Open Journal of Acoustics and Vibration 声学与振动, 2022, 10(4), 45-58
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ojav
https://doi.org/10.12677/ojav.2022.104006

板振动特征值问题基于混合格式的二网格方法研究

张云飞，段丽梅，徐良坤

贵州师范大学数学科学学院，贵州 贵阳

收稿日期：2022年11月6日；录用日期：2022年12月6日；发布日期：2022年12月27日

摘 要

本文对于求解板振动特征值问题，给出了基于Cialet-Raviart (C-R)混合方法移位反迭代的二网格离散化方法。利用我们的方案可知，求解细网格 π_h 上的板振动特征值问题可以简化为求粗网格 π_H 上的板振动问题和细网格上 π_h 线性方程组的解。我们证明了当 $H > h \geq O\left(H^2\right)$ 时，求得的解仍然保持渐近最优精度。最后，我们用得到的数值结果表明了该方案的高效性。

关键词

二网格离散化，Ciarlet-Raviart混合方法，板振动特征值问题，移位反迭代

Two-Grid Method Based on Hybrid Scheme for Plate Vibration Eigenvalue Problem

Yunfei Zhang, Limei Duan, Liangkun Xu

School of Mathematics Science, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Nov. 6th, 2022; accepted: Dec. 6th, 2022; published: Dec. 27th, 2022

Abstract

In this paper, for plate vibration eigenvalue problem, we primarily give the two-grid discretization based on the shifted-inverse iteration of Ciarlet-Raviart mixed method. According to this scheme, the eigenvalue problem of plate vibration on π_h grid can be simplified to the solution of plate vibration on π_H grid and the solution of system of linear equations on π_h grid. In this paper, it is proved that when $H > h \geq O\left(H^2\right)$, the solution still keeps asymptotically worst-case accuracy. Finally, the numerical results show the high efficiency of the proposed scheme.

文章引用：张云飞，段丽梅，徐良坤．板振动特征值问题基于混合格式的二网格方法研究[J]．声学与振动，2022, 10(4): 45-58. DOI: 10.12677/ojav.2022.104006

Keywords

Two-Grid Dispersion, Ciarlet-Raviart Mixed Method, Plate Vibration Eigenvalue Problem, Shifted-Inverse Iteration

1. 引言

板振动特征值问题在物理科学中起到了十分重要的作用。C-R 混合有限元法是处理四阶问题的一种合适的经典方法，由 Glowinski 和 Mercier 提出，然后由 Ciarlet 和 Raviart 进一步发展而来，之后该方法得到了广泛的关注和研究。在实际的计算中，我们希望在不损失精度的情况下，用更少的 CPU 时间得到近似解。为了满足这一要求，在有限元中引入了二网格和多网格离散化方法，这两种离散化方法具有较高的效率。Xu 首先提出了非对称非线性椭圆问题的二网格离散化技术。后来，它被成功地应用于[1]中的特征值问题。在上述的工作基础上，[2]提出了基于移位逆迭代的二网格离散化方法，随后将其应用于[3]中的 Maxwell 特征值问题、[4]中的 Stokes 特征值问题、[5]中的积分算子特征值问题等。[6]使用了基于移位逆迭代的多网格离散化方法。Boff 将特征值问题的混合公式分为两类，上述的 Stokes 和 Maxwell 特征值问题的混合方法属于第一类，C-R 混合公式属于第二类。C-R 混合有限元法的误差分析是基于 Ciarlet、Scholz 和 Falk-Osborn 的论证，但并不是 Brezzi-Babuska 定理中的所有条件都成立。虽然二网格离散化的应用广泛，但移位反迭代的二网格离散化很少应用于第二类混合公式。本文主要讨论板振动特征值问题基于 C-R 混合方法移位反迭代的二网格离散化的研究。

2. 基础理论准备

考虑下面的特征值问题：

$$\begin{aligned}&\Delta^2 u=\lambda u,\ \text{在}\ \Omega\text{内}\\&\Delta u=u=0,\ \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上}\end{aligned}\tag{2.1}$$

令 $\Omega\subset R^2$，此时(2.1)是一个板振动特征值问题。定义以下内积：

$$a(v,\psi)=\int_\Omega v\psi\mathrm{d}x,\quad b(\psi,v)=-\int_\Omega\nabla\psi\cdot\nabla v\mathrm{d}x,\quad (\psi,v)=\int_\Omega\psi v\mathrm{d}x$$

很明显我们能得到 $(\cdot,\cdot)$ 是 $L^2(\Omega)$ 上的内积，我们用 $\|f\|_0$ 来表示 f 在 $L^2(\Omega)$ 空间中的范数，有 $(\cdot,\cdot)^{1/2}$ 等价于 $\|\cdot\|_0$。

下面引出辅助变量，设 $\sigma=-\Delta u$，则(2.1)可以写成两个等价的拉普拉斯方程，当 $\Omega\subset R^d\ (d\ge 2)$，$u\in H^3(\Omega)$ 时，有：

$$-\Delta u=\sigma,\ \text{在}\ \Omega\ \text{内}\ u=0,\ \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上}\tag{2.2}$$

$$-\Delta\sigma=\lambda u,\ \text{在}\ \Omega\ \text{内}\ \sigma=0,\ \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上}\tag{2.3}$$

然后通过分部积分公式。得到如下关于(2.2)和(23)的 C-R 混合变分形式。

即寻找 $(\lambda,\sigma,u)\in R\times H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$，$(\sigma,u)\ne(0,0)$ 有：

$$a(\sigma,\psi)+b(\psi,u)=0,\quad \forall\psi\in H_0^1(\Omega)\tag{2.4}$$

$$b(\sigma,\varphi)=-\lambda(u,\varphi), \qquad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega) \tag{2.5}$$

设P是单元上κ满足包含$P\supset P_m$的多项式空间，P_m是有两个变量并且次数$\le m$的所有多项式的集合。上述有限元空间是拉格朗日有限元，本文设$m\ge 2$。

将(2.4)和(2.5)限制在上述有限元空间，得到离散混合变分形式：

寻找$(\lambda_h,\sigma_h,u_h)\in R\times V_h\times V_h^0$且$(\sigma_h,u_h)\ne(0,0)$，有：

$$a(\sigma_h,\psi)+b(\psi,u_h)=0, \qquad \forall\psi\in V_h \tag{2.6}$$

$$b(\sigma_h,\varphi)=-\lambda_h(u_h,\varphi), \qquad \forall\varphi\in V_h^0 \tag{2.7}$$

根据[7]第 11 节，我们定义相应的解算子如下：

$T:L^2(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$，$S:L^2(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$，对所有的$f\in D$有：

$$\begin{aligned} a(Sf,\psi)+b(\psi,Tf)&=0, \qquad \forall\psi\in H_0^1(\Omega)\\ b(Sf,\varphi)&=-(f,\varphi), \qquad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega)\end{aligned} \tag{2.8}$$

