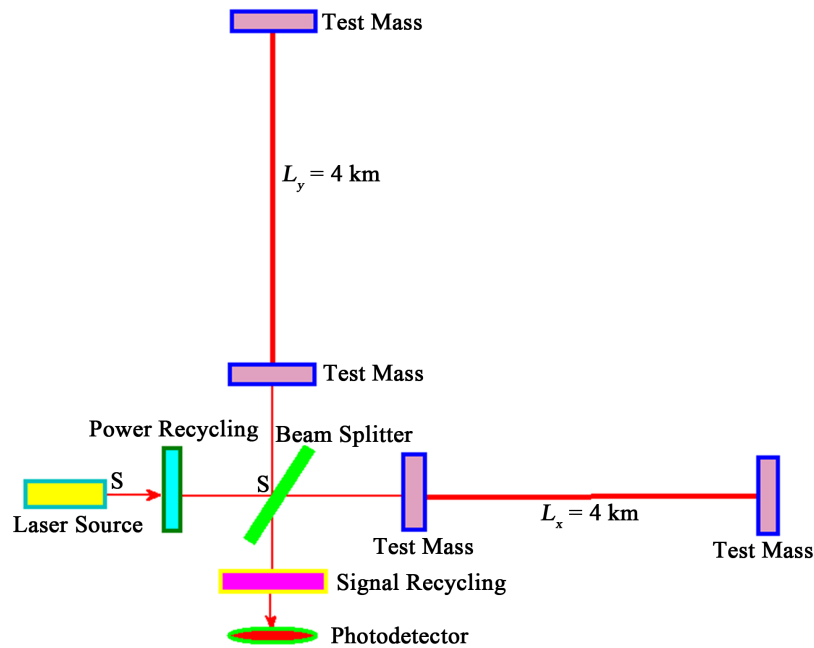


Figure 1. The schematic diagram of LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) [8] [9]. The LIGO detectors at Hanford, WA (H1) and Livingston, LA (L1) are two modified giant Michelson interferometers, which can be used to measure the propagating gravitational-wave amplitudes via extremely tiny length change of their respective two orthogonal interferometer arms. Each 4-km interferometer arm is formed by two test masses (mass mirrors serving as optical resonator mirrors). In order to enhance the interference phase shift (detected at Photodetector) and measure accuracy, each arm comprises an optically resonant cavity (two test mass mirrors) for multiplying the phase shift by a factor of 300. There are a partially transmissive power-recycling mirror at the laser input for dramatically increasing laser input and a partially transmissive signal-recycling mirror at the laser output aiming at optimizing signal extraction of gravitational waves [8]

图 1. 探测引力波的激光干涉仪示意图[8] [9]。位于美国路易斯安那州(Livingston)和华盛顿州(Hanford)的两个引力波激光干涉仪均是巨型迈克尔逊干涉仪, 在每个干涉仪中, 两条互相垂直的干涉臂(两个悬浮镜之间)均长四千米。如果引力波垂直入射 X-Y 平面, 引力波的横波特性能致使 X 与 Y 干涉臂长度发生变化, 从而影响迈克尔逊干涉仪干涉相位。为了放大 LIGO 相移和提高测量精度, 每一个干涉臂包含了一个光学共振腔, 可以让相移放大 300 倍。强的激光功率可以提高干涉相位的测量精度, 位于激光输入端(向干涉臂输入)的功率循环器(Power Recycling, 也称为功率倍增器)可以放大激光功率几千倍; 位于激光输出端(向光探测器输出)的信号循环器(Signal Recycling)可以优化引力波信号提取质量[8]

设时空内存在(横波零迹规范)引力波, 四维时空线元为

$$ds^2 = c^2 dt^2 + (-1 + h_{xx}) dx^2 + (-1 - h_{xx}) dy^2 + 2h_{xy} dx dy - dz^2, \quad (17)$$

其中引力波幅(横波)为 $h_{xx} = h_{xx}(t, z)$, $h_{xy} = h_{xy}(t, z)$, 其数量级为 10^{-21} (无量纲)。引力波传播方向为 Z 轴(垂直于两干涉臂), 巨型迈克尔逊干涉仪中互相垂直的两臂分别位于 X 和 Y 轴, 两束激光分别在两条干涉臂中传播与反射(可多次循环以增大干涉臂有效长度)。两干涉臂两端都挂有悬浮镜(如用石英丝悬挂), 用来反射激光。每条干涉臂两端的悬浮镜之间的距离称为干涉臂长(其逆变长度可以表示为 L^x 、 L^y)。

我们先研究悬浮镜在引力波作用下的运动方程: $dU^\lambda/ds + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda U^\mu U^\nu = 0$, 其中无挠 Levi-Civita 联络(Christoffel 符号)为

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = g^{\lambda\sigma} \Gamma_{\sigma,\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})/2. \quad (18)$$

我们设悬浮镜初始(速度)条件为 $U^0 = 1$, $U^i = 0$ ($i = x, y, z$)。在引力波作用下, 干涉臂长度改变了 ζ^i , 那么悬浮镜速度为 $d\zeta^i/ds$ 。于是悬浮镜运动方程 $dU^\lambda/ds + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda U^\mu U^\nu = 0$ 就退化为 $dU^\lambda/ds + \Gamma_{00}^\lambda U^0 U^0 = 0$ ($\Gamma_{\mu\nu}^\lambda U^\mu U^\nu$ 内其它与 U^i 有关的项因为太小可以不计)。由于 $\Gamma_{00}^\lambda = g^{\lambda\sigma} (\partial_0 g_{\sigma 0} + \partial_0 g_{0\sigma} - \partial_\sigma g_{00})/2 = 0$ ($\lambda = 0, x, y, z$), 由此可以看出, 悬浮镜的加速度为零(包括加速度第零分量 dU^0/ds 与空间纵向分量加速度 dU^z/ds 也为零)。因为 $dU^i/ds = 0$ (i 为空间指标), 我们得到干涉臂终端的悬浮镜速度 U^i 为常数的结论(即 U^i 不因为引力波到来而改变)。既然在引力波到来之前悬浮镜是静止的($U^i = dx^i/ds = 0$), 于是在引力波到来之后, 悬浮镜仍应该静止(因为悬浮镜加速度 $dU^i/ds = 0$), 那么我们进一步有 $U^i = dx^i/ds = 0$ 。这等于说悬浮镜位移改变量 $dx^i = 0$, 即悬浮镜位置没有因为引力波到来而改变。所以, 干涉臂(逆变)长度 L^x , L^y 不变(即 L^x 与 L^y 不受引力波波幅的纯几何意义上的屈伸影响)。

特别值得强调, 由于 $\lambda = 0$ 时, Γ_{00}^λ 也为零, 那么 $dU^0/ds = 0$, 干涉臂终端的悬浮镜的 U^0 为常数(即 U^0 不因为引力波到来而改变)。由于在引力波到来之前, 我们有四维时空线元 $ds = c\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} dt$, 其中 \mathbf{v} 为悬浮镜速度, 那么 $U^0 = dx^0/ds = c dt/ds = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}$ 。由于悬浮镜静止(即 $U^0 = 1$)且一直静止(因为 $dU^0/ds = 0$), 意味着 $U^0 = 1$ (在引力波到来之前), 在引力波到来之后, 仍旧有 $U^0 = 1$, 即 $U^0 = 1/\sqrt{1 - g_{ij} v^i v^j}$ 为 1(指标 i, j 为空间指标), 也即悬浮镜并没有因为引力波到来而运动, 即悬浮镜速度 v^i 恒为零(当然, 这里仅仅研究悬浮镜之短程线运动, 扣除了引力波潮汐加速度的贡献。潮汐加速度贡献将在下节讨论)。

下面研究干涉臂内激光光子的运动。利用 $\hbar k_\lambda = m_0 c U_\lambda$ (k_λ 为光子四维波矢量, 是一个协变矢量; \hbar 为普朗克常数), 由方程(5), 激光波数遵守方程

$$dk_\lambda/ds - (\partial_\lambda g_{\mu\nu}/2) k^\mu U^\nu = 0. \quad (19)$$

由于激光沿着 X 或 Y 臂传播, 所以 k^μ 与 U^ν 在时间分量上与 X, Y 轴分量上都有非零数值。由此光子的四维波矢量(协变波数)方程为

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} k_\lambda - \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{00}) k^0 U^0 - \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{xx}) k^x U^x - \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{yy}) k^y U^y \\ - \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{xy}) k^x U^y - \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{yx}) k^y U^x = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

我们发现: 当指标 $\lambda = x, y$ 时, 所有 $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ (μ, ν 取 x, y) 都为零。这说明 k_x 与 k_y 不变(即不受引力波影响)。但是光子的协变波数 k_z 是有细微变化的(不过 k_z 的变化不会影响干涉相位)。当时空指标 $\lambda = 0$ 时, 显然由于 $h_{xx} = h_{xx}(t, z)$, $h_{xy} = h_{xy}(t, z)$, 故而波数第零分量(激光频率) k_0 是变化的(所以, 激光频率在引力波作用下是要变化的), 从而它使得两干涉臂中的激光不再满足相干条件(我们称之为激光频率“弱相干

(weak coherence)条件”。由此产生的干涉相移是本文的重点，因为它在前人文献内疑似未曾指出)。如仅仅考虑沿着 X 轴干涉臂内传播的光子，方程(20)即为

$$dk_0/ds - (\partial_0 g_{xx})k^x U^x / 2 = 0. \quad (21)$$

由于对光子，我们有 $k^x \rightarrow k^0$ ， $U^x \rightarrow U^0 = dx^0/ds$ ，显然可得 $dk_0/dx^0 - (\partial_0 g_{xx})k^0/2 = 0$ 。此结果也可以这样来说明：在 $dk_0/ds - (\partial_0 g_{xx})k^x U^x / 2 = 0$ 两边乘以静止质量 m_0 (我们不限于讨论光子)，得到

$$m_0 dk_0/ds - (\partial_0 g_{xx})k^x m_0 U^x / 2 = 0. \quad (22)$$

由于四维时空距离是 $ds = \sqrt{g_{00}c^2 + g_{ij}v^i v^j} dt$ ，而对于光子， $\sqrt{g_{00} + g_{ij}v^i v^j/c^2}$ 极限为零， m_0 的极限也为零，但是 $m_0/\sqrt{g_{00} + g_{ij}v^i v^j/c^2}$ 这个 0/0 的极限并不为零，而是正比于 k_0/c 。于是我们得到

$$(k_0/c)dk_0/dx^0 - (\partial_0 g_{xx})k^x (k_0/c)/2 = 0, \quad (23)$$

其中用了 $m_0 U^x \rightarrow k_0/c$ 。最终我们也可以得到 $dk_0/dx^0 - (\partial_0 g_{xx})k^0/2 = 0$ 。在该式两边对时间积分一次，再利用引力波波幅 $g_{xx} = -1 + h_{xx}$ ，我们发现 k_0 的改变量 δk_0 满足方程：

$$\delta k_0 - h_{xx} k^0 / 2 = 0. \quad (24)$$

此结论即为第 6 节即将用另法($k_\mu k^\mu = 0$)得到的干涉激光频率改变量 $\delta\omega_x = \omega h_{xx}/2$ [即本文用两法证明了激光频率在引力波作用下是要发生改变的，且 X 与 Y 轴上的激光频率改变量相反，由此我们认为，这将导致 LIGO 中的因频移引发的“弱相干相移”(weak-coherence phase shift)].

