

An Improved Toeplitz Decorrelation Algorithm for DOA Estimation with Uniform Circular Array*

Yunxiang Cheng, Kai Jiang, Limin Lou, Liang Yu

School of Computer and Communication Engineering, Tianjin University of Technology, Engineering Research Center of Communication Devices Ministry of Education, Tianjin

Email: cheng_yunxiang@126.com

Received: Oct. 9th, 2011; revised: Nov. 3rd, 2011; accepted: Nov. 24th, 2011.

Abstract: An improved Toeplitz decorrelation algorithm (MODE-TDM) is proposed for the DOA estimation of coherent signals on a Uniform Circular Array (UCA). Firstly, the mode excitation method is used to transform the UCA in element space into a virtual ULA (VULA) in mode space. Then using every row elements and corresponding every column elements of array covariance matrix of VULA to construct two Toeplitz matrixes, a new covariance matrix is obtained taking average these two matrixes. This process is equivalent to the forward-backward smoothing technology and reduces the influence of the array error and noise. Lastly, combined with ESPRIT algorithm, it is capable of resolving the DOAs of coherent signals without peak searching. Theoretical analysis and simulation results demonstrate this algorithm has better performance and less estimated time compared with conventional MODE-FBSS algorithm and MODE-TOEP algorithm.

Keywords: Uniform Circular Array (UCA); DOA Estimation; Coherent Signals; Toeplitz Matrix

基于均匀圆阵的 Toeplitz 解相干 DOA 估计算法*

程云翔, 姜 凯, 娄利民, 俞 靓

天津理工大学计算机与通信工程学院, 通信器件教育部工程研究中心, 天津

Email: cheng_yunxiang@126.com

收稿日期: 2011 年 10 月 9 日; 修回日期: 2011 年 11 月 3 日; 录用日期: 2011 年 11 月 24 日

摘 要: 针对均匀圆阵的 DOA 估计, 提出了一种改进的 Toeplitz 解相干 DOA 估计算法。该算法利用模式空间变换算法, 将均匀圆阵变为虚拟均匀线阵, 在此基础上利用接收数据协方差矩阵的行、列分别构造 Toeplitz 矩阵并取均值, 以此来改变协方差矩阵的数据结构, 使协方差矩阵的秩得到有效恢复, 完成相干信号的 DOA 估计。由于该算法充分利用了协方差矩阵的信息, 相当于一次双向平滑处理过程, 较之传统的模式空间平滑类算法(MODE-FBSS)和模式空间矩阵重构算法(MODE-TOEP), 减少了误差和噪声对阵元的影响, 提高了算法的估计性能。理论证明和仿真实验验证了该算法的可行性和有效性。

关键词: 均匀圆阵; DOA 估计; 相干信号; Toeplitz 矩阵

1. 引言

移动通信中智能天线的使用可以在多个方面改善通信系统的性能, 而波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计是智能天线工作的基础, 是阵列信号处理的重要应用之一。与均匀线阵(ULA)相比, 均匀圆阵(UCA)可以实现 360°全方位、无模糊覆盖, 近

来得到更多的关注^[1]。由于均匀圆阵的阵列流型不具备范德蒙德形式, 传统的 DOA 估计算法, 如 MUSIC^[2]、ESPRIT^[3]等子空间类算法无法直接应用于均匀圆阵 DOA 估计。文献[4]提出了 UCA-RB-MUSIC 算法, 使用模式激励技术, 将均匀圆阵转化为虚拟均匀线阵, 结合 MUSIC 算法进行 DOA 估计, 减小了计算量, 提高了估计性能, 并进一步提出了 UCA-ESPRIT 算法, 可以对俯仰角和平面角进行自动匹配估计。而实际环

*基金项目: 天津市科技创新专项资金项目(10FDZDZX00400)资助课题。

境中, 由于多径效应的影响, 存在大量相干信号, 导致协方差矩阵发生亏秩, 上述算法失效。针对该问题, 一般在模式空间变换基础上, 将均匀线阵的空间平滑算法^[5,6]、子空间算法^[7,8]应用于均匀圆阵。文献[9,10]提出基于模式空间变换算法(以下简称 MODE-FBSS), 将子空间平滑算法用于均匀圆阵实现相干信号的 DOA 估计, 但空间平滑算法增加了计算量, 减小了阵列孔径, 且在智能天线系统中, 信号的相关性非先验信息, 无法确定平滑次数。文献[11]在模式空间变换的基础上提出了空间矩阵重构算法(以下简称 MODE-TOEP), 较之 MODE-FBSS 算法解相干能力增强, 可以估计出更多的信源, 且不需要平滑处理, 减少了计算量。但该算法只利用了协方差矩阵的部分信息。