$T_h:L^2(\Omega)\to V_h^0\subset H_0^1(\Omega)$，$S_h:L^2(\Omega)\to V_h\in H_0^1(\Omega)$，对所有的$f\in D$有：

$$a(S_hf,\psi)+b(\psi,T_hf)=0, \qquad \forall\psi\in V_h \tag{2.9}$$

$$b(S_hf,\varphi)=-(f,\varphi), \qquad \forall\varphi\in V_h^0 \tag{2.10}$$

定义$\mu_k=\lambda_k^{-1}$，$\mu_{k,h}=\lambda_{k,h}^{-1}$在接下来的讨论中，如果没有说明，则$\mu,\mu_h,\lambda,\lambda_h$都表示第$k$个特征值。

假设λ的代数多重度为q，有$\lambda=\lambda_k=\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}=\cdots=\lambda_{k+q-1}$，设$M(\lambda)$表示关于$T$的$\lambda$的所有特征函数$\{u_j\}_k^{k+q-1}$所张成的空间，$M_h(\lambda)$表示关于$T_h$的所有收敛到$\lambda$的特征函数$\{u_{j,h}\}_k^{k+q-1}$所张成的空间，定义：

$$\left\|(T-T_h)|_{M(\lambda)}\right\|_s=\sup_{u\in M(\lambda),u\ne 0}\frac{\|(T-T_h)u\|_s}{\|u\|_s}, \qquad s=0,1 \tag{2.11}$$

通过[8]中的推论 2.1 可得，$\|T-T_h\|_1\to 0(h\to 0)$和：

$$\left\|(T-T_h)|_{M(\lambda)}\right\|_0\le Ch^{\alpha+\beta}, \qquad \left\|(T-T_h)|_{M(\lambda)}\right\|_1\le Ch^{\beta}$$

由[9]中可知，我们有以下椭圆估计：

$$\|Sg\|_{1+\alpha}\le C_{\Omega,\alpha}\|g\|_0, \qquad \forall g\in L^2(\Omega) \tag{2.12}$$

α通常属于$(0,1]$，当区域为凸型时，$\alpha=1$；当区域为 L 型时，$\alpha\le\frac{2}{3}$。

引理 2.1 设λ为(2.4)~(2.5)的第 k 个特征值，则$M(\lambda)\subset H^{\beta+1}(\Omega)(\beta\le m)$且$(\lambda_h,\sigma_h,u_h)$是(2.6)~(2.7)的第$k$个特征对，有$\|u_h\|_0=1$，存在关于$\lambda$的一个特征函数$(\sigma,u)(\sigma=S(\lambda u))$，$\|u\|_0=1$有：

$$|\lambda_h-\lambda|\le Ch^{2\beta} \tag{2.13}$$

$$\|\sigma-\sigma_h\|_0\le Ch^{\alpha+\beta} \tag{2.14}$$

$$\|u-u_h\|_0\le Ch^{\alpha+\beta} \tag{2.15}$$

$$\|u-u_h\|_1\le Ch^{\beta} \tag{2.16}$$

设$u\in M(\lambda)$和$\|u\|_0=1$，然后存在$u_h\in M_h(\lambda)$有：

$$\left\|u-u_h\right\|_1 \le Ch^{\beta} \tag{2.17}$$

证明. 通过[10]中的定理 2.2 和推论 2.1 可证。□

对于$\left(\sigma^*,u^*\right)\in H^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$，$u^*\ne 0$，定义瑞利商：

$$\lambda^r=\frac{a\left(\sigma^*,\sigma^*\right)+2b\left(\sigma^*,u^*\right)}{-\left(u^*,u^*\right)} \tag{2.18}$$

引理 2.2 假设(λ,σ,u)是(2.4)~(2.5)的特征对，对于任意的$\left(\sigma^*,u^*\right)\in H^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$，$u^*\ne 0$，则有瑞利商$\lambda^r$满足：

$$\lambda^r-\lambda=\frac{a\left(\sigma^*-\sigma,\sigma^*-\sigma\right)+2b\left(\sigma^*-\sigma,u^*-u\right)}{-\left(u^*,u^*\right)}+\lambda\frac{\left(u^*-u,u^*-u\right)}{-\left(u^*,u^*\right)} \tag{2.19}$$

证明. 通过(2.4)和(2.5)，我们有：

$$\begin{aligned}
&a\left(\sigma^*-\sigma,\sigma^*-\sigma\right)+2b\left(\sigma^*-\sigma,u^*-u\right)+\lambda\left(u^*-u,u^*-u\right)\\
&=a\left(\sigma^*,\sigma^*\right)+b\left(\sigma^*,u^*\right)+b\left(\sigma^*,u^*\right)+\lambda\left(u^*,u^*\right)\\
&\quad-\left(a\left(\sigma^*,\sigma\right)+b\left(\sigma,u^*\right)+b\left(\sigma^*,u\right)+\lambda\left(u^*,u\right)\right)\\
&\quad-\left(a\left(\sigma,\sigma^*-\sigma\right)+b\left(\sigma^*-\sigma,u\right)+b\left(\sigma,u^*-u\right)+\lambda\left(u,u^*-u\right)\right)\\
&=a\left(\sigma^*,\sigma^*\right)+2b\left(\sigma^*,u^*\right)+\lambda\left(u^*,u^*\right)
\end{aligned}$$

然后对两边同除以$-\left(u^*,u^*\right)$就得到了(2.29)。□

在我们的分析中需要得出下面的结论。

引理 2.3 对于任意的$f\in L^2(\Omega)$，我们有：

$$\left\|T_h f\right\|_1 \le C\left\|f\right\|_0 \tag{2.20}$$

$$\left\|S_h f\right\|_0 \le C\left\|f\right\|_0 \tag{2.21}$$

证明. 分别令(2.9)和(2.10)中的$\psi=S_h f,\varphi=T_h f$，我们有：

$$\left\|S_h f\right\|_0^2=\left(f,T_h f\right)\le C\left\|f\right\|_0\left\|T_h f\right\|_0\le C\left\|f\right\|_0\left\|T_h f\right\|_1 \tag{2.22}$$

令(2.9)中$\psi=T_h f$，然后有：

$$\left\|T_h f\right\|_1^2\le -a\left(S_h f,T_h f\right)\le C\left\|S_h f\right\|_0\left\|T_h f\right\|_0$$