本节结论：上面已经证明激光光子的协变波数 k_x 、 k_y 不受引力波影响；干涉臂(逆变)长度 L^x 、 L^y 也不变，故而干涉相位 $k_x L^x$ 与 $k_y L^y$ 不受引力波影响。但是，X 与 Y 轴上的激光频率在引力波作用下是要发生改变的(改变量相反，即 $\delta\omega_x = +\omega h_{xx}/2$ 和 $\delta\omega_y = -\omega h_{xx}/2$)，由此将导致 LIGO 中的弱相干相移(我们将在第 6 节专门研究弱相干相移)。

以上是从激光场的协变波数与干涉臂的逆变长度等角度来看待干涉相位的。在微分几何中，任何矢量物理量都有协变与逆变之分(如协变时间、逆变时间；协变坐标、逆变坐标；协变动量、逆变动量)。虽然这些量并无直接度量的意义，但是对于计算可测标量(如干涉相位)，十分方便。通常，这些物理量(协变与逆变矢量)也可以转化为标准(固有)量，此时才具有直接的度量意义，我们来研究干涉臂的标准(固有)长度与干涉光子的标准(固有)波数。我们只看一条干涉臂(X 轴干涉臂)，其标准长度 $L_{\text{stan}}^x = \sqrt{-g_{xx}} L^x$ ，而激光光子的标准波数为 $k_{\text{stan}} = \sqrt{-g^{xx}} k_x$ ，于是干涉相位

$$L_{\text{stan}}^x k_{\text{stan}} = (\sqrt{-g_{xx}} L^x) (\sqrt{-g^{xx}} k_x) = L^x k_x \quad (25)$$

不变(因为在精确到引力波幅度平方 h^2 的条件下， g_{xx} 与 g^{xx} 互为倒数)。或者也可以做这样的理解：由激光光子标准波数 $k_{\text{stan}} = \sqrt{-g^{xx}} k_x$ ，激光标准波长为

$$\lambda_{\text{stan}} = 2\pi / (\sqrt{-g^{xx}} |k_x|) = 2\pi \sqrt{-g_{xx}} / |k_x| \quad (26)$$

(注：在本文的度规选择法 $g_{\mu\nu} = \text{diag}[+1, -1, -1, -1]$ 中，协变波数 k_x 是一个负数)。干涉相位就是 $-2\pi L_{\text{stan}}^x / \lambda_{\text{stan}}$ 。尽管干涉臂标准长度 L_{stan}^x 在引力波作用下会屈伸，但与此同时激光标准波长 λ_{stan} 在引力波作用下也以同等比例屈伸(即被测长度与标准尺共同拉伸或收缩，比例系数都是 $\sqrt{-g^{xx}}$)，所以最终干涉相位并不受引力波影响，干涉臂的标准臂长的纯几何形变其实不可测。以上多种理解(无论就物理意义还是数学表述)其实都是等价的。

4. 引力波潮汐加速度导致悬浮镜相对于短程线的偏离方程

我们研究干涉臂两端悬浮镜的相对加速度(由引力波潮汐力引起) [12]

$$\frac{D^2 \xi^\lambda}{ds^2} + R^\lambda_{\sigma\mu\nu} L^\mu U^\sigma U^\nu = 0. \quad (27)$$

这里, 黎曼曲率张量是

$$R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\mu\tau} \Gamma^\tau_{\nu\sigma} - \Gamma^\tau_{\sigma\mu} \Gamma^\lambda_{\tau\nu}. \quad (28)$$

L^μ 就是 X、Y 臂(逆变)长度(L^x , L^y)。注意: 只有当引力波波长远大于 L^x , L^y (且观察时间远远小于 L^x/c , L^y/c) 公式(27)才成立, 否则需要将干涉臂 L^x , L^y 进行一段段分割讨论。注意:

$$D^2 \xi^\lambda / ds^2 = d^2 \xi^\lambda / ds^2 + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\mu U^\nu, \quad (29)$$

这部分已经在前面讨论, 所以这里不再讨论 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\mu U^\nu$ 项。黎曼曲率张量内的 $\Gamma^\lambda_{\mu\tau} \Gamma^\tau_{\nu\sigma} - \Gamma^\tau_{\sigma\mu} \Gamma^\lambda_{\tau\nu}$ 因为太小(在精确到引力波幅度平方 h^2 下才为非零, 在精确到 h 时完全可以看作为零), 故而不必讨论该项。于是根据公式(27), 我们有退化的方程

$$d^2 \xi^z / ds^2 + (\partial_z \Gamma^z_{00} - \partial_0 \Gamma^z_{z0}) L^z = 0. \quad (30)$$

显然由于 $\partial_z \Gamma^z_{00} - \partial_0 \Gamma^z_{z0}$ 与 L^z 都为零, 故而悬浮镜在 Z 方向的相对加速度 $d^2 \xi^z / ds^2$ 为零; 对于 $D^2 \xi^0 / ds^2 + R^0_{0\mu 0} L^\mu U^0 U^0 = 0$, 由于 $R^0_{0\mu 0}$ 为零, 故而 ξ^0 的变化率没有讨论意义。下面我们来看 X 轴干涉臂两端的悬浮镜在 X 轴上的相对加速度:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi^x}{ds^2} + (\partial_x \Gamma^x_{00} - \partial_0 \Gamma^x_{x0}) L^x + (\partial_y \Gamma^x_{00} - \partial_0 \Gamma^x_{y0}) L^y &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 \xi^x}{ds^2} - \partial_0 \Gamma^x_{x0} L^x - \partial_0 \Gamma^x_{y0} L^y &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

由于 $\Gamma^x_{x0} = g^{xx} \Gamma_{x,x0} + g^{xy} \Gamma_{y,x0}$ (右边第二项 $g^{xy} \Gamma_{y,x0}$ 因为属于引力波幅度平方 h^2 量级, 故其太小, 可不计), 所以

$$\Gamma^x_{x0} = g^{xx} \Gamma_{x,x0} = -(1/2)(\partial_0 g_{xx} + \partial_x g_{0x} - \partial_x g_{x0}) = -(1/2) \partial_0 g_{xx}. \quad (32)$$

另, $\Gamma^x_{y0} = g^{xx} \Gamma_{x,y0} + g^{xy} \Gamma_{y,y0}$ (右边第二项 $g^{xy} \Gamma_{y,y0}$ 太小故不计), 所以

$$\Gamma^x_{y0} = g^{xx} \Gamma_{x,y0} = -(1/2)(\partial_0 g_{xy} + \partial_y g_{0x} - \partial_x g_{y0}) = -(1/2) \partial_0 g_{xy}. \quad (33)$$

由于引力波度规 $g_{xx} = -1 + h_{xx}$, $g_{xy} = h_{xy}$, 以及 ds 高度精确等于 cdt , 由(31)我们有

$$d^2 \xi^x / dt^2 + ((\partial^2 h_{xx} / \partial t^2) L^x + (\partial^2 h_{xy} / \partial t^2) L^y) / 2 = 0. \quad (34)$$

同理, Y 轴干涉臂两端的悬浮镜在 Y 轴上的相对加速度为

$$d^2 \xi^y / dt^2 + (-(\partial^2 h_{xx} / \partial t^2) L^y + (\partial^2 h_{xy} / \partial t^2) L^x) / 2 = 0. \quad (35)$$

对以上两相对加速度关于时间积分两次, 可以得到重要结论(两干涉臂在引力波潮汐加速度作用下的屈伸长度, 此为 LIGO 干涉相移来源之一):

$$\delta L^x = \xi^x = -\frac{1}{2}(h_{xx} L^x + h_{xy} L^y), \quad \delta L^y = \xi^y = -\frac{1}{2}(-h_{xx} L^y + h_{xy} L^x). \quad (36)$$

由(35)式, 我们可以得到悬浮镜速度 $d\xi^y / dt = -(\partial h_{xx} / \partial t) L^y + (\partial h_{xy} / \partial t) L^x$ 。

由于 $\partial h_{xx}/\partial t$ 数量级为 $\omega_g h_{xx}$ (ω_g 为引力波频率), 那么在引力波潮汐力作用下, 悬浮镜速度数量级为 $\omega_g h_{xx} L$

(此数值含有两个小因子 L/λ_g 和 h_{xx} , λ_g 为引力波波长)。悬浮镜速度对上节所计算的速度 $U^i = dx^i/ds$ 和 $U^0 = dx^0/ds$ 的修正, 是微乎其微的(即为 h_{xx}^2 量级, 可以不计), 例如 $U^0 = 1/\sqrt{1-g_{ij}v^i v^j}$ 中的 $g_{ij}v^i v^j$ 就是 h_{xx}^2 和 h_{xy}^2 量级。

根据式(27), 我们研究悬浮镜的短程线偏离方程之第零分量: $\frac{D^2 \xi^0}{ds^2} + R^0_{\sigma\mu\nu} L^\mu U^\sigma U^\nu = 0$ 。根据实际情况, 该式应退化为 $\frac{D^2 \xi^0}{ds^2} + R^0_{0\mu 0} L^\mu U^0 U^0 = 0$ 。显然, 由于黎曼曲率张量分量 $R^0_{0\mu 0} = 0$, 这就导致悬浮镜速度第零分量不存在短程线偏离, 它仍旧遵守短程线方程 $\frac{D^2 \xi^0}{ds^2} = 0$ 。

为简化, 下面我们仅仅考虑 h_{xx} 的贡献, 不考虑 h_{xy} 。则根据(36)式, X与Y干涉臂逆变长度改变量分别为 $\delta L^x = \xi^x = -\frac{1}{2} h_{xx} L^x$ 、 $\delta L^y = \xi^y = \frac{1}{2} h_{xx} L^y$ 。于是干涉相位改变量为(假设光子在X与Y干涉臂上各自来回一次)

$$\Delta\phi = 2\left(|k_x| \xi^x - |k_y| \xi^y\right) = 2\left(-\frac{1}{2}|k_x| h_{xx} L^x - \frac{1}{2}|k_y| h_{xx} L^y\right) = -2|k_x| h_{xx} L. \quad (37)$$

这里我们假设了 $|k_y| = |k_x|$ 与 $L^x = L^y = L$ (前者当然成立, 后者是LIGO实验设置)。如果激光在干涉臂循环 n 次, 那么干涉相位移动量就放大 n 倍, 该相移(起源于引力波潮汐力导致干涉臂长度变化)为

$$\Delta\phi = -2n|k_x| h_{xx} L \quad (38)$$

以上相移(起源于引力波潮汐力导致干涉臂长度变化)其实是熟知的结果(针对引力波波长远远大于LIGO干涉臂的情形)。

注意: 上节已经论证, 引力波振幅 h_{xx} 的存在, 不会改变激光协变波数 $|k_x|$ 。当然, 因为引力波幅毕竟还含时空坐标, 因此会导致引力波潮汐加速度。引力波潮汐力的存在, 会改变激光协变波数 $|k_x|$ (这一点在下节会详细论述), 但如果引力波波长远远长于LIGO干涉臂长, 那么激光协变波数 $|k_x|$ 改变量可以不计, 例如引力波事件GW150914与GW151226中, 频率为200赫兹的引力波波长为 1.5×10^6 米, 远大于LIGO干涉臂长(4千米)。

下面研究一下激光在干涉臂循环 n 次所需要的时间 Δt 。粗略地说, 这个结果就是 $\Delta t = t - t_x^{(0)} = 2nL/c$ (其中 $t_x^{(0)}$ 为X轴干涉臂内的激光从激光源出来、然后在分束镜透过的时刻, t 为激光经过在X轴干涉臂 n 次来回振荡后回到分束镜的时刻)。但实际上我们需要细致计算: 根据光子短程线上的四维时空距离定义, 针对在X轴干涉臂的光子, 我们根据 $0 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, 有 $c^2 dt^2 = (1 - h_{xx})(L^x)^2$ 。由于引力波潮汐加速度使得逆变臂长 L^x 变化为 $L^x(1 - h_{xx}/2)$, 于是原方程 $c^2 dt^2 = (1 - h_{xx})(L^x)^2$ 需要变为 $c^2 dt^2 = (1 - h_{xx})[L^x(1 - h_{xx}/2)]^2$, 即 $c^2 dt^2 = (1 - h_{xx})^2 (L^x)^2$, 从而 $L^x = c(1 + h_{xx})dt$ 。于是激光在干涉臂循环 n 次所需要的时间 $\Delta t = t - t_x^{(0)}$ 可以由下式获得:

$$2nL = \int_{t_x^{(0)}}^t c(1 + h_{xx}) dt. \quad (39)$$

同理, 针对在Y轴干涉臂的光子, 在干涉臂循环 n 次所需要的时间 $\Delta t = t - t_y^{(0)}$ 可以由下式获得:

$$2nL = \int_{t_y^{(0)}}^t c(1 - h_{xx}) dt, \quad (40)$$

其中 $t_y^{(0)}$ 为Y轴干涉臂内的激光从激光源出来、然后到达分束镜并透过分束镜的时刻， t 也为激光经过在Y轴干涉臂 n 次来回振荡后回到分束镜的时刻。