为了更加充分的利用协方差矩阵信息, 本文提出了一种改进的 Toeplitz 解相干 DOA 估计算法(以下简称 MODE-TDM), 该算法利用模式空间变换算法, 将均匀圆阵变为具有范德蒙德形式的虚拟均匀线阵, 在此基础上利用接收数据协方差矩阵的行、列分别构造 Toeplitz 矩阵并取均值, 来改变协方差矩阵的数据结构, 使协方差矩阵的秩得到有效恢复, 完成相干信号的 DOA 估计。仿真结果和理论证明都验证了该算法的可行性和有效性, 且由于该算法充分利用了协方差矩阵的信息, 相当于一次双向平滑处理过程, 较之 MODE-FBSS 算法和 MODE-TOEP 算法, 减少了误差和噪声对阵元的影响, 而且有更高的信噪比门限和更强的解相干性能, 提高了算法的估计性能。

2. 数学模型

假设系统中有 K 个窄带远场共信道用户, 入射到如图 1 所示的均匀圆阵, 该阵列由 M 个各项同性阵元组成, 并将圆心作为参考点。其中, 前 L 个信号为相干信号, 其它信号为非相干信号。则第 k 个阵元的接收信号可表示为

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sum_{i=1}^K s_i(t) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r \cos\left(\theta_i - \frac{2\pi k}{M}\right) \sin(\phi_i)} + n_k(t) \\ &= s_1(t) \sum_{i=1}^L \beta_i e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r \cos\left(\theta_i - \frac{2\pi k}{M}\right) \sin(\phi_i)} \\ &\quad + \sum_{i=L+1}^K s_i(t) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r \cos\left(\theta_i - \frac{2\pi k}{M}\right) \sin(\phi_i)} + n_k(t) \end{aligned} \quad (1)$$

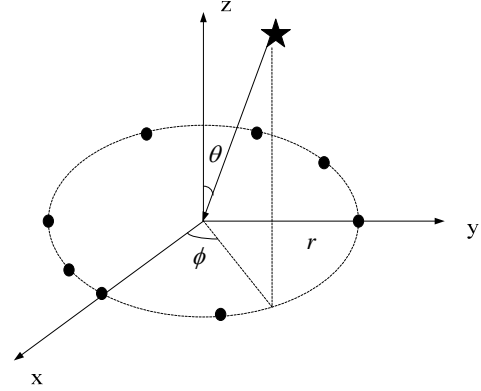


Figure 1. Uniform circular array (UCA)
图 1. 均匀圆阵

式中, $s_i(t)$ 为第 i 个信号的复包络, λ 为中心波长, r 为均匀圆阵半径, $n_k(t)$ 是均值为 0, 方差为 $\sigma^2 \mathbf{I}$ 的加性高斯噪声。 $\beta_i, i=1, 2, \dots, L$ 为相干信号的衰落系数。则阵列的接收信号矢量可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= [x_0(t), x_1(t), \dots, x_{M-1}(t)]^T \\ &= \mathbf{A}(\varphi) \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $\mathbf{S}(t)$ 为信号矢量, $\mathbf{N}(t)$ 为噪声矢量,

$$\mathbf{A}(\varphi) = [\mathbf{a}(\varphi_0), \mathbf{a}(\varphi_1), \dots, \mathbf{a}(\varphi_{M-1})]$$

为均匀圆阵的阵列流型矩阵, 其中 $\mathbf{a}(\varphi_i)$ 为均匀圆阵的方向矢量, 如下所示

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\varphi_i) &= \mathbf{a}(\theta_i, \phi_i) \\ &= \begin{bmatrix} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r \cos(\theta_i - \gamma_0) \sin(\phi_i)} & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r \cos(\theta_i - \gamma_1) \sin(\phi_i)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r \cos(\theta_i - \gamma_{M-1}) \sin(\phi_i)} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\gamma_k = 2\pi k/M, k=0, 1, \dots, M-1$ 。由式(3)可知, 均匀圆阵阵列流型不具备范德蒙德结构, 因此采用模式激励算法将均匀圆阵变为虚拟均匀线阵, 使均匀线阵的解相干算法可以直接应用到均匀圆阵。使用变换矩阵 \mathbf{T} , 对式(2)进行矩阵变换得