对上式两边同除以$\left\|T_h f\right\|_1$得到：

$$\left\|T_h f\right\|_1\le C\left\|S_h f\right\|_0 \tag{2.23}$$

将(2.23)带入(2.22)中得到(2.21)，将(2.21)带入(2.23)中得到(2.20)。□

3. 基于移位反迭代的二网格离散化方案

在本节中，我们将参考[11]针对板振动特征值问题 C-R 混合变分公式建立基于移位反迭代的二网格离散化方案。设$V_H\in V_h\in H_0^1(\Omega)$，$V_H^0\in V_h^0\in H_0^1(\Omega)$和$h<H$。

方案 3.1 (基于移位反迭代的二网格离散化)

第 1 步求解粗网格π_H上的特征值问题(2.6)~(2.7)。寻找$\left(\lambda_H,\sigma_H,u_H\right)\in R\times V_H\times V_H^0$，$\left\|u_H\right\|_0=1$满足：

$$a(\sigma_H,\psi)+b(\psi,u_H)=0,\quad \forall\psi\in V_H \tag{3.1}$$

$$b(\sigma_H,\varphi)=-\lambda_H(u_H,\varphi),\quad \forall\varphi\in V_H^0 \tag{3.2}$$

第 2 步在细网格 π_h 上解决这个方程：寻找 $(\sigma',u')\in V_h\times V_h^0$ 成立

$$a(\sigma',\psi)+b(\psi,u')=0,\quad \forall\psi\in V_h \tag{3.3}$$

$$b(\sigma',\varphi)+\lambda_H(u',\varphi)=-(u_H,\varphi),\quad \forall\varphi\in V_h^0 \tag{3.4}$$

设 $u^h=\dfrac{u'}{\|u'\|_0}$，$\sigma^h=\dfrac{\sigma'}{\|u'\|_0}$。

第 3 步计算瑞利商

$$\lambda^h=\frac{a(\sigma^h,\sigma^h)+2b(\sigma^h,u^h)}{-(u^h,u^h)}$$

设 (λ_H,σ_H,u_H) 是(3.1)~(3.2)的第 k 个特征对，则方案(3.1)得到的 (λ^h,σ^h,u^h) 为(2.4)~(2.5)的第 k 个近似特征对。

虽然第 2 步中的系统几乎是奇异的，但求解(3.3)~(3.4)的系统并不困难，接下来将讨论 3.1 方案的效率，定义 $dist(u,W)=\inf\limits_{v\in W}\|u-v\|_1$，以下的有效性引理将为我们在本文中的后续工作提供基础。

引理 3.1 设 (μ_0,w_0) 是 (μ,u) 的第 k 个近似特征对，其中 μ_0 不是 T_h 的特征值，$w_0\in V_h^0$，$\|w_0\|=1$ 设 $u_0=\dfrac{T_hw_0}{\|T_hw_0\|_0}$ 假设：

(C1) $\inf\limits_{v\in M_h(\lambda)}\|w_0-v\|_0\le\dfrac{1}{2}$；

(C2) $|\mu_0-\mu|\le\dfrac{\rho}{4}$，$|\mu_{j,h}-\mu_j|\le\dfrac{\rho}{4}$，$j=k-1,k,k+q(j\ne0)$ 其中 $\rho=\min\limits_{j\ne k}|\mu_j-\mu|$ 是特征值 μ 的第 k 个分隔常数；

(C3) 令 $u'\in V_h^0$，$u^h\in V_h^0$ 满足

$$(\mu_0-T_h)u'=u_0,\quad u^h=\frac{u'}{\|u'\|_0} \tag{3.5}$$

然后有

$$dist(u^h,M_h(\lambda))\le\frac{C}{\rho}\max_{k\le j\le k+q-1}|\mu_0-\mu_{j,h}|dist(w_0,M_h(\lambda)) \tag{3.6}$$

证明. 注意到关于 T_h 的特征值函数 $\{u_{j,h}\}_1^d$ 可作为 V_h^0 关于 $(\cdot,\cdot)$ 的标准正交基。$u_0=\sum\limits_{j=1}^d(u_0,u_{j,h})u_{j,h}$ 由于 μ_0 不是 T_h 的特征值，通过(3.5)，我们有

$$(\mu_0-\mu_h)u'=(\mu_0-\mu_h)(\mu_0-T_h)^{-1}u_0=\sum_{j=1}^d\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}(u_0,u_{j,h})u_{j,h} \tag{3.7}$$

使用三角不等式和(C2)条件有

$$|\mu_0-\mu_h|\le|\mu_0-\mu|+|\mu-\mu_h|\le\frac{\rho}{4}+\frac{\rho}{4}=\frac{\rho}{2}$$

$$|\mu_0-\mu_{j,h}|\ge|\mu-\mu_j|-|\mu_0-\mu|-|\mu_j-\mu_{j,h}|\ge\rho-\frac{\rho}{4}-\frac{\rho}{4}=\frac{\rho}{2}$$

当 $j=k-1,k+q(j\ne0)$ 时，我们能得到

$$\left|\mu_0-\mu_{j,h}\right|\ge\frac{\rho}{2},\qquad j\ne k,k+1,\cdots,k+q-1 \tag{3.8}$$

由于 T_h 对于 $(\cdot,\cdot)$ 是自共轭的，并且有 $T_hu_h=\mu_{j,h}u_h$，对于所有的 $j=1,2,\cdots,d$ 成立

$$\begin{aligned}\left(T_h\omega_0,u_{j,h}\right)u_{j,h}&=\left(\omega_0,T_hu_{j,h}\right)u_{j,h}=\left(\omega_0,\mu_{j,h}u_{j,h}\right)u_{j,h}\\&=\left(\omega_0,u_{j,h}\right)\mu_{j,h}u_{j,h}=\left(\omega_0,u_{j,h}\right)T_hu_{j,h}\end{aligned} \tag{3.9}$$

注意到 $\left\{u_{j,h}\right\}_k^{k+q-1}$ 是 $M_h(\lambda)$ 的一个标准正交基，通过 $u_0=\dfrac{T_h\omega_0}{\left\|T_h\omega_0\right\|_0}$，(3.7)，(3.9)，(2.20)和(3.8)，我们可以推导