由于引力波潮汐力缘故，X轴逆变长度变为 $L(1-h_{xx}/2)$ ，故在X轴干涉臂上循环振荡一次获得的相位为 $|k_x| \cdot 2L(1-h_{xx}/2)$ ， n 次循环就得相位 $|k_x| \cdot 2nL(1-h_{xx}/2)$ ，但此处 $2nL$ 需要用式(39)代入，那么X轴干涉臂上 n 次循环累积相位就为

$$\phi_x = |k_x| \int_{t_x^{(0)}}^t c(1+h_{xx}) \left(1 - \frac{h_{xx}}{2}\right) dt = |k_x| c \int_{t_x^{(0)}}^t \left(1 + \frac{h_{xx}}{2}\right) dt. \quad (41)$$

获得此结果的更为严密的方法是使用分段分析法：激光在X轴干涉臂上传播一段距离 Δl (Δl 远小于 L) 获得的相位为 $|k_x| \cdot (\Delta l)(1-h_{xx}/2)$ ，而经过这段距离 Δl 需要的时间的计算可以参考(39)，即 $\Delta l = \int_{t'}^{t''} c(1+h_{xx}) dt$ ，那么该相位 $|k_x| \cdot (\Delta l)(1-h_{xx}/2)$ 就被化为

$|k_x| \int_{t'}^{t''} c(1+h_{xx})(1-h_{xx}/2) dt = |k_x| \int_{t'}^{t''} c(1+h_{xx}/2) dt$ ，于是X轴干涉臂上 n 次循环(有效臂长是 $2nL$) 累积相位就是(41)。同理，由于引力波潮汐加速度的缘故，Y轴逆变长度变为 $L(1+h_{xx}/2)$ ，故在Y轴上循环一次相位为 $|k_x| \cdot 2L(1+h_{xx}/2)$ 。激光在Y轴干涉臂上经历 n 次循环振荡后就获得相位 $|k_x| \cdot 2nL(1+h_{xx}/2)$ 。考虑到式(40)，Y轴干涉臂上 n 次循环累积相位为

$$\phi_y = |k_x| \int_{t_y^{(0)}}^t c(1-h_{xx}) \left(1 + \frac{h_{xx}}{2}\right) dt = |k_x| c \int_{t_y^{(0)}}^t \left(1 - \frac{h_{xx}}{2}\right) dt. \quad (42)$$

于是，LIGO巨型迈克尔逊干涉仪相移(起源于引力波潮汐力导致干涉臂长度变化)为

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = |k_x| c \left(t_y^{(0)} - t_x^{(0)} \right) + \frac{1}{2} |k_x| c \left(\int_{t_x^{(0)}}^t h_{xx} dt + \int_{t_y^{(0)}}^t h_{xx} dt \right). \quad (43)$$

这两项是同阶小量，都不可忽略不计。我们可以先在定性上分析一下：如果引力波频率很低，或引力波波长远远大于干涉臂长(在引力波事件GW150914与GW151226中，引力波波长是干涉臂长的几百倍。当然对于实际LIGO情形还要考虑 n 次循环振荡导致的有效臂长 nL)， h_{xx} 可以近似看作与时间关系不大，上式可以近似写为

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = |k_x| c \left(t_y^{(0)} - t_x^{(0)} \right) + \frac{1}{2} |k_x| c \left[h_{xx} \left(t - t_x^{(0)} \right) + h_{xx} \left(t - t_y^{(0)} \right) \right]. \quad (44)$$

由(39)和(40)，我们有 $2nL/(1+h_{xx}) = c(t-t_x^{(0)})$ 、 $2nL/(1-h_{xx}) = c(t-t_y^{(0)})$ ，于是

$$c \left(t_y^{(0)} - t_x^{(0)} \right) = -4nLh_{xx}, \quad c \left[h_{xx} \left(t - t_x^{(0)} \right) + h_{xx} \left(t - t_y^{(0)} \right) \right] = 4nLh_{xx}. \quad (45)$$

那么LIGO巨型迈克尔逊干涉仪相移(属于“潮汐相移”)为

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = -2|k_x| nLh_{xx}. \quad (46)$$

这与前面结果(38)相同。

LIGO巨型迈克尔逊干涉仪相移还有其它表示形式：激光在X臂与Y臂上循环传播得到的相位分别是

$$\phi_x = |k_x| c \int_{t_x^{(0)}}^t \left(1 + \frac{h_{xx}}{2}\right) dt = |k_x| c \left(t - t_x^{(0)} \right) + \frac{|k_x| c}{2} \int_{t_x^{(0)}}^t h_{xx} dt, \quad (47)$$

$$\phi_y = |k_x| c \int_{t_y^{(0)}}^t \left(1 - \frac{h_{xx}}{2}\right) dt = |k_x| c \left(t - t_y^{(0)} \right) - \frac{|k_x| c}{2} \int_{t_y^{(0)}}^t h_{xx} dt. \quad (48)$$

我们分别代 $2nL(1-h_{xx})=c(t-t_x^{(0)})$ 与 $2nL(1+h_{xx})=c(t-t_y^{(0)})$ 入上两式, 得到

$$\begin{aligned}\phi_x &= |k_x| \cdot 2nL(1-h_{xx}) + \frac{|k_x|c}{2} \int_{t_x^{(0)}}^t h_{xx} dt \\ &= |k_x| \cdot 2nL - |k_x| \cdot 2nLh_{xx} + \frac{|k_x|c}{2} \int_{t_x^{(0)}}^t h_{xx} dt,\end{aligned}\quad (49)$$

$$\begin{aligned}\phi_y &= |k_x| \cdot 2nL(1+h_{xx}) - \frac{|k_x|c}{2} \int_{t_y^{(0)}}^t h_{xx} dt \\ &= |k_x| \cdot 2nL + |k_x| \cdot 2nLh_{xx} - \frac{|k_x|c}{2} \int_{t_y^{(0)}}^t h_{xx} dt.\end{aligned}\quad (50)$$

值得注意的是, 如果引力波波长比有效臂长 nL 要长很多, $2nLh_{xx}$ 可以近似写为 $c \int_{t-2nL/c}^t h_{xx} dt$, 而 $\int_{t_x^{(0)}}^t h_{xx} dt$ 内的 $t_x^{(0)}$ 与 $\int_{t_y^{(0)}}^t h_{xx} dt$ 内的 $t_y^{(0)}$ 也近似等于 $t-2nL/c$, 故而激光在X臂与Y臂上循环传播得到的相位分别可以化为

$$\phi_x = |k_x| \cdot 2nL - \frac{|k_x|c}{2} \int_{t-2nL/c}^t h_{xx} dt, \quad \phi_y = |k_x| \cdot 2nL + \frac{|k_x|c}{2} \int_{t-2nL/c}^t h_{xx} dt.\quad (51)$$

这种写法, 其物理含义是十分明确的, 因为它们就是

$$\phi_x = |k_x|c \int_{t-2nL/c}^t \left(1 - \frac{h_{xx}}{2}\right) dt, \quad \phi_y = |k_x|c \int_{t-2nL/c}^t \left(1 + \frac{h_{xx}}{2}\right) dt.\quad (52)$$

这两个表达式可以诠释如下: 由于引力波潮汐加速度的存在, X臂长度变化为原先的 $1 - \frac{h_{xx}}{2}$ 倍, Y臂长度变化为原先的 $1 + \frac{h_{xx}}{2}$ 倍, 上面(52)体现了这一点。

顺便提及, 使用式(39)与(40), 由 $\int_{t_x^{(0)}}^t c(1+h_{xx})dt = \int_{t_y^{(0)}}^t c(1-h_{xx})dt$, 我们可以得到 $c(t-t_x^{(0)}) + c \int_{t_x^{(0)}}^t h_{xx} dt = c(t-t_y^{(0)}) - c \int_{t_y^{(0)}}^t h_{xx} dt$, 也即

$$c(t_y^{(0)} - t_x^{(0)}) = -c \left(\int_{t_x^{(0)}}^t h_{xx} dt + \int_{t_y^{(0)}}^t h_{xx} dt \right).\quad (53)$$

于是LIGO巨型迈克尔逊干涉仪相移(起源于引力波潮汐力导致干涉臂长度变化)也可以写为

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = \frac{1}{2}|k_x|c(t_y^{(0)} - t_x^{(0)}).\quad (54)$$

值得注意的是, 对于光子, 由于 $\omega dt - k_x dx = 0$, 那么 $k_x dx$ 的累积也可以转化为时间上 ωdt 的累积。不过, 需要注意的是频率需要用 $\omega(1+h_{xx}/2)$ 来代替(这个结论将在本文后面论证), 于是在X轴干涉臂上相位为 $\phi_x = \omega(1+h_{xx}/2)(t-t_x^{(0)})$ 。使用 $2nL/(1+h_{xx}) = c(t-t_x^{(0)})$, 可得激光在X轴干涉臂内循环传播得到的相位

$$\phi_x = \omega(1+h_{xx}/2) \frac{2nL}{c(1+h_{xx})} = \frac{\omega}{c} \cdot 2nL \cdot \left(1 - \frac{h_{xx}}{2}\right).\quad (55)$$

对于Y轴干涉臂, 频率需要用 $\omega(1-h_{xx}/2)$ 来代替(这个结论将在本文后面论证), 于是在Y轴干涉臂上相位为 $\phi_y = \omega(1-h_{xx}/2)(t-t_y^{(0)})$ 。使用 $2nL/(1-h_{xx}) = c(t-t_y^{(0)})$, 得到激光在Y轴干涉臂内循环传播得到的相位

$$\phi_y = \omega \left(1 - \frac{h_{xx}}{2}\right) \frac{2nL}{c(1-h_{xx})} = \frac{\omega}{c} \cdot 2nL \cdot \left(1 + \frac{h_{xx}}{2}\right).\quad (56)$$

于是LIGO巨型迈克尔逊干涉仪相移(起源于引力波潮汐加速度导致干涉臂长度变化)为

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = -\frac{\omega}{c} \cdot 2nLh_{xx} = -2|k_x|nLh_{xx}. \quad (57)$$

我们之所以在这里给出潮汐相移的多种表达法, 乃为促进对下面所要钻研的由X和Y轴干涉臂激光频移(X与Y干涉臂内的光波有略微不同的频率)产生的弱相干LIGO相移的理解。为了与弱相干相移 $\Delta\phi_{\text{weak}}$ 区分, 上面的潮汐相移 $\Delta\phi$ 在下文将表示为 $\Delta\phi_{\text{tidal}}$ 。

特别需要强调的是, 从激光源(Laser Source)到束分器(Beam Splitter)这段距离SS(见图1)对于两束光而言都是需要传播的相同路径, 故由此产生的相位是一样的, 它们并不导致干涉相位的移动, 所以可以不计。但也得说明一点, 由于干涉的两束光在X, Y干涉臂上所驻时间并不同, 它们从激光源出发, 其实是在不同时刻($t_x^{(0)}$ 、 $t_y^{(0)}$)到达束分器的。由于引力波振幅 h_{xx} 是含时的, 故由于引力波潮汐加速度影响, 从激光源到束分器这段距离长度SS是随时间变化的, 对X, Y干涉臂两束光而言, 它们在这段距离SS产生的相位其实是略微不同的, 因此也能导致LIGO干涉相移。但由于这段距离SS太短, 最终这个相移仍旧可以忽略不计。类似(39)与(40), 我们有

$$L_{\text{SS}} = \int_{t_x^{(i)}}^{t_x^{(0)}} c[1+h_{xx}(t)]dt, \quad L_{\text{SS}} = \int_{t_y^{(i)}}^{t_y^{(0)}} c[1+h_{xx}(t)]dt. \quad (58)$$