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{T} \mathbf{X}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(\varphi) \mathbf{S}(t) + \tilde{\mathbf{N}}(t) \quad (1)$$

式中,

$$\mathbf{T} = \mathbf{J} \mathbf{F} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{\sqrt{M}} [\mathbf{w}_{-k}, \mathbf{w}_{-k+1}, \dots, \mathbf{w}_k]^H \\ k &= -h, \dots, 0, \dots, h \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathbf{w}_k = [1, e^{j2\pi k/M}, \dots, e^{j2\pi k(M-1)/M}]^H \quad (4)$$

$$\mathbf{J} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\sqrt{M} j^k J_k(\beta)} \right\} \quad (5)$$

其中, $h \approx 2\pi r / \lambda$ 为模式激励的最大模式数, $J_k(\beta)$ 为 k 阶第一类贝塞尔函数。

当阵元数满足条件 $2h+1 \leq M$ 时, 变换后的虚拟均匀线阵的阵列流型矩阵为

$$\tilde{\mathbf{A}}(\varphi) = \begin{bmatrix} e^{-jh\varphi_1} & \dots & e^{-jh\varphi_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{jh\varphi_1} & \dots & e^{jh\varphi_K} \end{bmatrix} \quad (6)$$

上式虚拟均匀线阵阵列流型满足范德蒙德形式, 可以运用相关均匀线阵解相干算法进行解相干 DOA 估计。

3. MODE-TDM 解相干算法

均匀圆阵经过模式激励变换后变为阵元间距为 d , 具有 $K = 2h+1$ 个模式元素的对称虚拟均匀线阵, 如图 2 所示, 并以虚拟均匀线阵的中间阵元作为参考阵元, 则阵列的接收信号矢量可表示为

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = [x_{-h}(t), x_{-(h+1)}(t), \dots, x_0(t), \dots, x_h(t)]^T \quad (7)$$

阵列接收信号的协方差矩阵可表示为

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^H\} \quad (8)$$

式(11)中协方差矩阵 \mathbf{R}_{xx} 的第 m 行、第 k 列的元素表示为^[12]

$$r(m, k) = \sum_{i=1}^K d_{m,i} e^{j\sin \varphi_i} + \sigma_n^2 \delta_{m,k} \quad (9)$$

$$m, k = -h, \dots, 0, \dots, h$$

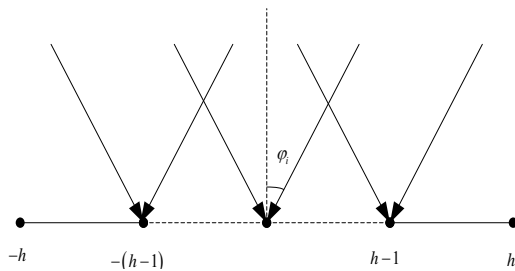


Figure 2. Virtual uniform linear array (VULA)
图 2. 虚拟均匀线阵

其中,

$$d_{m,i} = \begin{cases} P_{1,1} \beta_i^* \sum_{l=1}^L \beta_l e^{-jk \sin \varphi_l} & i = 1, \dots, L \\ P_{i,i} \beta_i^* e^{-jk \sin \varphi_i} & i = L+1, \dots, P \end{cases} \quad (10)$$

$$P_{l,i} = E\{s_l(t) s_i^*(t)\}, \quad l, i = 1, L+1, \dots, K \quad (11)$$

式中, $\sigma_n^2 = E\{n(t)n^*(t)\}$ 为噪声协方差,

$$\delta_{m,k} = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

以 \mathbf{R}_{xx} 的第 m 行元素构成包含各信号的 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{R}_r(m)$, 为

$$\mathbf{R}_r(m) = \begin{bmatrix} r(m, 0) & r(m, 1) & \dots & r(m, h) \\ r(m, -1) & r(m, 0) & \dots & r(m, h-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(m, -h) & r(m, -h+1) & \dots & r(m, 0) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$= \mathbf{A}_r \mathbf{D}(m) \mathbf{A}_r^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{h+1, m}$$