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\mu_0-\mu_h\right)u'-\sum_{j=k}^{k+q-1}\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}\left(u_0,u_{j,h}\right)u_{j,h}\right\|_1\\
&=\left\|\sum_{j\ne k,k+1,\cdots,k+q-1}\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}\left(u_0,u_{j,h}\right)u_{j,h}\right\|_1\\
&=\frac{1}{\left\|T_h\omega_0\right\|_0}\left\|\sum_{j\ne k,k+1,\cdots,k+q-1}\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}\left(T_h\omega_0,u_{j,h}\right)u_{j,h}\right\|_1\\
&=\frac{1}{\left\|T_h\omega_0\right\|_0}\left\|T_h\sum_{j\ne k,k+1,\cdots,k+q-1}\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}\left(\omega_0,u_{j,h}\right)u_{j,h}\right\|_1\\
&\le\frac{C}{\left\|T_h\omega_0\right\|_0}\left\|\sum_{j\ne k,k+1,\cdots,k+q-1}\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}\left(\omega_0,u_{j,h}\right)u_{j,h}\right\|_0\\
&\le\frac{2C}{\rho\left\|T_h\omega_0\right\|_0}\left|\mu_0-\mu_h\right|\left(\sum_{j\ne k,k+1,\cdots,k+q-1}\left(\omega_0,u_{j,h}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le\frac{C}{\rho\left\|T_h\omega_0\right\|_0}\left|\mu_0-\mu_h\right|\left\|\omega_0-\sum_{j=k}^{k+q-1}\left(\omega_0,u_{j,h}\right)u_{j,h}\right\|_0\\
&=\frac{C}{\rho\left\|T_h\omega_0\right\|_0}\left|\mu_0-\mu_h\right|\inf_{v\in M_h(\lambda)}\left\|\omega_0-v\right\|_0\\
&\le\frac{C}{\rho\left\|T_h\omega_0\right\|_0}\left|\mu_0-\mu_h\right|dist\left(\omega_0,M_h(\lambda)\right)\end{aligned} \tag{3.10}$$

对(3.7)两边取范数，通过 $u_0=\dfrac{T_h\omega_0}{\left\|T_h\omega_0\right\|_0}$ 和(3.9)，我们能得到

$$\begin{aligned}\left\|\left(\mu_0-\mu_h\right)u'\right\|_0&=\frac{1}{\left\|T_h\omega_0\right\|_0}\left\|\sum_{j=1}^{d}\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}\left(T_h\omega_0,u_{j,h}\right)u_{j,h}\right\|_0\\
&=\frac{1}{\left\|T_h\omega_0\right\|_0}\left(\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}\left(\omega_0,\mu_{j,h}u_{j,h}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\ge\frac{1}{\left\|T_h\omega_0\right\|_0}\min_{k\le j\le k+q-1}\left|\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}\right|\left(\sum_{j=k}^{k+q-1}\left(\omega_0,\mu_{j,h}u_{j,h}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{\left\|T_h\omega_0\right\|_0}\min_{k\le j\le k+q-1}\left|\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}\right|\left\|\omega_0-\left(\omega_0-\sum_{j=k}^{k+q-1}\left(\omega_0,\mu_{j,h}u_{j,h}\right)u_{j,h}\right)\right\|_0 \\
&\ge\frac{1}{2\left\|T_h\omega_0\right\|_0}\min_{k\le j\le k+q-1}\left|\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}\right|
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

从(3.10)和(3.11)，我们能获得

$$
\begin{aligned}
dist\left(u^h,M_h(\lambda)\right)&=dist\left(sign\left(\mu_0-\mu_h\right)u^h,M_h(\lambda)\right)\\
&\le\left\|sign\left(\mu_0-\mu_h\right)u^h-\frac{1}{\left\|\left(\mu_0-\mu_h\right)u'\right\|_0}\sum_{j=k}^{k+q-1}\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}\left(u_0,u_{j,h}\right)u_{j,h}\right\|_1\\
&\le\left\|\frac{\left(\mu_0-\mu_h\right)u'}{\left\|\left(\mu_0-\mu_h\right)u'\right\|_0}-\frac{1}{\left\|\left(\mu_0-\mu_h\right)u'\right\|_0}\sum_{j=k}^{k+q-1}\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}\left(u_0,u_{j,h}\right)u_{j,h}\right\|_1\\
&\le2\left\|T_h\omega_0\right\|_0\max_{k\le j\le k+q-1}\left|\frac{\mu_0-\mu_{j,h}}{\mu_0-\mu_h}\right|\left\|\left(\mu_0-\mu_h\right)u'-\sum_{j=k}^{k+q-1}\frac{\mu_0-\mu_h}{\mu_0-\mu_{j,h}}\left(u_0,u_{j,h}\right)u_{j,h}\right\|_1\\
&\le\frac{C}{\rho}\max_{k\le j\le k+q-1}\left|\mu_0-\mu_{j,h}\right|dist\left(\omega_0,M_h(\lambda)\right)
\end{aligned}
$$

证明完成。□

引理 3.1 适用于一般的离散混合公式，包括求解四旋度特征值问题的混合有限元法和求解 Kirchhoff 板振动问题的 Hell-Herrmann-Johnson 混合有限元法等，它对证明二网格近似 u^h 的误差估计有重要作用。

定理 3.1 假定 $M(\lambda)\subset H^{\beta+1}(\Omega)$，设 $\left(\lambda^h,\sigma^h,u^h\right)$ 是由方案 3.1 获得的第 k 个近似特征对，且 H 足够小，则存在 $u\in M(\lambda)$，$\sigma=S(\lambda u)$ 使

$$\left\|u^h-u\right\|_1\le C\left(H^{3\beta}+h^{\beta}\right)\tag{3.12}$$

$$\left\|\sigma^h-\sigma\right\|_0\le C\left(H^{2\beta}+h^{\alpha+\beta}\right)\tag{3.13}$$

$$\left\|\lambda^h-\lambda\right\|_0\le C\left(H^{2\beta}+h^{\alpha+\beta}\right)^2\tag{3.14}$$

证明. 我们先使用引理 3.1 来证明(3.12)，要验证引理 3.1 的所有条件。首先，我们先证明引理 3.1 的条件(C1)成立。

设 $\left(\lambda_H,\sigma_H,u_H\right)$ 由方案 3.1 的步骤 1 得到，选择 $\mu_0=\dfrac{1}{\lambda_H}$，$\omega_0=u_H$ 有 $u_0=\dfrac{T_hu_H}{\left\|T_hu_H\right\|_0}$，使用三角不等式和(2.15)和(2.17)，我们可以推导出

$$dist\left(u_H,M_h(\lambda)\right)\le\left\|u_H-u\right\|_1+dist\left(u,M_h(\lambda)\right)\le CH^{\beta}\tag{3.15}$$

即条件(C1)成立。

第二，我们验证条件(C2)是正确的，根据(2.13)我们有

$$\left|\mu_0-\mu\right|=\frac{\left|\lambda_H-\lambda\right|}{\lambda_H\lambda}\le CH^{2\beta}\le\frac{\rho}{4}$$

$$\left|\mu_j-\mu_{j,h}\right|\frac{\left|\lambda_{j,h}-\lambda_j\right|}{\lambda_{j,h}\lambda_j}\le Ch^{2\beta}\le\frac{\rho}{4}$$