由于 $t_x^{(0)} \neq t_y^{(0)}$, 所以 $t_x^{(0)} - t_x^{(i)} \neq t_y^{(0)} - t_y^{(i)}$ 。 $t_x^{(i)}$ 与 $t_y^{(i)}$ 分别为X与Y轴干涉臂内的激光从激光源出来的时刻, $t_x^{(0)}$ 与 $t_y^{(0)}$ 分别为X与Y轴干涉臂内的激光到达束分器的时刻。对于将在X, Y干涉臂上传播的两束光, 它们在SS这段距离上的相位各自是

$$\phi_{x(\text{SS})} = |k_x|c \int_{t_x^{(i)}}^{t_x^{(0)}} \left(1 + \frac{h_{xx}(t)}{2}\right) dt, \quad \phi_{y(\text{SS})} = |k_y|c \int_{t_y^{(i)}}^{t_y^{(0)}} \left(1 + \frac{h_{xx}(t)}{2}\right) dt. \quad (59)$$

说明: 由于SS这段距离位于X轴上, 所以(59)内的被积式均是 $1 + \frac{h_{xx}(t)}{2}$ 。由于引力波振幅 h_{xx} 是含时的, 这两个相位并不相等。但是由于SB长度 L_{SB} 远远小于两个干涉臂长(4 km), 故而 $\phi_{x(\text{SS})}$ 与 $\phi_{y(\text{SS})}$ 可以被忽略不计。

需要指出, 以上是干涉臂逆变长度的改变量(并非标准长度的改变量)。值得一提的是, 前面提到过的干涉臂标准长度(几何意义上的)改变量与这里得到的干涉臂逆变长度的改变量(因引力波潮汐力引起)恰好相等。如: 干涉臂标准长度平方是

$$L_{\text{stan}}^2 = -(g_{xx}L^xL^x + g_{yy}L^yL^y + 2g_{xy}L^xL^y), \quad (60)$$

利用引力波 $g_{xx} = -1 + h_{xx}$, $g_{yy} = -1 + h_{yy} = -1 - h_{xx}$, 干涉臂标准长度为

$$L_{\text{stan}}^2 = L^xL^x + L^yL^y - h_{xx}L^xL^x - h_{yy}L^yL^y - 2h_{xy}L^xL^y. \quad (61)$$

于是其改变量是

$$\delta L_{\text{stan}}^2 = -h_{xx}L^xL^x + h_{xx}L^yL^y - 2h_{xy}L^xL^y. \quad (62)$$

另一方面, 由引力波潮汐加速度伸缩导致的改变量是 $\delta(L^xL^x + L^yL^y) = 2L^x\delta L^x + 2L^y\delta L^y$ 。由前面已得的(36), 我们发现, 显然 $\delta(L^xL^x + L^yL^y)$ 等于 δL_{stan}^2 。特别强调: 虽然干涉臂标准长度的改变量 δL_{stan} 与这里的干涉臂逆变长度的改变量 δL^x (及 δL^y)(因引力波潮汐力)恰好相等, 但这是两个起源压根不同的伸缩, 不可混为一谈(不可将它们看作是同一长度伸缩的不同体现)。前者属于弯曲时空几何量的改变, 后者来源于引力波潮汐加速度($R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu}L^{\mu}U^{\sigma}U^{\nu}$)对其的伸缩贡献。前者因为是几何量的改变, 故而不可测(在引

力波作用下, 干涉臂标准长度 L_{stan}^x 与激光标准波长 λ_{stan} 以同等比例屈伸, 即被测长度与标准尺共同拉伸或收缩, 后者才是由真正的引力(引潮力)产生的干涉臂长度伸缩(引力潮汐力才是真正的可测引力, 它不可利用等效原理抵消掉)。前者即使在静态引力“波”情形(即所谓静场条件下)也可出现, 但后者在静场条件下并不出现(这可以从式(35)看出)。

前面已经论证: 激光光子协变波数 k_x, k_y (在 $-\Gamma_{\mu\nu\lambda} k^\mu U^\nu$ 项作用下)不变, 此即意味着由此定义的“逆变”波长也不变, 但是激光标准波长 λ_{stan} 是要受到引力波影响的(因为 $\lambda_{\text{stan}} = 2\pi/(\sqrt{-g^{xx}} |k_x|)$)。不过它与干涉臂标准长度 L_{stan}^x 同等比例伸缩, 实际上并无可观测效应(即无干涉相位的移动)。

5. 引力波潮汐加速度致使激光波长胀缩效应

激光波长能否在引力波潮汐力作用下伸缩? 由(27), $Dk^\lambda/ds + R^\lambda_{\sigma\mu\nu} L^\mu U^\sigma k^\nu = 0$ ($\hbar k^\lambda = m_0 c U^\lambda$, k^λ 为光子的四维波矢量), 取指标 $\lambda = 0$,

$$R^0_{\sigma\mu\nu} L^\mu U^\sigma k^\nu = R^0_{0\mu 0} L^\mu U^0 k^0 + R^0_{x\mu x} L^\mu U^x k^x + R^0_{y\mu y} L^\mu U^y k^y + R^0_{x\mu y} L^\mu U^x k^y + R^0_{y\mu x} L^\mu U^y k^x. \quad (63)$$

(μ 取 x, y)。由于非零的黎曼曲率张量分量为 $R_{x0x0} = -h_{xx,00}/2$, $R_{y0y0} = -R_{x0x0} = -h_{yy,00}/2$, $R_{x0y0} = R_{y0x0} = -h_{xy,00}/2$, 于是我们可以判断 $R^0_{\sigma\mu\nu} L^\mu U^\sigma k^\nu$ 中所有项都为零, 所以激光光子 k^0 并不受到引力波潮汐加速度影响。

取指标 $\lambda = x$ (针对 X 轴干涉臂), 我们有

$$R^x_{\sigma\mu\nu} L^\mu U^\sigma k^\nu = R^x_{0\mu 0} L^\mu U^0 k^0 + R^x_{x\mu x} L^\mu U^x k^x + R^x_{y\mu y} L^\mu U^y k^y + R^x_{x\mu y} L^\mu U^x k^y + R^x_{y\mu x} L^\mu U^y k^x. \quad (64)$$

(μ 取 x, y)。当 μ 取 x , 非零项仅仅有 $R^x_{0x0} L^x U^0 k^0$; 当 μ 取 y , 非零项仅仅有 $R^x_{0y0} L^y U^0 k^0$ 。由于 $R^x_{0x0} L^x U^0 k^0 = (h_{xx,00}/2) L^x U^0 k^0$, $R^x_{0y0} L^y U^0 k^0 = (h_{xy,00}/2) L^y U^0 k^0$, 故而由 $Dk^\lambda/ds + R^\lambda_{\sigma\mu\nu} L^\mu U^\sigma k^\nu = 0$, 我们得到

$$Dk^x/ds + (h_{xx,00} L^x/2 + h_{xy,00} L^y/2) U^0 k^0 = 0. \quad (65)$$

先不去计及 Dk^x/ds 内的 Levi-Civita 联络(Christoffel 符号)导致的 k^x 改变(于是把协变导数 Dk^x/ds 改为普通导数 dk^x/ds), 且考虑到 $U^0 = dx^0/ds$, 故而

$$dk^x/dx^0 + (h_{xx,00} L^x/2 + h_{xy,00} L^y/2) k^0 = 0. \quad (66)$$

对该方程两边作关于时间的积分, 可以得到: $\delta k^x + (h_{xx,0} L^x/2 + h_{xy,0} L^y/2) k^0 = 0$, 或者

$$\delta k^x/k^0 = -(h_{xx,0} L^x/2 + h_{xy,0} L^y/2). \quad (67)$$

我们来估算一下这个变化量 $\delta k^x/k^0$: $h_{xx,0}$ 量级为 $(\omega_g/c) h_{xx} = (2\pi/\lambda_g) h_{xx}$, $h_{xy,0}$ 量级为 $(\omega_g/c) h_{xy} = (2\pi/\lambda_g) h_{xy}$ (ω_g 为引力波角频率, λ_g 为引力波波长)。于是我们可以得到 $\delta k^x/k^0$ 的数量级为 $h_{xx} L^x/\lambda_g$ 与 $h_{xy} L^y/\lambda_g$ 。由于地面上的 LIGO 探测到的引力波频率约为 10~1000 Hz, 引力波波长 λ_g 为 10^6 m 数量级左右, 而 LIGO 干涉臂长 L^x, L^y 为 4 km (路易斯安那州(Livingston)和华盛顿州(Hanford)的两个 LIGO), 所以 L^x/λ_g 与 L^y/λ_g 只有千分之几。由此说明, 由引力波潮汐力导致的 $\delta k^x/k^0$ (与激光波长伸缩有关)对于地面上的 LIGO 而言可以不计, 但是对于太空中的 LISA(Laser interference space antenna), 由于干涉臂长 L^x, L^y 变长很多倍, 可以与 100 Hz 的引力波波长比拟, 故而该由引力波潮汐加速度致使的激光波长伸缩效应需要考虑(当然 LISA 力图探测低频的引力波, 如 1 Hz 以下情形, 那么它也不一定需要考

考虑该效应)。

本文总结出影响“激光干涉引力波探测仪”(LIGO)五个干涉相移的物理来源,其中第一二个来源(干涉臂标准长度的纯几何改变、激光标准波长的纯几何改变)均属于非潮汐力贡献,它们恰好互相抵消。过去关于引力波探测的基本文献内一般不提及这两个因素,也是因它们恰好抵消所致。第三个来源是干涉臂长度受潮汐力影响导致的改变(属引力波潮汐力贡献),这正是激光干涉引力波观察仪所探测的目标,也是文献内所强调的 LIGO 干涉相移。第四个来源是激光波长受潮汐力影响导致的胀缩效应(属引力波潮汐力贡献),其在地基 LIGO 观察仪中不重要,因为所探测引力波的波长远比 LIGO 干涉臂长几个数量级。下面即将讨论的第五个来源系激光频率的弱相干效应,是本文重点。一般 LIGO 文献认为沿着 X 和 Y 轴干涉臂的激光因为来自同一个激光源,故而频率相等,满足相干性条件。但是实际上,由于引力波的存在,这两支干涉臂内的激光频率会发生相反的移动(我们称之为“弱相干性”),本文将用多种计算方法(光子短程线方程以及激光零波数方程)证明了这一点,因此我们相信由于激光频率弱相干性, LIGO 内应当还存在“弱相干相移”。这一点在实验上有待精确的 LIGO 数据分析来验证。

6. 激光频率的弱相干性导致的 LIGO 相移

我们指出 X 与 Y 轴干涉臂内的激光在引力波作用下有不同的频移。激光频率的弱相干性是本文讨论的一个重点。在引力波到来之前,巨型迈克尔逊 LIGO 干涉仪 X 与 Y 臂内的光子是相干的,它们的频率严格相等。但是一旦引力波到来, X 与 Y 干涉臂内的光子频率会有细微不同,这也是巨型迈克尔逊 LIGO 干涉相移的一个来源,但文献中似乎都不提这个效应,即他们或许认为引力波的到来不会影响激光频率。下面我们将证明,引力波的存在会导致激光频移。