式(15)中的 \mathbf{A}_r 符合范德蒙德结构, 只要 $\varphi_i \neq \varphi_j (i \neq j)$, 它们的各列线性无关, 则 $\text{rank}(\mathbf{A}_r) = K$ 。又因为 $\mathbf{D}(m) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_K)$, 只要各信号均不为 0, 即 $d_i \neq 0$, 则 $\mathbf{D}(m) = K$ 。因此, $\text{rank}(\mathbf{A}_r) = \text{rank}(\mathbf{D}(m)) = K$ 达到解相干目的。

本文算法为了更加充分的利用阵列接收数据, 还选用了 \mathbf{R}_{xx} 的第 m 列元素构成各信号方向的 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{R}_c(m)$ 。

$$\mathbf{R}_c(m) = \begin{bmatrix} r(0, m) & r(-1, m) & \dots & r(-h, m) \\ r(1, m) & r(0, m) & \dots & r(-h+1, m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(h, m) & r(h-1, m) & \dots & r(0, m) \end{bmatrix} \quad (13)$$

根据 Toeplitz 矩阵的性质, 式(16)中的 $\mathbf{R}_c(m)$ 可做如下变形:

$$\mathbf{R}_c(m) = \mathbf{R}_r^H(m) = (\mathbf{J} \mathbf{R}_r^T(m) \mathbf{J})^H = \mathbf{J} \mathbf{R}_r^*(m) \mathbf{J} \quad (14)$$

利用式(16)与式(17)构造新的协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(m) &= \frac{1}{2} (\mathbf{R}_r(m) + \mathbf{R}_c(m)) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{R}_r(m) + \mathbf{R}_r^H(m)) \\ &= \tilde{\mathbf{A}}_r \mathbf{D}(m) \tilde{\mathbf{A}}_r^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{h+1, m} \end{aligned} \quad (15)$$

式(18)求平均的过程相当于一次双向空间平滑, 进一

步提高了算法的估计性能,减小了误差和噪声带来的影响。为了进一步提高估计性能,对矩阵 \mathbf{R}_{xx} 的所有行列进行加权求平均得

$$\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{-h}^h \mathbf{R}'(m) \quad (16)$$

假定 Δ 为阵元误差矩阵,则有 $\tilde{\mathbf{R}}_r(m) = \mathbf{R}_r(m) + \Delta$, 经过处理后的阵元可以表示为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}(m) &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{R}}_r(m) + \tilde{\mathbf{R}}_c(m)) \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{R}}_r(m) + \mathbf{J}\tilde{\mathbf{R}}_r^*(m)\mathbf{J}) \\ &= \mathbf{R}_r(m) + \frac{1}{2}(\Delta + \mathbf{J}\Delta^*\mathbf{J}) \end{aligned} \quad (17)$$

通过式(20)可以看出,经过加权处理后的阵列数据矩阵的误差减小了,从而提高了算法的估计性能。

对式(19)处理后的协方差矩阵 $\bar{\mathbf{R}}$ 进行特征值分解,得到信号子空间 \mathbf{U} 和噪声子空间 \mathbf{V} 。

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H \quad (18)$$

4. DOA 估计

根据上一节中子空间估计的结果,若利用 MUSIC 算法进行 DOA 估计,其空间谱表达式如下所示:

$$P_{MUSIC}(\varphi) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\varphi)\mathbf{U}\mathbf{U}^H\mathbf{a}(\varphi)} \quad (19)$$

若采用 ESPRIT 算法进行 DOA 估计。根据估计得到的信源数目 K ,重新构造信号子空间和噪声子空间,如下所示

$$\mathbf{U}' = \mathbf{U}(:, 1:K) \quad (20)$$

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}(:, 1:K) \quad (21)$$

$$\Sigma' = \Sigma(1:K, 1:K) \quad (22)$$

然后利用得到的信号子空间和噪声子空间重新构造包含 K 个最大特征值的协方差矩阵为

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U}'\Sigma'\mathbf{V}'^H \quad (23)$$

根据子阵空间的旋转不变性,构造两个子阵

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}(1:K, :) \quad (24)$$

$$\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}(2:K+1, :) \quad (25)$$

结合式(27)和式(28),有

$$\Psi = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \quad (26)$$

求得矩阵 Ψ 的最大特征值,即相应的估计角度为 $[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K]$ 。