即条件(C2)有效。

最后，我们验证条件(C3)，由(3.3)和(3.4)，我们可以推导

$$a(\sigma',\psi)+b(\psi,u')=0, \qquad \forall \psi \in V_h$$
$$b(\sigma',\varphi)=-(u_H+\lambda_H u',\varphi),\ \forall \varphi \in V_h^0$$

由(2.9)和(2.10)可以得

到

$$\sigma' = S_h(\lambda_H u' + u_H) \tag{3.16}$$

$$u' = T_h(\lambda_H u' + u_H) \tag{3.17}$$

从(3.17)，我们可以推导

$$(\lambda_H^{-1} - T_h)u' = \lambda_H^{-1} T_h u_H，\quad u^h = \frac{u'}{\|u'\|_0} \tag{3.18}$$

注意到 $\lambda_H^{-1} T_h u_H = \|\lambda_H^{-1} T_h u_H\|_0 u_0$ 不同于 u_0 的是仅相差一个常数，那么方案 3.1 的第 2 步等价于

$$(\lambda_H^{-1} - T_h)u' = u_0，\quad u^h = \frac{u'}{\|u'\|_0}$$

从上面的论证我们可以看到引理 3.1 的所有条件都成立。

我们将利用引理 3.1 证明(3.12)是正确的，由于 $M_h(\lambda)$ 是一个维数为 q 的空间，必定有 $u^* \in M_h(\lambda)$ 成立

$$\|u^h - u^*\|_1 = dist(u^h, M_h(\lambda)) \tag{3.19}$$

另外，对于 $k \le j \le k+q-1$，我们知道

$$|\mu_0 - \mu_{j,h}| = \left|\frac{1}{\lambda_H} - \frac{1}{\lambda_{j,h}}\right| \le \frac{|\lambda_H - \lambda_{j,h}|}{\lambda_H \lambda_{j,h}} \le C|\lambda_H - \lambda_{j,h}| \le C(|\lambda_H - \lambda| + |\lambda - \lambda_{j,h}|) \le CH^{2\beta} \tag{3.20}$$

结合(3.19)将(3.20)和(3.15)代入(3.6)，得到

$$\|u^h - u^*\|_1 = dist(u^h, M_h(\lambda)) \le C \max_{k \le j \le k+q-1} |\mu_0 - \mu_{j,h}| \, dist(u_H, M_h(\lambda)) \le CH^{3\beta} \tag{3.21}$$

通过(2.16)可知，存在一个 $u \in M(\lambda)$，使得 $\|u^* - u\|_1 = dist(u^*, M(\lambda))$ 和 $\|u^* - u\|_1 \le Ch^\beta$，然后可得

$$\|u^h - u\|_1 \le \|u^h - u^*\|_1 + \|u - u^*\|_1 \le C(H^{3\beta} + h^\beta) \tag{3.22}$$

即(3.12)是有效的，接下来我们证明(3.13)。

由(2.16)和(2.17)，我们可知存在一个 $u_h \in M_h(\lambda)$ 满足

$$\|u_H - u_h\|_1 \le CH^\beta + Ch^\beta \le CH^\beta$$

根据(2.20)和和自伴随算子范数的定义，我们可以推导

$$\begin{aligned}
&\left\|(\lambda_H^{-1} - T_h)^{-1} T_h (u_H - u_h)\right\|_1 \\
&= \left\|(\lambda_H^{-1} - T_h)^{-1}\left[\sum_k^{k+q-1}(u_H, \mu_{j,H} u_{j,h}) u_{j,H} - \sum_k^{k+q-1}(u_h, \mu_{j,h} u_{j,h}) u_{j,h}\right]\right\|_1 \\
&= \left\|\sum_k^{k+q-1}(u_H, \mu_{j,H} u_{j,h})(\lambda_H^{-1} - T_h)^{-1} u_{j,H} - \sum_k^{k+q-1}(u_h, \mu_{j,h} u_{j,h})(\lambda_H^{-1} - T_h)^{-1} u_{j,h}\right\|_1 \\
&\le \left\|\sum_k^{k+q-1}(u_H, \mu_{j,H} u_{j,h})(\lambda_H^{-1} - \lambda_h^{-1})^{-1} u_{j,H} - \sum_k^{k+q-1}(u_h, \mu_{j,h} u_{j,h})(\lambda_H^{-1} - \lambda_h^{-1})^{-1} u_{j,h}\right\|_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\left\|\left(\lambda_H^{-1}-\lambda_h^{-1}\right)^{-1}T_h\left(u_H-u_h\right)\right\|_1\\&\le C\left\|\left(\lambda_H^{-1}-\lambda_h^{-1}\right)^{-1}\left(u_H-u_h\right)\right\|_0\\&\le C\left|\left(\lambda_H^{-1}-\lambda_h^{-1}\right)^{-1}\right|\left\|u_H-u_h\right\|_0\\&\le C\frac{1}{\left|\lambda_H-\lambda_h\right|}\left\|u_H-u_h\right\|_0\end{aligned}\tag{3.23}$$

从(3.18)，我们有

$$u'=\left(\lambda_H^{-1}-T_h\right)^{-1}\left(\lambda_H^{-1}T_hu_H\right)\tag{3.24}$$

由于 $u_h\in M_h(\lambda)$ 和 $\left\{u_{j,h}\right\}_k^{k+q-1}$ 是 $M_h(\lambda)$ 的标准正交基，有

$$T_hu_h=T_h\sum_k^{k+q-1}\left(u_h,u_{j,h}\right)=\sum_k^{k+q-1}\left(u_h,u_{j,h}\right)T_hu_{j,h}=\sum_k^{k+q-1}\left(u_h,\mu_{j,h}u_{j,h}\right)u_{j,h}$$

由此我们可以推导

$$\begin{aligned}\left\|\left(\lambda_H^{-1}-T_h\right)^{-1}T_hu_h\right\|_0&=\left\|\left(\lambda_H^{-1}-T_h\right)^{-1}\sum_k^{k+q-1}\left(u_h,\mu_{j,h}u_{j,h}\right)u_{j,h}\right\|_0\\&=\left\|\sum_k^{k+q-1}\left(u_h,\mu_{j,h}u_{j,h}\right)\left(\lambda_H^{-1}-T_h\right)^{-1}u_{j,h}\right\|_0\\&=\left\|\sum_k^{k+q-1}\left(u_h,\mu_{j,h}u_{j,h}\right)\left(\lambda_H^{-1}-\lambda_{j,h}^{-1}\right)^{-1}u_{j,h}\right\|_0\\&=\left\{\sum_k^{k+q-1}\left(u_h,\mu_{j,h}u_{j,h}\right)^2\left|\frac{\lambda_{j,h}-\lambda_H}{\left(1-\lambda_H\right)\left(1-\lambda_{j,h}\right)}\right|^{-2}\right\}^{\frac{1}{2}}\\&\ge C\min_{k\le j\le k+q-1}\left\{\left|\lambda_H-\lambda_{j,h}\right|\right\}\left\|T_hu_h\right\|_0\\&\ge C\left\|\frac{1}{\lambda_H-\lambda_h}T_hu_h\right\|_0\end{aligned}$$