引力波的波幅(协变度规)为 $g_{xx} = -1 + h_{xx}$, $g_{yy} = -1 + h_{yy} = -1 - h_{xx}$, $g_{xy} = h_{xy}$, 其逆变度规为 $g^{xx} = -1 - h_{xx}$, $g^{yy} = -1 + h_{xx}$, $g^{xy} = -h_{xy}$ 。干涉激光光子满足 $(\omega/c)^2 = -g^{ij}k_i k_j$ (其中 i, j 为空间指标)。我们研究沿着 X 轴干涉臂运动的光子。它的频率由下式决定: $(\omega_x/c)^2 = (1 + h_{xx})k_x k_x$ (ω_x 为引力波作用下沿着 X 轴干涉臂运动的光子频率,由于度规 00 分量为 1, 故而不必区分激光逆变频率与协变频率)。由于前面已经论证 k_x 并不受引力波影响,故而 $k_x k_x = (\omega/c)^2$, 其中 ω 为无引力波情形下的激光频率(unperturbed frequency), 所以 $\omega = |k_x|c$ 。注意: 协变波数 k_x 是负数。所以, X 轴干涉臂内的光子频率改变量和频率分别为

$$\delta\omega_x = \omega \frac{h_{xx}}{2}, \quad \omega_x = \omega \left(1 + \frac{h_{xx}}{2}\right). \quad (68)$$

同理,沿着 Y 轴干涉臂运动的光子的频率由下式决定: $(\omega_y/c)^2 = (1 - h_{xx})k_y k_y$ (ω_y 为引力波作用下沿着 Y 轴干涉臂运动的光子频率)。由于 k_y 并不受引力波影响,故 $k_y k_y = (\omega/c)^2$ 。所以, Y 轴干涉臂内的光子频率改变量和频率分别为

$$\delta\omega_y = -\omega \frac{h_{xx}}{2}, \quad \omega_y = \omega \left(1 - \frac{h_{xx}}{2}\right). \quad (69)$$

由于两干涉臂内的光子频率不再相等(激光频率弱相干),我们就需要研究弱相干条件下的光的干涉相位: 根据干涉理论, 设两光的电场幅度分别为

$$E_1 = A_1 \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t + \delta_1), \quad E_2 = A_2 \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t + \delta_2). \quad (70)$$

它们的合振动强度为

$$I = \langle (E_1 + E_2)(E_1 + E_2) \rangle = \langle E_1 E_1 \rangle + \langle E_2 E_2 \rangle + 2\langle E_1 E_2 \rangle, \quad (71)$$

其中交叉项

$$E_1 E_2 = (1/2) A_1 A_2 \left[\cos((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 + \omega_2)t + (\delta_1 + \delta_2)) + \cos((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 - \omega_2)t + (\delta_1 - \delta_2)) \right]. \quad (72)$$

众所周知, $\langle E_1 E_1 \rangle$ 与 $\langle E_2 E_2 \rangle$ 的时间平均分别为 $A_1^2/2$ 与 $A_2^2/2$; 激光干涉项中的高频部分 $\cos((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 + \omega_2)t + (\delta_1 + \delta_2))$ 其时间平均为零, 而对于剩余的项 $\cos((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 - \omega_2)t + (\delta_1 - \delta_2))$, 如果 ω_1 严格等于 ω_2 , 则它体现为稳定的干涉条纹。但是如果 ω_1 并不严格等于 ω_2 , 而是有微弱的偏差, 那么激光干涉图样 $\cos((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 - \omega_2)t + (\delta_1 - \delta_2))$ 就会受时间调制。以上是普通的光干涉理论。非零的相位 $-(\omega_1 - \omega_2)t$ 即可以称为“弱相干相位”。下面研究在引力波存在时的“弱相干相位”。

我们已经计算得到: 在引力波存在时, X, Y 干涉臂上的激光频率不再相等, 它们与引力波到来之前的频率相比, 分别改变了 $\delta\omega_x = \omega h_{xx}/2$, $\delta\omega_y = -\omega h_{xx}/2$ 。由此弱相干相位是 $\Delta\phi_{\text{weak}} = \int_0^t -(\omega_x - \omega_y) dt$, 其中 $h_{xx} = h_{xx}(t)$ 。计算 $\Delta\phi_{\text{weak}}$, 需要分时间段讨论, 因为干涉的两束光在 X, Y 干涉臂上所驻时间并不同, 它们从激光源出发, 其实是在不同时刻($t_x^{(0)}$ 、 $t_y^{(0)}$)到达束分器的, 然后经过若干次的来回振荡, 在相同时刻 t 回到束分器从而发生干涉的。经过分段积分, 弱相干相移 $\Delta\phi_{\text{weak}}$ 的表达式可以写为

$$\Delta\phi_{\text{weak}} = \left(-\int_0^t \omega_x dt \right) - \left(-\int_0^t \omega_y dt \right) = \left(-\int_0^{t_x^{(0)}} \omega_x dt - \int_{t_x^{(0)}}^t \omega_x dt \right) - \left(-\int_0^{t_y^{(0)}} \omega_y dt - \int_{t_y^{(0)}}^t \omega_y dt \right). \quad (73)$$

注意: ω_x 始终等于 $\omega(1+h_{xx}/2)$, 但是 ω_y 在 X 轴 SS 段(从激光源 S 到达束分器 S 之前)等于 $\omega(1+h_{xx}/2)$, 在 Y 轴干涉臂上等于 $\omega(1-h_{xx}/2)$ 。所以, 由激光频率弱相干导致的相移 $\Delta\phi_{\text{weak}}$ 等于

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\text{weak}} &= -\left(\int_0^{t_x^{(0)}} \omega_x dt + \int_{t_x^{(0)}}^t \omega_x dt \right) + \left(\int_0^{t_y^{(0)}} \omega_x dt + \int_{t_y^{(0)}}^t \omega_y dt \right) \\ &= -\left(\int_0^{t_x^{(0)}} \omega \left(1 + \frac{h_{xx}}{2} \right) dt + \int_{t_x^{(0)}}^t \omega \left(1 + \frac{h_{xx}}{2} \right) dt \right) \\ &\quad + \left(\int_0^{t_y^{(0)}} \omega \left(1 + \frac{h_{xx}}{2} \right) dt + \int_{t_y^{(0)}}^t \omega \left(1 - \frac{h_{xx}}{2} \right) dt \right). \end{aligned} \quad (74)$$

进一步可以写为

$$\Delta\phi_{\text{weak}} = \left[\int_{t_y^{(0)}}^t \omega \left(1 - \frac{h_{xx}}{2} \right) dt - \int_{t_x^{(0)}}^t \omega \left(1 + \frac{h_{xx}}{2} \right) dt \right] + \left[\int_0^{t_y^{(0)}} \omega \left(1 + \frac{h_{xx}}{2} \right) dt - \int_0^{t_x^{(0)}} \omega \left(1 + \frac{h_{xx}}{2} \right) dt \right], \quad (75)$$

其中第一项(第一个方括号内)为 $-\omega(t_y^{(0)} - t_x^{(0)}) - \frac{1}{2}\omega\left(\int_{t_x^{(0)}}^t h_{xx} dt + \int_{t_y^{(0)}}^t h_{xx} dt\right)$, 第二项(第二个方括号内)近似等于 $\omega(t_y^{(0)} - t_x^{(0)})$ ($h_{xx}/2$ 项的效应可以不计)。如此说来由激光频率移动导致的弱相干 LIGO 相移为

$$\Delta\phi_{\text{weak}} = -\frac{1}{2}\omega\left(\int_{t_x^{(0)}}^t h_{xx} dt + \int_{t_y^{(0)}}^t h_{xx} dt\right). \quad (76)$$

现在我们就有重要结果:

由引力波潮汐力导致的 LIGO 巨型迈克尔逊干涉仪相移 $\Delta\phi_{\text{tidal}}$ 与由激光频率弱相干性导致的相移 $\Delta\phi_{\text{weak}}$ 分别为

$$\Delta\phi_{\text{tidal}} = \omega(t_y^{(0)} - t_x^{(0)}) + \frac{1}{2}\omega\left(\int_{t_x^{(0)}}^t h_{xx} dt + \int_{t_y^{(0)}}^t h_{xx} dt\right), \quad (77)$$

$$\Delta\phi_{\text{weak}} = \left[-\omega(t_y^{(0)} - t_x^{(0)}) - \frac{1}{2}\omega\left(\int_{t_x^{(0)}}^t h_{xx} dt + \int_{t_y^{(0)}}^t h_{xx} dt\right) \right] + \omega(t_y^{(0)} - t_x^{(0)}). \quad (78)$$

那么它们之和为

$$\Delta\phi_{\text{total}} = \Delta\phi_{\text{tidal}} + \Delta\phi_{\text{weak}} = \omega(t_y^{(0)} - t_x^{(0)}). \quad (79)$$

而一般文献只考虑了 $\Delta\phi_{\text{tidal}}$ ，它只有 $\Delta\phi_{\text{total}}$ 的一半。这可以论证如下：由前述， $2nL = \int_{t_x^{(0)}}^{t_y^{(0)}} c(1+h_{xx})dt$ 和 $2nL = \int_{t_y^{(0)}}^{t_x^{(0)}} c(1-h_{xx})dt$ ，我们就有 $\int_{t_x^{(0)}}^{t_y^{(0)}} (1+h_{xx})dt = \int_{t_y^{(0)}}^{t_x^{(0)}} (1-h_{xx})dt$ ，于是我们得到一个重要关系式

$$t_y^{(0)} - t_x^{(0)} = -\left(\int_{t_x^{(0)}}^{t_y^{(0)}} h_{xx}dt + \int_{t_y^{(0)}}^{t_x^{(0)}} h_{xx}dt\right). \quad (80)$$

由该关系式，我们发现 $\Delta\phi_{\text{tidal}}$ (潮汐相移)与 $\Delta\phi_{\text{weak}}$ (弱相干相移)确实相等，都为

$$\Delta\phi_{\text{tidal}} = \Delta\phi_{\text{weak}} = \frac{1}{2}\omega(t_y^{(0)} - t_x^{(0)}). \quad (81)$$

那么它们之和为 $\Delta\phi_{\text{total}} = \omega(t_y^{(0)} - t_x^{(0)})$ 。这是本文最重要的结论。

7. 对 LIGO 干涉相移的定性与定量讨论

我们讨论由引力波引起的 LIGO 干涉相位的移动。我们先定性讨论(假设引力波波长远远大于激光干涉臂长度)，然后再来进行定量讨论(假设引力波是一个时谐波)。当然这两种情形其实都不完全符合实际：虽然 GW150914 和 GW151226 引力波波长(与地球半径同数量级)确实远比美国(路易斯安那州和华盛顿州)现有的 LIGO 4 千米干涉臂长，但是为了增加干涉相移，需要让激光在干涉臂上不断循环振荡以增大有效臂长，若振荡次数太多，那么此时引力波波长就会比 LIGO 有效干涉臂长度短，定性讨论也就无意义了；另外，由螺旋双黑洞合并产生的引力波(到达地球时)频率是随着时间增长而增长的(Blanchet 频率关系)，所以引力波也不是时谐波。但是讨论这类简化的情形具有例行的价值，至少是具有玩具模型的意义。