5. 仿真分析

为了验证本文算法的有效性,进行了仿真实验。仿真实验采用 8 阵元的均匀圆阵,阵元间距 $d = \lambda/2$,最大相位模式 $h = 3$,可激发 7 个相位模式,形成阵元数为 7 的虚拟阵元。假设有 3 个 QPSK 信号,信号 1 为主径信号,信号 2 与信号 3 为多径效应产生的相干信号。信号 1、信号 2、信号 3 的波达方向分别为 $(\theta_1, \phi_1) = (30, 60)$ 、 $(\theta_2, \phi_2) = (125, 30)$ 、 $(\theta_3, \phi_3) = (130, 35)$ 。

实验 1 本文算法的空间谱

图 3 给出了 SNR 为 20 dB, 快拍数为 1024 时,本文算法(采用 MUSIC 算法)在相干多径环境下的 DOA 估计结果。从图中可以看出,本文算法在相干多径环境下可以准确估计出目标方向。

实验 2 本文算法与 MODE-FBSS、MODE-TOEP 三种算法的统计性能比较

进行了 200 次 Monte-Carlo 实验。本文对相干信号中 $(\theta_i, \varphi_i) = (30, 60)$ 进行了仿真。图 4 为快拍数为 1024 时,三种算法的 DOA 估计均方根误差与 SNR 的关系曲线。图 5 为信噪比为 20 dB 时,三种算法的 DOA 估计均方根误差与 SNR 的关系曲线。图 6 为快拍数为 1024 时,三种算法的 DOA 估计成功概率与信 SNR 的关系曲线。