将上述等式与(3.24)和(3.23)结合，可以推出

$$\begin{aligned}\left\|u'\right\|_0&=\left\|\left(\lambda_H^{-1}-T_h\right)^{-1}\left(\lambda_H^{-1}T_hu_H\right)\right\|_0\\&=\left\|\left(\lambda_H^{-1}-T_h\right)^{-1}\lambda_H^{-1}T_h\left(u_H-u_h+u_h\right)\right\|_0\\&\ge\left\|\left(\lambda_H^{-1}-T_h\right)^{-1}\lambda_H^{-1}T_hu_h\right\|_0-\left\|\left(\lambda_H^{-1}-T_h\right)^{-1}\lambda_H^{-1}T_h\left(u_H-u_h\right)\right\|_0\\&\ge C\left(\left\|\left(\lambda_H^{-1}-T_h\right)^{-1}\lambda_H^{-1}T_hu_h\right\|_0-\frac{1}{\left|\lambda_h-\lambda_H\right|}\left\|u_H-u_h\right\|_0\right)\\&\ge C\left\|\frac{1}{\lambda_h-\lambda_H}u_h\right\|_0\end{aligned}\tag{3.25}$$

选择 $\sigma_h=S_h\left(\lambda_hu^*\right)$ 和 $\sigma=S(\lambda u)$。从(3.16)和(2.21)、(3.25)、(2.13)、(2.13)、(3.21)以及 $\sigma^h=\dfrac{\sigma'}{\left\|u'\right\|_0}$，

可以推导

$$\begin{aligned}\left\|\sigma^h-\sigma_h\right\|_0&=\left\|S_h\left(\frac{u_H}{\left\|u'\right\|_0}+\lambda_H u^h-\lambda_h u^*\right)\right\|_0\\&\le C\left\|\frac{u_H}{\left\|u'\right\|_0}+\lambda_H u^h-\lambda_h u^*\right\|_0\\&\le C\left(\left\|\frac{u_H}{\left\|u'\right\|_0}\right\|_0+\left\|\lambda_H u^h-\lambda_H u^*\right\|_0+\left\|\lambda_H u^*-\lambda_h u^*\right\|_0\right)\\&\le C\left(\left|\lambda_H-\lambda_h\right|+\left\|u^h-u^*\right\|_0+\left|\lambda_H-\lambda_h\right|\right)\\&\le C\left(H^{2\beta}+H^{3\beta}\right)\le CH^{2\beta}\end{aligned}\tag{3.26}$$

(3.13)可以根据(3.26)和(2.14)得出。

(2.19)将会被用来估计 λ^h 的误差，我们充分利用了 C-R 混合公式的结构特点去避免 $\left\|\sigma^h-\sigma\right\|_1$ 的估计。设 $I_h:C(\bar{\Omega})\to V_h$ 作为拉格朗日插值算子，由(2.4)和(3.3)，我们能得到

$$a\left(\sigma^h-\sigma,\psi\right)+b\left(\psi,u^h-u\right)=0,\quad \forall\psi\in V_h\tag{3.27}$$

由方案 3.1 的第三步可知

$$\lambda^h=\frac{a\left(\sigma^h,\sigma^h\right)+2b\left(\sigma^h,u^h\right)}{-\left(u^h,u^h\right)}$$

在(2.19)中，选择 $\lambda^r=\lambda^h$， $\sigma^*=\sigma^h$ 和 $u^*=u^h$， 使用(3.27)，(3.12)，(3.13)和插值误差估计可以得到

$$\begin{aligned}\lambda^h-\lambda&=\frac{a\left(\sigma^h-\sigma,\sigma^h-\sigma\right)+2b\left(\sigma^h-\sigma,u^h-u\right)}{-\left(u^h,u^h\right)}+\lambda\frac{\left(u^h-u,u^h-u\right)}{-\left(u^h,u^h\right)}\\&=\frac{-a\left(\sigma^h-\sigma,\sigma^h-\sigma\right)+2a\left(\sigma^h-\sigma,\sigma^h-\sigma\right)+2b\left(\sigma^h-\sigma,u^h-u\right)}{-\left(u^h,u^h\right)}+\lambda\frac{\left(u^h-u,u^h-u\right)}{-\left(u^h,u^h\right)}\\&=\frac{-a\left(\sigma^h-\sigma,\sigma^h-\sigma\right)+2a\left(\sigma^h-\sigma,I_h\sigma-\sigma\right)+2b\left(I_h\sigma-\sigma,u^h-u\right)}{-\left(u^h,u^h\right)}+\lambda\frac{\left(u^h-u,u^h-u\right)}{-\left(u^h,u^h\right)}\\&\le C\left(\left(H^{2\beta}+h^{\alpha+\beta}\right)^2+h^{\beta-1}\left(H^{2\beta}+h^{\alpha+\beta}\right)+h^{\beta-2}\left(H^{3\beta}+h^{\beta}\right)+\left(H^{3\beta}+h^{\beta}\right)^2\right)\\&\le C\left(H^{2\beta}+h^{\alpha+\beta}\right)^2\end{aligned}\tag{3.28}$$

(3.14)证明完成。□

4. 基于子空间移位反迭代的二网格离散化

[12]中对于特征值问题(2.1)，首先建立了基于反迭代(无位移)的二网格离散化方法。在本节中，我们将给出基于子空间移位反迭代的二网格离散化形式。

方案 4.1 (基于子空间移位逆迭代的二网格离散化)

步骤 1. 求解粗网格 π_H 上的特征值问题(2.6)~(2.7)：寻找 $\left(\lambda_{j,H},\sigma_{j,H},u_{j,H}\right)\in R\times V_H\times V_H^0$，使

$$a\left(\sigma_{j,H},\psi\right)+b\left(\psi,u_{j,H}\right)=0,\quad\forall\psi\in V_H\tag{4.1}$$

$$b\left(\sigma_{j,H},\varphi\right)=-\lambda_{j,H}\left(u_{j,H},\varphi\right),\quad \forall\varphi\in V_H^0 \tag{4.2}$$

并获得 $\left(\lambda_{j,H},\sigma_{j,H},u_{j,H}\right)$ 与 $\left(u_{j,H},u_{i,H}\right)=\delta_{i,j}\left(j=k,\cdots,d\right)$。