我们已经得到了由引力波潮汐加速度引起的两干涉臂长度变化量(36)，由潮汐力引起的 X 轴干涉臂变化量是 $\delta L^x = \xi^x = -(1/2)h_{xx}L^x$ ， $\delta L^y = \xi^y = (1/2)h_{xx}L^y$ 。注意，这里我们采用相位定义： $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ (类比平直时空内)。于是 X 轴干涉臂相位改变量是 $-k_x \delta L^x = (1/2)h_{xx}k_x L^x = -(1/2)h_{xx}\omega L/c$ (其中 ω 为无引力波存在时的激光频率)。这是单臂(X 轴)单程的相移。考虑来回传播(激光在 X 轴干涉臂上一去一回)，这个相移就要放大一倍，即

$$2(-k_x \delta L^x) = -h_{xx}\omega L/c. \quad (82)$$

我们已经使用 $k_x = -\omega/c$ 。注意：协变波数 k_x 是一个负数。设臂长 $L^x = L$ 。说明： k_x 并不受引力波影响(它恒为 $k_x = -\omega/c$ ， ω 为无引力波存在时的激光频率)。Y 轴干涉臂相位改变量是 $-k_y \delta L^y = -(1/2)h_{xx}k_y L^y = (1/2)h_{xx}\omega L/c$ 。这也是单臂(Y 轴臂)单程的相移。考虑激光来回传播(Y 轴干涉臂上一去一回)，这个相移就要放大一倍，即

$$2(-k_y \delta L^y) = h_{xx}\omega L/c. \quad (83)$$

这里我们已经使用 $k_y = -\omega/c$ ，设臂长 $L^y = L$ 。注意 k_y 并不受引力波影响(它恒为 $k_y = -\omega/c$ ， ω 为无引力波存在时的激光频率)。这样两干涉臂因为潮汐加速度导致的干涉臂长变化产生的相位差是(设激光在干涉臂上仅经历一个循环)

$$\Delta\phi_{\text{tidal}} = -2h_{xx}\omega L/c. \quad (84)$$

现在要特别注意：这里得到的 $\Delta\phi_{\text{tidal}}$ 只有在引力波波长远远大于(有效)干涉臂长且观察时间远远小于引力波周期时(准静态)才成立。但是实际上准静态条件并不满足，观察时间 t 与引力波周期可以比拟。此时干涉臂长变化量 $\delta L^x = \xi^x = -(1/2)h_{xx}L^x$ 是随着观察时间 t 逐渐演化的(它并不可以被看作为一个与时间

无关的常数), 光子在干涉臂 L 内传播时, 不同的时刻 t 受不同的引力波振幅 $h_{xx}(t)$ 影响, 每通过一段距离 δl , 增加额外相位。前面已经得到, X 与 Y 干涉臂上的激光频率并不相同(弱相干), 即频率改变量分别为 $\delta\omega_x = \omega h_{xx}/2$, $\delta\omega_y = -\omega h_{xx}/2$ 。由此弱相干相位是 $\Delta\phi_{\text{weak}} = \int_0^t -(\omega_x - \omega_y) dt$ 。如果引力波波长比干涉臂长, 那么这个结果(设激光在干涉臂上仅经历一个循环)是

$$\Delta\phi_{\text{weak}} = -\omega h_{xx} t = -\omega h_{xx} (2L/c). \quad (85)$$

这与前面(84)的潮汐力相移 $\Delta\phi_{\text{tidal}}$ 大小相等。所以, 本文的一个重要结论是: 由两臂中的干涉激光频率不等(由引力波导致)所引起的“弱相干相位差” $\Delta\phi_{\text{weak}}$ 与由干涉臂长差(由引力波潮汐加速度引起)产生的“潮汐相位差” $\Delta\phi_{\text{tidal}}$ 恰好相等。我们相信, 引力波通过激光干涉仪时, 干涉相位的移动来自两个根源(激光频率弱相干、引力波潮汐力)。过去一般文献内仅仅考虑了后者(由引力波潮汐加速度引起的干涉臂长变化导致的 LIGO 相移), 而忽略了前者(由激光频率弱相干引起的相移)。

下面进行定量讨论, 假设引力波是时谐波。实际上从几亿光年外的双黑洞合并事件辐射出来的引力波到达地球时, 也并非严格的时谐波, 它的振幅与频率都是随时间变化的(Blanchet频率方程)。双黑洞合并事件主要包含三个过程: 螺旋式旋进(in spiral)、合并(merger) 与振铃(ring-down) [13]。一般在合并的前半阶段(如螺旋式旋进), 由于过程相对缓慢以及不剧烈, 是可以解析方法研究的, 但在后半阶段(合并与振铃阶段), 必须要用数值相对论来研究。在双黑洞合并事件中, 两个黑洞螺旋式靠拢, 辐射出来的引力波频率越来越大。这个关系可以由Blanchet频率方程(包含各阶后牛顿近似)决定, 精确到一阶的Blanchet引力波频率 ω 方程具有如下简单的数学结构形式: $d\omega/dt = A\omega^{11/3}$ (其中系数 A 由合并的双黑洞引力源决定) [14] [15]。精确到高阶后牛顿近似, 目前看来还不需要, 因为利用最近陈睿文献[16]借助高精度屏幕尺方法获取文献[8]内GW150914引力波信号的频率和频率变化率等数据, 我们初步发现, 即使在GW150914引力波事件中[8] [16], Blanchet频率方程内的幂指数也并非11/3, 而是2.6到4.6之间(对于先到达的引力波, 即时刻 t 在0.30秒到0.40秒之间到达LIGO的引力波, 这个幂指数为2.6且略增; 于时刻 t 在0.40秒到0.43秒之间到达的引力波, 这个幂指数就上升为4.6左右)。这一指数不符合程度(大约 $\pm 30\%$) 可以解释如下: 一方面GW150914信号的LIGO探测器本身有误差, 另一方面导出Blanchet频率方程(针对螺旋环绕黑洞系统)的模型本身也有近似。至于高阶后牛顿近似在Blanchet频率方程内的贡献(粗略估算其大约为一阶贡献的1/30), 早已被上面所述的不确定性湮没了。在振铃阶段, 高阶贡献会变大, 此时当然需要考虑高阶贡献, 但该过程需要用数值相对论研究, 无法写出Blanchet频率方程这样的解析式。

我们在图 2 内给出了由激光干涉仪 LIGO 测量到的 GW150914 引力波信号频率 f (及时间变化率 df/dt) 的实测值[8] [16]拟合曲线与 Blanchet 频率关系($df/dt = Af^{11/3}$)理论曲线[14] [15]的比较结果。对 Blanchet 低阶频率方程 $df/dt = Af^{11/3}$ 两边求自然对数, 我们可以得到 $\ln(df/dt) = \ln A + (11/3)\ln f$, 即若 Blanchet 该幂律成立, $\ln(df/dt)$ 与 $\ln f$ 必然在一条直线上, 斜率为 11/3。从图中可以看出, 尽管 GW150914 引力波信号频率 f (及时间变化率 df/dt) 之拟合曲线没有一个专门的斜率, 但其在一定频率范围内是一条直线, 因此算是对 Blanchet 低阶频率方程有较好的符合。

由几亿光年之外的螺旋合并的双黑洞系统产生并到达地球的引力波频率是强烈依赖于时间的。如时刻 t 在0.30秒到0.40秒之间到达的引力波, 其频率 f 从30 Hz到达56 Hz; 于时刻 t 在0.40秒到0.43秒之间到达的引力波, 其频率 f 立即上升到250 Hz [8] [16]。由此可见引力波频率变化很快, 并非常量。但是, 激光在干涉臂经过几十或几百个来回振荡这个过程中, 引力波频率还是可以看作是近似不变的。以 f 为100 Hz的引力波为例, 其周期是 $T = 0.01$ 秒, 那么在这个周期中, 干涉臂内的激光可以来回振荡375次 ($cT/(2L) = 375$)。所以, 如果激光振荡次数 n 远少于 375 次, 引力波频率可以看作是近似不变的; 如果振荡次数远远多于375次, 那么计算就较为复杂了。下面我们以简单情形(n 远少于375次)为例讨论。

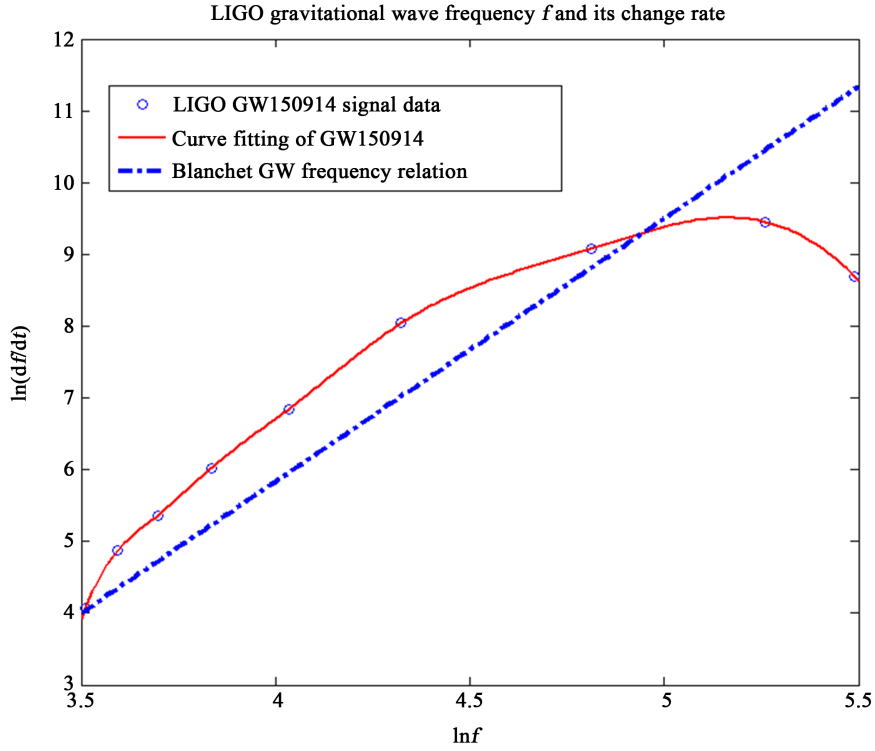


Figure 2. Comparison between LIGO gravitational wave frequency ($df/dt - f$) relation and Blanchet frequency equation ($df/dt = Af^{11/3}$). Small circles represent the data of GW150914 gravitational wave signal frequencies and the red solid line is a fitting line of GW150914 frequency data. Dotted dash line stands for the Blanchet theoretical frequency equation ($df/dt = Af^{11/3}$). It can be found that the GW150914 fitting line can be identified as an approximate straight line. GW150914 gravitational wave signal frequency data used for line fitting is extracted from Refs. [8] [16]

图 2. 由激光干涉仪 LIGO 测量到的 GW150914 引力波信号频率 df/dt (及时间变化率 df/dt) 的实测值拟合曲线与 Blanchet 频率关系 ($df/dt = Af^{11/3}$) 理论曲线的比较。图内圈点为 GW150914 引力波频率信号数据, 红实线为圈点数据的拟合曲线, 蓝点划线为 Blanchet 理论直线。从图中可以看出, 尽管 GW150914 引力波信号频率拟合曲线没有一个专门的斜率, 但其在引力波一定频率范围内近似是一条直线。GW150914 引力波信号频率实测值(圈点数据)取自文献 [16]。该文献作者利用高精度屏幕尺从文献[8]的引力波信号图示中提取出了这些数据

设时谐引力波为 $h_{xx} = h_0 \cos(\omega_g t + \varphi_g)$, 由 X 轴干涉臂激光光子满足的关系式 $2nL = \int_{t_x^{(0)}}^t c(1+h_{xx})dt$, 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{2nL}{c} &= (t - t_x^{(0)}) + \frac{h_0}{\omega_g} \left[\sin(\omega_g t + \varphi_g) - \sin(\omega_g t_x^{(0)} + \varphi_g) \right] \\ &= (t - t_x^{(0)}) + \frac{h_0}{\omega_g} \left[2 \cos\left(\omega_g \frac{t + t_x^{(0)}}{2} + \varphi_g\right) \sin\left(\omega_g \frac{t - t_x^{(0)}}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (86)$$

由 Y 轴干涉臂激光光子满足的关系式 $2nL = \int_{t_y^{(0)}}^t c(1-h_{xx})dt$, 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{2nL}{c} &= (t - t_y^{(0)}) - \frac{h_0}{\omega_g} \left[\sin(\omega_g t + \varphi_g) - \sin(\omega_g t_y^{(0)} + \varphi_g) \right] \\ &= (t - t_y^{(0)}) - \frac{h_0}{\omega_g} \left[2 \cos\left(\omega_g \frac{t + t_y^{(0)}}{2} + \varphi_g\right) \sin\left(\omega_g \frac{t - t_y^{(0)}}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (87)$$