从图 4 可以看出,当信噪比小于 17 dB 时,本文算法的均方根误差小于 MODE-FBSS 算法和 MODE-TOEP

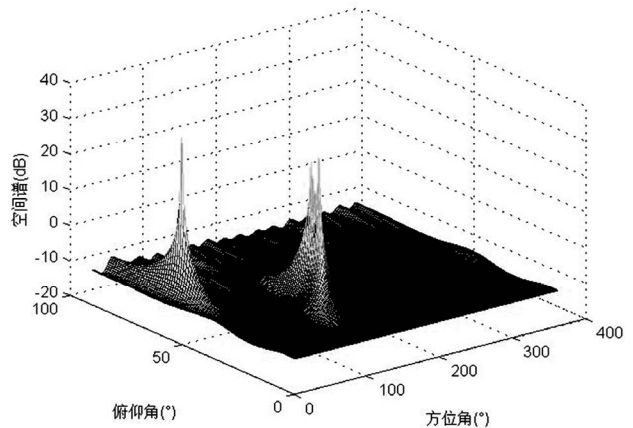


Figure 3. MUSIC spectrum showing
图 3. 本文算法空间谱

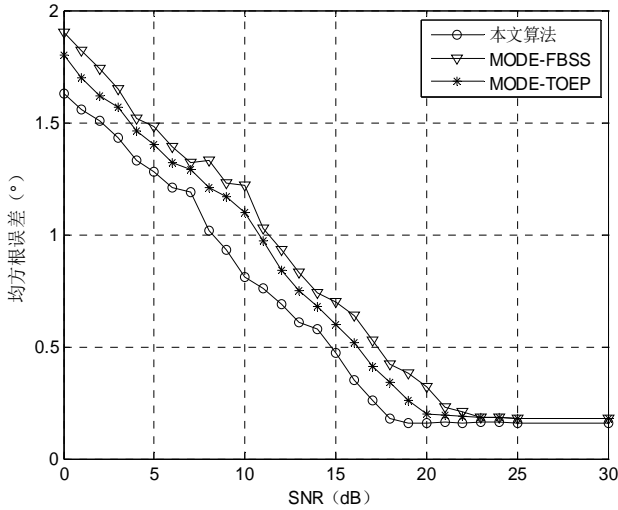


Figure 4. RMSE of the estimate versus SNR
图 4. 均方根误差与信噪比的关系曲线

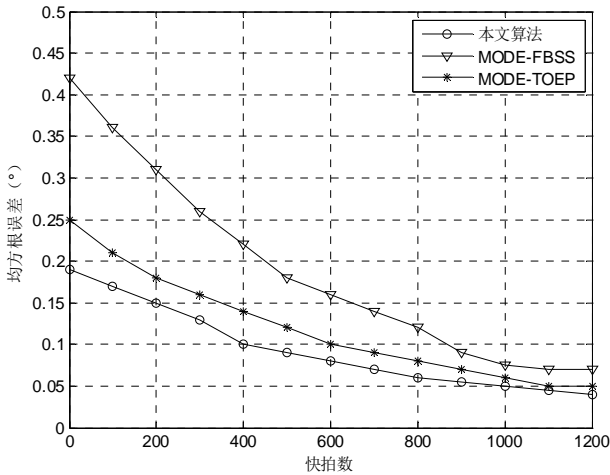


Figure 5. RMSE of the estimate versus snapshot
图 5. 均方根误差与快拍数的关系曲线

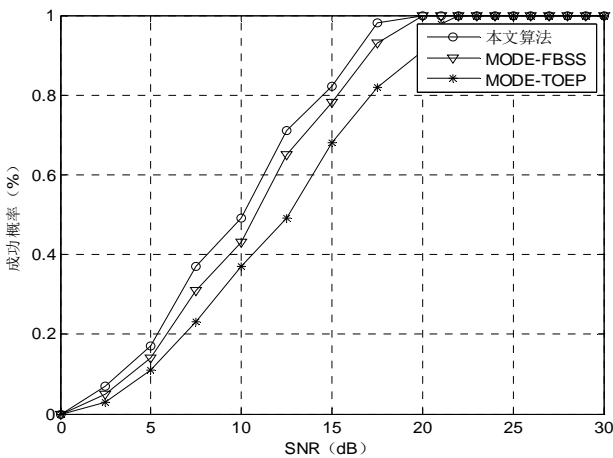


Figure 6. Probability of success versus SNR
图 6. 成功概率与信噪比的关系曲线

算法, 说明本文算法的精度比较高。随着信噪比的增大, 三种算法趋于稳定。从图 5 可以看出, 随着快拍数的增大, 三种算法的均方根误差随之下降并趋于稳定, 当快拍数小于 1000 时, 本文算法的精度比较高。从图 6 可以看出, 随着信噪比的增加, 三种算法的成功概率越来越大, 并逐渐趋于稳定, 相对而言, 本文算法的成功概率高于其它两种算法。

6. 结论

本文提出了一种改进的 Toeplitz 解相干 DOA 估计算法。该算法利用模式空间变换算法, 将均匀圆阵变为虚拟均匀线阵, 然后利用得到的数据构造两个 Toeplitz 矩阵取均值, 这一过程相当于双向平滑处理, 减少了误差和噪声对阵元的影响。理论推导和仿真结果证明了本文算法的有效性和可行性, 较之 MODE-FBSS 算法和 MODE-TOEP 算法, 减少了误差和噪声对阵元的影响, 提高了算法的估计性能。

7. 致谢

此刻我对资助者或支持者、提供指导和帮助者、给予转载和引用权的资料、图片、文献、研究思想和设想的所有者, 表示感谢。

参考文献 (References)

- [1] P. Ioannides, C. A. Balanis. Uniform circular arrays for smart antennas. IEEE of Antennas and Propagation Magazine, 2005, 47(4): 192-206.
- [2] R. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276-280.
- [3] R. Roy, A. Paulraj and T. Kailath. ESPRIT--A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1986, 34(5): 1340-1342.
- [4] C. P. Mathews, M. D. Zoltowski. Eigenstructure techniques for 2-D angle estimation with uniform circular arrays. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(9): 2395-2407.
- [5] S. U. Pillai, B. H. Kwon. Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37(1): 8-15.
- [6] C. Yih-Min. On spatial smoothing for two-dimensional direction-of-arrival estimation of coherent signals. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(7): 1689-1696.
- [7] T. K. Sarkar, O. Pereira. Using the matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials. IEEE of Antennas and Propagation Magazine, 1995, 37(1): 48-55.
- [8] N. Yilmazer, K. Jinhwan and T. K. Sarkar. Utilization of a unitary transform for efficient computation in the matrix pencil method to find the direction of arrival. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2006, 54(1): 175-181.
- [9] M. Wax, J. Sheinvald. Direction finding of coherent signals via

- spatial smoothing for uniform circular arrays. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1994, 42(5): 613-620.
- [10] R. Eiges, H. D. Griffiths. Mode-space spatial spectral estimation for circular arrays. IEE Proceedings of Radar, Sonar and Navigation, 1994, 141(6): 300-306.
- [11] 高书彦, 陈辉, 王永良等. 基于均匀圆阵的模式空间矩阵重构算法[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(12): 2832-2835.
- [12] H. Fang-Ming, Z. Xian-Da. An ESPRIT-like algorithm for coherent DOA estimation. IEEE of Antennas and Wireless Propagation Letters, 2005, 4(6): 443-446.