步骤 2. 求解精细网格 π_h 上的方程：寻找 $\left(\sigma_j',u_j'\right)\in V_h\times V_h^0\left(j=k,\cdots,d\right)$ 使

$$a\left(\sigma_j',\psi\right)+b\left(\psi,u_j'\right)=0,\qquad \forall\psi\in V_H \tag{4.3}$$

$$b\left(\sigma_j',\varphi\right)+\lambda_{k,H}\left(u_j',\varphi\right)=-\left(u_{j,H},\varphi\right),\quad \forall\varphi\in V_H^0 \tag{4.4}$$

设 $u_j^h=\dfrac{u_j'}{\left\|u_j'\right\|_0}$， $\sigma_j^h=\dfrac{\sigma_j'}{\left\|u_j'\right\|_0}$。

步骤 3. 计算瑞利商：

$$\lambda_j^h=-\left(a\left(\sigma_j^h,\sigma_j^h\right)+2b\left(\sigma_j^h,u_j^h\right)\right),\qquad j=k,\cdots,d$$

其中 d 表示 V_h^0 空间的维数。

设 $\left(\lambda_{j,H},\sigma_{j,H},u_{j,H}\right)$ 是(4.1)~(4.2)的第 j 个特征对，则 $\left(\lambda_j^h,\sigma_j^h,u_j^h\right)$ 为方案 4.1 得到关于(2.4)~(2.5)的第 j 个近似特征对 $\left(j=k,\cdots,d\right)$。

定理 4.1 假设 $M\left(\lambda\right)\subset H^{\beta+1}\left(\Omega\right)$ 设 $\left(\lambda^h,\sigma^h,u^h\right)$ 为方案 4.1 第 j 个近似特征对 $\left(j=k,k+1,\cdots,d\right)$ 则存在 $u\in M\left(\lambda\right)$ 和 $\sigma=S\left(\lambda u\right)$ 有

$$\left\|u^h-u\right\|_1\le C\left(H^{2\beta}+\left\|u_H-u\right\|_0+h^{\beta}\right) \tag{4.5}$$

$$\left\|\sigma^h-\sigma\right\|_0\le C\left(H^{2\beta}+\left\|u_H-u\right\|_0+h^{\beta+\alpha}\right) \tag{4.6}$$

$$\left|\lambda^h-\lambda\right|\le C\left(\left(H^{2\beta}+\left\|u_H-u\right\|_0+h^{\beta+\alpha}\right)^2+\left(H^{2\beta}+\left\|u_H-u\right\|_0\right)h^{\beta-2}\right) \tag{4.7}$$

证明. 由方案 4.1 的第 2 步，T_h 和 T 的定义和(2.21)，引理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}\left\|u^h-u\right\|_1&\le C\left\|T_h\left(\lambda_H u_H\right)-T\left(\lambda u\right)\right\|_1\\&\le C\left(\left\|T_h\left(\lambda_H u_H\right)-T_h\left(\lambda u_H\right)\right\|_1+\left\|T_h\left(\lambda u_H\right)-T_h\left(\lambda u\right)\right\|_1+\left\|T_h\left(\lambda u\right)-T\left(\lambda u\right)\right\|_1\right)\\&\le C\left(\left|\lambda_H-\lambda\right|+\left\|u_H-u\right\|_0+\left\|\left(T_h-T\right)\big|_{M(\lambda)}\right\|_1\right)\\&\le C\left(H^{2\beta}+\left\|u_H-u\right\|_0+h^{\beta}\right)\end{aligned} \tag{4.8}$$

通过 S_h 和 S 的定义，(2.20)和引理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}\left\|\sigma^h-\sigma\right\|_0&\le C\left\|S_h\left(\lambda_H u_H\right)-S\left(\lambda u\right)\right\|_0\\&\le C\left(\left\|S_h\left(\lambda_H u_H\right)-S_h\left(\lambda u_H\right)\right\|_0+\left\|S_h\left(\lambda u_H\right)-S_h\left(\lambda u\right)\right\|_0+\left\|S_h\left(\lambda u\right)-S\left(\lambda u\right)\right\|_0\right)\\&\le C\left(\left|\lambda_H-\lambda\right|+\left\|u_H-u\right\|_0+\left\|\left(S_h-S\right)\big|_{M(\lambda)}\right\|_0\right)\\&\le C\left(H^{2\beta}+\left\|u_H-u\right\|_0+h^{\beta-1}\right)\end{aligned} \tag{4.9}$$

从插值估计，我们有

$$\left\|I_h\sigma-\sigma\right\|_0\le Ch^{\beta-1},\qquad \left\|I_h\sigma-\sigma\right\|_1\le Ch^{\beta-2}$$

利用与(3.28)相似的证明，并将(4.5) (4.6)与上述两个不等式结合，得到

$$\begin{aligned}\left|\lambda^h-\lambda\right| &\le C\Big(\left(H^{2\beta}+\|u_H-u\|_0+h^{\beta+\alpha}\right)^2+\|I_h\sigma-\sigma\|_0\left(H^{2\beta}+\|u_H-u\|_0+h^{\beta-1}\right)\\ &\quad+\|I_h\sigma-\sigma\|_1\left(H^{2\beta}+\|u_H-u\|_0+h^{\beta}\right)+\left(H^{2\beta}+\|u_H-u\|_0+h^{\beta}\right)^2\Big)\\ &\le C\Big(\left(H^{2\beta}+\|u_H-u\|_0+h^{\beta+\alpha}\right)^2+\left(H^{2\beta}+\|u_H-u\|_0\right)h^{\beta-2}\Big)\end{aligned} \tag{4.10}$$

证明 4.1 完成。□

对于(2.1)，当 $\beta=2$ 时，我们有 $\|u_H-u\|_0\le CH^{\alpha+\beta}$ 。

在上述假设下，我们可以知道本文所有的论点和结果都是有效的。

5. 数值实验

在本节中，我们将通过数值结果来展示方案 3.1 的高效性。

我们的程序是在 iFEM 软件包下编译的。当区域为 2 维时，我们考虑在以下三个区域内求解(2.6)~(2.7)：正方形域且顶点分别为(0, 0)、(0, 1)、(1, 1)、(1, 0)，定义在 $[-0.5,0.5]^2/(0,0.5)\times(-0.5,0)$ 上的 L 型域，边长为 1 的正六边形，为了方便起见，我们设三个区域分别为 Ω_S 、 Ω_L 、 Ω_{HE} 我们分别在表 1~3 中列出在以上三种区域下，直接在细网格下所求得的解与方案 3.1 基于移位反迭代下的二网格离散化方法所求得的解，以及两种方法各自计算所用的时间。从三个表格数据我们可以看出，我们的方案 3.1 是高效的，并且解仍然保持渐近最优精度。