如果 $\omega_g(t-t_x^{(0)})$ 、 $\omega_g(t-t_y^{(0)})$ 远小于1(即引力波波长远大于干涉臂有效长度), 则

$$\frac{2nL}{c} = (t-t_x^{(0)})[1+h_0\cos(\omega_g t + \varphi_g)], \quad (88)$$

$$\frac{2nL}{c} = (t-t_y^{(0)})[1-h_0\cos(\omega_g t + \varphi_g)]. \quad (89)$$

那么X轴与Y轴干涉臂内的激光循环的时间各自是

$$t-t_x^{(0)} = \frac{2nL}{c} \cdot \frac{1}{1+h_0\cos(\omega_g t + \varphi_g)}, \quad t-t_y^{(0)} = \frac{2nL}{c} \cdot \frac{1}{1-h_0\cos(\omega_g t + \varphi_g)}. \quad (90)$$

这里, $t_x^{(0)}$ 与 $t_y^{(0)}$ 分别是X轴与Y轴干涉臂内的激光在从激光源出来后到达束分器的时刻; t 为X轴与Y轴干涉臂内的激光经过若干次的循环振荡返回束分器的时刻。我们得到X轴与Y轴干涉臂内的激光在从激光源出来后到达束分器的时间差:

$$t_y^{(0)} - t_x^{(0)} = -\frac{4nL}{c} h_0 \cos(\omega_g t + \varphi_g) = -\frac{4nL}{c} h_{xx}. \quad (91)$$

于是LIGO巨型迈克尔逊干涉仪相移 $\Delta\phi_{\text{tidal}}$ 与由激光频率弱相干导致的相移 $\Delta\phi_{\text{weak}}$ 之和是

$$\Delta\phi_{\text{total}} = \omega(t_y^{(0)} - t_x^{(0)}) = -\frac{4nL\omega}{c} h_{xx}. \quad (92)$$

前面我们已经要求 $\omega_g(t-t_x^{(0)})$ 远小于1与 $\omega_g \cdot (2nL/c)$ 即 $2\pi(2nL)/\lambda_g$ 远小于1, 也即要求干涉臂有效臂长 $2nL$ 远小于引力波波长 λ_g 。下面我们放弃“ $\omega_g(t-t_x^{(0)})$ 、 $\omega_g(t-t_y^{(0)})$ 远小于1”这个条件, 设 $t-t_x^{(0)} = \tau_x$, $t-t_y^{(0)} = \tau_y$, 那么 $t+t_x^{(0)} = 2t-\tau_x$, $t+t_y^{(0)} = 2t-\tau_y$, 那么我们可以得到

$$\frac{2nL}{c} = \tau_x + \frac{h_0}{\omega_g} \left[2\cos\left(\omega_g t + \varphi_g - \omega_g \frac{\tau_x}{2}\right) \sin\left(\omega_g \frac{\tau_x}{2}\right) \right], \quad (93)$$

$$\frac{2nL}{c} = \tau_y - \frac{h_0}{\omega_g} \left[2\cos\left(\omega_g t + \varphi_g - \omega_g \frac{\tau_y}{2}\right) \sin\left(\omega_g \frac{\tau_y}{2}\right) \right]. \quad (94)$$

原则上我们可以从这两个方程求出 τ_x 和 τ_y 。这是对于有效干涉臂长 $2nL$ 与引力波波长 λ_g 同数量级(或前者臂长远比后者波长大的)情形。

8. 引力波时空内的激光波数零方程的运用

运用引力波时空内的激光波数零方程(wavenumber nullness equation)也可以计算 LIGO 相移。此法可见 Thorne 所著文献[17]。正如我们所料, 那里因为没有考虑 X 与 Y 轴干涉臂内的激光频率弱相干性, 所得 LIGO 相移仅仅只含潮汐加速度相移 $\Delta\phi_{\text{tidal}}$, 也即我们所认为的总相移的一半。我们重新研究该问题(需要注意的是, 本文所用度规与 Thorne 所用度规[17]相差一个负号)。由于激光波数满足 $g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$, 这里四维波数被定义为 $k_\mu = -\partial_\mu\phi$ (ϕ 为激光相位), 如激光频率 $\omega_x = -\partial_t\phi$ (正数。此为协变频率, 由于引力波度规特征 $g_{00} = +1$, $g_{0i} = 0$, 逆变频率与协变频率相等), 激光协变波数 $k_x = -\partial_x\phi$ (负数)。根据式(17)内的引力波度规, 我们为简化, 先略去引力波 h_{xy} , 仅仅考虑引力波 h_{xx} , 那么引力波度规为

$$ds^2 = c^2 dt^2 + (-1+h_{xx})dx^2 + (-1-h_{xx})dy^2, \quad (95)$$

其中度规分量 $g_{xx} = -1+h_{xx}$, $g_{yy} = -1-h_{xx}$, 它们的逆就是 $g^{xx} = -1-h_{xx}$, $g^{yy} = -1+h_{xx}$ (因略去了 h_{xy} ,

否则 g^{xx} 与 g^{yy} 会复杂一些)。于是根据 $g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$ ，LIGO 装置 X 轴干涉臂上的光子波数零方程为 $(\partial_t \phi_x)^2 + (-1 - h_{xx})c^2(\partial_x \phi_x)^2 = 0$ (ϕ_x 为 X 轴干涉臂上的光波相位)，即

$$(\partial_t \phi_x)^2 - (1 + h_{xx})c^2(\partial_x \phi_x)^2 = 0. \quad (96)$$

同理，在 Y 轴干涉臂上的激光光子的波数零方程为

$$(\partial_t \phi_y)^2 - (1 - h_{xx})c^2(\partial_y \phi_y)^2 = 0, \quad (97)$$

其中 ϕ_y 为 Y 轴干涉臂上的光波相位。

对于 X 轴干涉臂内的光子，方程(96)的解(光波相位)可以分为前进解 $\phi_x^{\text{forth}}(x, t)$ 与返回解 $\phi_x^{\text{back}}(x, t)$ 。受 Thorne 文献[17]启发，我们构造前进解 $\phi_x^{\text{forth}}(x, t)$ 为

$$\phi_x^{\text{forth}}(x, t) = -\omega \left[t - \frac{x}{c} - \frac{\alpha}{2} H(t - x/c) + \frac{\beta}{2} H(t) \right], \quad (98)$$

其中函数 $H(t) = \int_0^t h_{xx}(t') dt'$ (可以看作引力波脉冲面积， $h = h_{xx}$)， ω 为引力波到来之前的 LIGO 激光频率(unperturbed frequency)，它是未曾受微扰的频率(unperturbed frequency)。我们设束分器位置为 $x = 0$ 、 $y = 0$ 。将(98)代入(96)，我们来定出该解内的参数 α 和 β 。先计算 X 轴干涉臂内的光波相位的一阶时间导数与一阶空间坐标导数：

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_x^{\text{forth}}(x, t) &= -\omega \left[1 - \frac{\alpha}{2} h(t - x/c) + \frac{\beta}{2} h(t) \right], \\ \partial_x \phi_x^{\text{forth}}(x, t) &= -\omega \left[-\frac{1}{c} + \frac{\alpha}{2c} h(t - x/c) \right], \end{aligned} \quad (99)$$

那么它们的平方分别是

$$\begin{aligned} (\partial_t \phi_x^{\text{forth}}(x, t))^2 &= \omega^2 \left[1 - \alpha h(t - x/c) + \beta h(t) \right], \\ c^2 (\partial_x \phi_x^{\text{forth}}(x, t))^2 &= \omega^2 \left[1 - \alpha h(t - x/c) \right]. \end{aligned} \quad (100)$$

于是我们由(100)式的第二个关系，在两边乘上 $1 + h_{xx}$ ，我们就可以得到 $(1 + h_{xx})c^2(\partial_x \phi_x^{\text{forth}}(x, t))^2 = \omega^2(1 + h_{xx})[1 - \alpha h(t - x/c)]$ ，忽略 h^2 小项，此(右端)也可以进一步化为 $\omega^2[1 - \alpha h(t - x/c) + h_{xx}(t)]$ 。为了让激光波数零方程(96)成立，结合(100)式的第一个关系，显然我们要求 $\beta = 1$ ，而 α 可以为任意实数。进一步而言， α 将由其它条件来确定，如本文前面已经证得，激光协变波数 k_x 不受引力波影响，于是由 $-\partial_x \phi_x^{\text{forth}}(x, t) = \omega \left[-\frac{1}{c} + \frac{\alpha}{2c} h(t - x/c) \right]$ ，则要求 $\alpha = 0$ ；或者也可以根据前面已经所得，X 轴干涉臂内的激光频率应为 $\omega_x = \omega(1 + h_{xx}/2)$ ，于是由

$$-\partial_t \phi_x^{\text{forth}}(x, t) = \omega \left[1 - \frac{\alpha}{2} h(t - x/c) + \frac{\beta}{2} h(t) \right], \text{ 也要求 } \alpha = 0 \text{ 及 } \beta = 1 \text{ (注: 我们已经选定引力波幅度 } h = h_{xx}\text{)}.$$

对于 X 轴干涉臂内的光子，它在 $x = l^x$ (终端反射镜)处要被反射，于是方程(96)的返回解 $\phi_x^{\text{back}}(x, t)$ 可以设为

$$\begin{aligned} \phi_x^{\text{back}}(x, t) &= -\omega \left[t - \frac{2l^x - x}{c} - \frac{\alpha}{2} H(t - (2l^x - x)/c) + \frac{\beta}{2} H(t) \right] \\ &= -\omega \left[t + \frac{x}{c} - \frac{2l^x}{c} - \frac{\alpha}{2} H(t + x/c - 2l^x/c) + \frac{\beta}{2} H(t) \right]. \end{aligned} \quad (101)$$

这里， $2l^x - x$ 相当于光子到达干涉臂终端镜面并反射后回到干涉臂内位置 x 处之前已经传播了的总距离(即 l^x 与 $l^x - x$ 之和)。将所设立的解(101)代入方程(96)，我们也来定出该解内的参数 α 和 β 。先计算 X 轴干涉臂内的光波相位 $\phi_x^{\text{back}}(x, t)$ 的一阶时间导数与一阶空间坐标导数：

$$\begin{aligned}\partial_t \phi_x^{\text{back}}(x, t) &= -\omega \left[1 - \frac{\alpha}{2} h(t + x/c - 2l^x/c) + \frac{\beta}{2} h(t) \right], \\ \partial_x \phi_x^{\text{back}}(x, t) &= -\omega \left[\frac{1}{c} - \frac{\alpha}{2c} h(t + x/c - 2l^x/c) \right].\end{aligned}\quad (102)$$

那么它们的平方是

$$\begin{aligned}(\partial_t \phi_x^{\text{back}}(x, t))^2 &= \omega^2 \left[1 - \alpha h(t + x/c - 2l^x/c) + \beta h(t) \right], \\ c^2 (\partial_x \phi_x^{\text{back}}(x, t))^2 &= \omega^2 \left[1 - \alpha h(t + x/c - 2l^x/c) \right].\end{aligned}\quad (103)$$

于是在(103)式第二式两边乘上 $1 + h_{xx}$ ，我们就可以得到 $(1 + h_{xx})c^2 (\partial_x \phi_x^{\text{back}}(x, t))^2 = \omega^2 (1 + h_{xx}) \left[1 - \alpha h(t + x/c - 2l^x/c) \right]$ ，此式(右端)可以进一步化为 $\omega^2 \left[1 - \alpha h(t + x/c - 2l^x/c) + h_{xx}(t) \right]$ (已经忽略 h^2 小项)。显然，为满足激光波数零方程(96)，我们亦要求 $\beta = 1$ ，而 α 为任意实数。实际的 α 参量将由其它条件来定，如本文前面已经算得，协变波数不受引力波影响，于是由 $-\partial_x \phi_x^{\text{back}}(x, t) = \omega \left[\frac{1}{c} - \frac{\alpha}{2} h(t + x/c - 2l^x/c) \right]$ ，要求 $\alpha = 0$ ；或者根据前面已经所得，X 轴干涉臂内的激光频率应为 $\omega_x = \omega(1 + h_{xx}/2)$ ，于是由 $-\partial_t \phi_x^{\text{back}}(x, t) = \omega \left[1 - \frac{\alpha}{2} h(t + x/c - 2l^x/c) + \frac{\beta}{2} h(t) \right]$ ，也要求 $\alpha = 0$ 及 $\beta = 1$ (注：我们已经选定 $h = h_{xx}$)。

前进解 $\phi_x^{\text{forth}}(x, t)$ 与返回解 $\phi_x^{\text{back}}(x, t)$ 的关系是：返回解在后，前进解在前，返回解的相位积累了前进解的相位。当 x 取 l^x 时，它们相等($\phi_x^{\text{forth}}(l^x, t) = \phi_x^{\text{back}}(l^x, t)$)，因为 $x = l^x$ (悬浮镜终端)是前进解的末端位置，也是返回解的起始位置。

上面已经考虑了在 X 轴干涉臂内的光子的前进解相位与返回解相位。下面我们考虑在 Y 轴干涉臂内的光子。根据在 Y 轴干涉臂上的光子的波数零方程(97)，前进解 $\phi_y^{\text{forth}}(y, t)$ 与返回解 $\phi_y^{\text{back}}(y, t)$ 分别为

$$\begin{aligned}\phi_y^{\text{forth}}(y, t) &= -\omega \left[t - \frac{y}{c} + \frac{\alpha}{2} H(t - y/c) - \frac{\beta}{2} H(t) \right], \\ \phi_y^{\text{back}}(y, t) &= -\omega \left[t + \frac{y}{c} - \frac{2l^y}{c} + \frac{\alpha}{2} H(t + y/c - 2l^y/c) - \frac{\beta}{2} H(t) \right].\end{aligned}\quad (104)$$

同理可以论证，我们亦要求 $\beta = 1$ ，而 $\alpha = 0$ 。前进解 $\phi_y^{\text{forth}}(y, t)$ 与返回解 $\phi_y^{\text{back}}(y, t)$ 的关系是：返回解在后，前进解在前，返回解的相位积累了前进解的相位。因为 $y = l^y$ (悬浮镜终端)是前进解的末端位置，也是返回解的起始位置，所以当 y 取 l^y 时，它们自然相等($\phi_y^{\text{forth}}(l^y, t) = \phi_y^{\text{back}}(l^y, t)$)。

现在我们可以计算巨型迈克尔逊干涉仪的干涉相移了。只要将 $x = 0$ 与 $y = 0$ 处的返回解相减即可，即 $\Delta\phi = \phi_x^{\text{back}}(0, t) - \phi_y^{\text{back}}(0, t)$ ，其中

$$\phi_x^{\text{back}}(0, t) = -\omega \left[t - \frac{2l^x}{c} + \frac{1}{2} H(t) \right], \quad \phi_y^{\text{back}}(0, t) = -\omega \left[t - \frac{2l^y}{c} - \frac{1}{2} H(t) \right].\quad (105)$$

那么巨型迈克尔逊干涉仪的干涉相移是

$$\Delta\phi = \phi_x^{\text{back}}(0,t) - \phi_y^{\text{back}}(0,t) = 2\omega \left(\frac{l^x - l^y}{c} \right) - \omega H(t). \quad (106)$$

在引力波作用下, 两条干涉臂长 l^x 、 l^y 不再相等(即使在引力波到来之前它们严格相等)。我们假设未受引力波扰动的干涉臂逆变长度为 $l^y = l^x = L$ (如果不考虑引力波潮汐加速度影响, 它们是常数)。一旦受引力波潮汐力影响, 那么长度就分别变为 l^y 与 l^x 。根据本文前面已经计算得到的结果: $l^x = L(1 - h_{xx}/2)$, $l^y = L(1 + h_{xx}/2)$, 它们之差是 $l^x - l^y = -Lh_{xx}$ 。于是因引力波引起的 LIGO 干涉总相移为

$$\Delta\phi = -2\frac{\omega}{c}Lh_{xx} - \omega \int_0^t h_{xx}(t') dt'. \quad (107)$$

以上 $\Delta\phi$ 内的两项其物理含义非常明确: $-2\frac{\omega}{c}Lh_{xx}$ 是引力波潮汐加速度导致干涉臂长度变化[即 $l^x = L(1 - h_{xx}/2)$ 与 $l^y = L(1 + h_{xx}/2)$]所产生的相移, $-\omega \int_0^t h_{xx}(t') dt'$ 是由激光频移导致的弱相干相移。 $-\omega \int_0^t h_{xx}(t') dt'$ 在数值上就等于 $-\int_0^t (\omega_x(t') - \omega_y(t')) dt'$ (其中 $\omega_x = \omega(1 + h_{xx}/2)$, $\omega_y = \omega(1 - h_{xx}/2)$)。本文前面已经论证出 $-\int_0^t (\omega_x(t') - \omega_y(t')) dt'$ 在数值上也等于 $-2\frac{\omega}{c}Lh_{xx}$ (当引力波波长远大于干涉臂长时)。这样, 上面(107)内的 $\Delta\phi$ 其实就是 LIGO 巨型迈克尔逊干涉仪由潮汐加速度引起的潮汐相移 $\Delta\phi_{\text{tidal}}$ 和由激光频率弱相干导致的弱相干相移 $\Delta\phi_{\text{weak}}$ 之和。

本节用激光波数零方程来计算 LIGO 相位移动, 其精神实质与前面几节所叙一致, 但显得更为简洁。

9. 结论

本文对引力波 LIGO 相移来源做了比较系统的研究, 进行了详细计算。我们先研究了引力波时空内干涉臂终端悬浮镜和干涉臂内光子的短程线方程, 发现干涉臂终端悬浮镜的逆变坐标不变(即干涉臂逆变长度不变), 而光子的协变波数不受引力波影响; 然后研究干涉臂终端悬浮镜和光子的短程线偏离方程, 分析由引力波引起的潮汐加速度贡献, 之后研究弱相干相移。本文所总结出来的五个由引力波导致的 LIGO 干涉相移因素中, 干涉臂标准长度的纯几何改变(非潮汐力贡献)与激光标准波长的纯几何改变(非潮汐力贡献)恰好抵消, 所以这两个因素可以不必计算; 干涉臂长度受潮汐力影响导致的改变(属引力波潮汐加速度贡献)属于文献已经考虑的干涉相移来源; 激光波长受潮汐力影响导致的胀缩效应(属引力波潮汐加速度贡献)对于干涉臂有效臂长过短的情形可以不计; 激光频率的弱相干效应, 也会导致 LIGO 巨型迈克尔逊干涉仪的相移, 它在数值上与干涉臂长度受潮汐力影响导致干涉相移的改变(属引力波潮汐加速度贡献)是一样大小的, 因此值得认真对待。如果不计及该效应(激光频率的弱相干效应), 那么这会导致引力波振幅数值错误地放大一倍。GW150914 和 GW151226 引力波信号被认为来自大约 13 亿光年之外的螺旋双黑洞合并事件[8] [9], 我们认为实际上双黑洞系统可能仅仅位于六七亿光年之外。利用引力波时空内激光波数零方程[17]也可以用来研究相移, 我们在本文也用此方法计算了引力波 LIGO 干涉相移, 所得结果与本文前面所得结果一致。我们还研究了 GW150914 引力波信号频率变化率与描述螺旋合并双黑洞的引力波 Blanchet 频率方程[14] [15]之间的符合程度, 发现实验观察[8]与理论在 $\pm 30\%$ 差距上相符, 这可以说 GW150914 引力波信号对 Blanchet 低阶频率方程有较好的符合。

致 谢

本文初稿曾在中国数学力学物理学高新技术交叉研究会第十六届学术年会(2016年08月05日--08日, 辽宁丹东)报告交流, 特此致谢; 同时也感谢深圳陈睿老师在引力波 Blanchet 频率方程上与我的讨论及启示, 本文探讨 GW150914 引力波信号频率变化率与 Blanchet 频率方程的符合程度(即图 2 内容)采用

了他使用高精度屏幕尺和图像分析法得到的数据[16]。

参考文献 (References)

- [1] Weinberg, S. (1972) *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, New York.
- [2] Ohanian, H. and Ruffini, R. (1994) *Gravitation and Spacetime*. W. W. Norton & Company Inc. Press, New York.
- [3] Padmanabhan, T. (2010) *Gravitation: Foundations and Frontiers*. Cambridge University Press, Cambridge.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511807787>
- [4] Damour, T. (1983) Gravitational Radiation and the Motion of Compact Bodies. In: Deruelle, N. and Piran, T., Eds., *Gravitational Radiation*, North-Holland, Amsterdam.
- [5] Weber, J. (1969) Evidence for Discovery of Gravitational Radiation. *Physical Review Letters*, **22**, 1320-1324.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.22.1320>
- [6] Levine, J. (2004) Early Gravity-Wave Detection Experiments. *Physics in Perspective*, **6**, 42-75.
<https://doi.org/10.1007/s00016-003-0179-6>
- [7] Weiss, R. (1972) Electromagnetically Coupled Broadband Gravitational Antenna. Quarterly Progress Report, Research Laboratory of Electronics, Cambridge.
- [8] Abbott, B.P., *et al.* (2016) LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, **116**, Article ID: 061102.
- [9] Abbott, B. P., *et al.* (2016) LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. *Physical Review Letters*, **116**, Article ID: 241103.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.241103>
- [10] Amaro-Seoane, P., Aoudia, S., Babak, S., Binétruy, P., Berti, E., Bohé, A., *et al.* (2012). Low-Frequency Gravitational-Wave Science with eLISA/NGO. *Classical and Quantum Gravity*, **29**, Article ID: 124016.
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/29/12/124016>
- [11] Amaro-Seoane, P., Gair, J.R., Freitag, M., Miller, M., Mandel, I., Cutler, C.J. and Babak, S. (2007) Intermediate and Extreme Mass-Ratio in Spirals—Astrophysics, Science Applications and Detection Using LISA. *Classical and Quantum Gravity*, **24**, 113-169. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/24/17/R01>
- [12] 冯麟保, 刘雪成, 刘明成. 广义相对论[M]. 吉林: 吉林科学技术出版社, 1995: 第二章.
- [13] Ohme, F. (2012) Analytical Meets Numerical Relativity: Status of Complete Gravitational Waveform Models for Binary Black Holes. *Classical and Quantum Gravity*, **29**, Article ID: 124002.
- [14] Blanchet, L., Damour, T., Iyer, B.R., Will, C.M. and Wiseman, A.G. (1995) Gravitational-Radiation Damping of Compact Binary Systems to Second Post-Newtonian Order. *Physical Review Letters*, **74**, 3515-3518.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.3515>
- [15] Blanchet, L., Faye, G., Iyer, B.R. and Sinha, S. (2008) The Third Post-Newtonian Gravitational Wave Polarizations and Associated Spherical Harmonic Modes for in Spiralling Compact Binaries in Quasi-Circular Orbits. *Classical and Quantum Gravity*, **25**, Article ID: 165003. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/16/165003>
- [16] 陈睿. 引力波相对论频率方程的图像分析[Z], 2016. (未发表)
- [17] Thorne, K.S. (2013) Gravitational Waves and Experimental Tests of General Relativity. In: Blandford, R.D. and Thorne, K.S., Eds., *Applications of Classical Physics*, Stanford University, Stanford; Caltech Cart, Pasadena, chapter 27.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：mp@hanspub.org