Table 1. The first two eigenvalues for (2.1) on the unit square by Scheme 3.1 with P2-element
表 1. 在正方形域上通过方案 3.1 用二次元求解(2.1)的前两个特征值

j	H	h	$\lambda_{j,H}$	$\lambda_{j,h}$	$\lambda_{j,H}$	$\lambda_{j,h}$	$\lambda_{j,h}$
1	$\sqrt{2}/16$	$\sqrt{2}/128$	389.646578599	389.636366648	8.91	389.636366647	2.92
1	$\sqrt{2}/16$	$\sqrt{2}/256$	389.646578599	389.636364279	40.58	389.636364286	7.77
1	$\sqrt{2}/32$	$\sqrt{2}/512$	389.6370006337	-	-	389.636364118	40.75
2	$\sqrt{2}/16$	$\sqrt{2}/128$	2435.555564930	2435.227357440	9.05	2435.227357440	2.93
2	$\sqrt{2}/16$	$\sqrt{2}/256$	2435.555564930	2435.227280957	40.76	2435.227280934	8.88
2	$\sqrt{2}/32$	$\sqrt{2}/512$	2435.248074108	-	-	2435.227276101	43.79

Table 2. The first two eigenvalues for (2.1) on the L-shaped domain by Scheme 3.1 with P2-element
表 2. 在 L 域上通过方案 3.1 用二次元求解(2.1)的前两个特征值

j	H	h	$\lambda_{j,H}$	$\lambda_{j,h}$	$\lambda_{j,H}$	$\lambda_{j,h}$	$\lambda_{j,h}$
1	$\sqrt{2}/16$	$\sqrt{2}/128$	1494.054981139	1487.246358034	5.48	1487.246360228	2.32
1	$\sqrt{2}/16$	$\sqrt{2}/256$	1494.054981139	1486.970190147	24.68	1486.970190611	5.95
1	$\sqrt{2}/32$	$\sqrt{2}/512$	1489.686177118	-	-	1486.860555223	25.65
2	$\sqrt{2}/16$	$\sqrt{2}/128$	3696.593148137	3695.305452963	5.44	3695.305452966	2.25
2	$\sqrt{2}/16$	$\sqrt{2}/256$	3696.593148137	3695.303753261	24.79	3695.303753353	5.66
2	$\sqrt{2}/32$	$\sqrt{2}/512$	3695.427295777	-	-	3695.303503158	26.11

Table 3. The first two eigenvalues for (2.1) on the hexagon by Scheme 3.1 with P2-element
表 3. 在正六边形域上通过方案 3.1 用二次元求解(2.1)的前两个特征值

j	H	h	$\lambda_{j,H}$	$\lambda_{j,h}$	$\lambda_{j,H}$	$\lambda_{j,h}$	$\lambda_{j,h}$
1	1/16	1/128	51.211728	51.198895	3.49	51.198895	1.32
1	1/16	1/256	51.211728	51.198880	20.17	51.198880	4.91
1	1/32	1/512	51.200191	-	-	51.198878	25.01
2	1/16	1/128	329.058305	328.757888	5.44	328.757925	2.25
2	1/16	1/256	329.058305	328.757759	24.79	328.757761	5.66
2	1/32	1/512	328.780547	-	-	328.757744	26.11

6. 结论

本文给出了板振动特征值问题基于 C-R 混合方法的二网格离散化研究。根据我们的方法，分别求解了细网格 π_h 上双调和特征值问题的解以及方案 3.1 的解。我们在三个区域 Ω_S 、 Ω_L 、 Ω_{HE} 上进行了数值实验。从数值结果可以看出，与直接在细网格上求解板振动特征值问题相比，基于移位反迭代的二网格离散化方法所花费的时间更少，并且随着网格尺寸越来越小，后者的优势越来越明显，表明了我们的方法是高效的。因此，对于板振动特征值问题的求解，该方法有着较强的应用价值。

基金项目

贵州师范大学学术新苗基金(黔师新苗[2021] A01)。

参考文献

[1] Chen, H., Xie, H. and Xu, F. ((2016)) A Full Multigrid Method for Eigenvalue Problems. *Journal of Computational Physics*, **322**, 747-759. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.07.009

[2] Yang, Y. and Bi, H. (2011) Two-Grid Finite Element Discretization Scheme Based on Shifted-Inverse Power Method for Elliptic Eigen-Value Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **49**, 1602-1624. https://doi.org/10.1137/100810241

[3] Liu, J., Jiang, W., Lin, F., Liu, N. and Liu, Q. (2017) A Two-Grid Vector Discretization Scheme for the Resonant Cavity Problem with An-Isotropic Media. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **65**, 2719-2725. https://doi.org/10.1109/TMTT.2017.2672545

[4] Han, J., Zhang, Z. and Yang, Y. (2015) A New Adaptive Mixed Finite Element Method Based on Residual Type a Posterior Error Estimates for the Stokes Eigenvalue Problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **31**, 31-53. https://doi.org/10.1002/num.21891

[5] Yang, Y., Bi, H., Han, J. and Yu, Y. (2015) The Shifted-Inverse Iteration Based on the Multigrid Discretizations for Eigenvalue Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **37**, A2583-A2606. https://doi.org/10.1137/140992011

[6] Zhang, X. and Yang, Y. (2021) A Locking-Free Shifted Inverse Iteration Based on Multigrid Discretization for the Elastic Eigenvalue Problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**, 5821-5838. https://doi.org/10.1002/mma.7150

[7] Brenner, S., Monk, P. and Sun, J. (2015) C0IPG for the Biharmonic Eigenvalue Problem. In: Kirby, R., Berzins, M., Hesthaven, J., Eds., *Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations ICOSAHOM* 2014. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 106, Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-19800-2_1

[8] Falk, R.S. and Osborn, J.E. (1980) Error Estimates for Mixed Methods. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **14**, 249-277. https://doi.org/10.1051/m2an/1980140302491

[9] Grisvard, P. (1986) An Approach to the Singular Solutions of Elliptic Problems via the Theory of Differential Equations in Banach Spaces. *Lecture Notes in Mathematics*, **1223**, 131-155. https://doi.org/10.1007/BFb0099189

[10] Yang, Y. and Bi, H. (2018) The Adaptive Ciarlet-Raviart Mixed Method for Biharmonic Eigenvalue Problems with

Simply Supported Boundary Condition. *Applied Mathematics and Computation*, **339**, 206-219. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.07.014

[11] Zhang, Y. and Bi, H. (2019) The Grid Discretization of Ciarlet-Raviart Mixed Method for Biharmonic Eigenvalue Problems. *Applied Numerical Mathemtics*, **138**, 94-113. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2018.12.007

[12] Andreev, A., Lazarov, R. and Racheva, M. (2005) Postprocessing and Higher Order Convergence of the Mixed Finite Element Approximations of Biharmonic Eigenvalue Problems. *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, **182**, 333-349. https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.12.015