Open Journal of Natural Science 自然科学, 2022, 10(4), 450-457
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ojns
https://doi.org/10.12677/ojns.2022.104055

一类具有媒体报道和潜伏期的手足口病模型的分析

邓佳宁，董家兴，杜嘉鑫，王建华，李姝奇，刘璐菊

河南科技大学数学与统计学院，河南 洛阳

收稿日期：2022年6月6日；录用日期：2022年7月4日；发布日期：2022年7月11日

摘 要

本文研究了一类受媒体报道影响和潜伏期的手足口病模型，计算手足口病模型的基本再生数。利用Hurwitz判据、Laypunov函数讨论无病平衡点的稳定性，当基本再生数小于1时，无病平衡点是全局渐近稳定的；当基本再生数大于1时，无病平衡点是不稳定的。同时利用Hurwitz判据讨论了地方病平衡点的稳定性，得到地方病平衡点是局部渐近稳定的。

关键词

手足口病模型，基本再生数，Hurwitz判据，Laypunov函数，渐近稳定的

Analysis of a Kind of Hand-Foot-Mouth Disease Model with Media Coverage and Incubation Period

Jianing Deng, Jiaxing Dong, Jiaxin Du, Jianhua Wang, Shuqi Li, Luju Liu

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Science Technology, Luoyang Henan

Received: Jun. 6th, 2022; accepted: Jul. 4th, 2022; published: Jul. 11th, 2022

Abstract

A hand-foot-mouth disease model with media coverage and the incubation period has been considered in this article. The basic reproduction number of the hand-foot-mouth disease model is cal-

文章引用: 邓佳宁, 董家兴, 杜嘉鑫, 王建华, 李姝奇, 刘璐菊. 一类具有媒体报道和潜伏期的手足口病模型的分析[J]. 自然科学, 2022, 10(4): 450-457. DOI: 10.12677/ojns.2022.104055

culated. By using the Hurwitz criterion and Laypunov function, the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable when the basic reproduction number is under one. When the basic reproduction number is above one, the disease-free equilibrium is unstable. Meanwhile, the stability of the endemic equilibrium is discussed by using the Hurwitz criterion, which is locally asymptotically stable.

Keywords

Hand-Foot-Mouth Disease Mode, The Basic Reproduction Number, The Hurwitz Criterion, Laypunov Function, Asymptotically Stable

1. 引言

手足口病是一种主要由肠道病毒引起的传染病，又名发疹性水疱性口腔炎，该病的潜伏期多为2~10天，多发生于5岁以下儿童。患病早期表现特征为手、足、口腔等部位出现疱疹，患儿低烧、厌食等，多数患儿在一周左右痊愈，少数患儿随着病情加重引起心肌炎、肺水肿、无菌性脑膜炎等并发症，严重甚至会致死。手足口病四季均可发病，春夏季尤为多见，手足口病严重降低了患儿的日常生活质量，对儿童的生命安全造成了一定威胁，但目前没有较好的应对措施，故广受社会的关注。

手足口病已经有疫苗可以注射，主要是肠道类71号疫苗，有很强的安全性与保护性，主要针对的人群是6个月到4岁的儿童，6岁以上不建议进行注射。目前中国陆续有地区将手足口病疫苗的接种范围进行扩大，但是由于疫苗同时具有不确定性因素，疫苗的接种率较低，适当的媒体报道可以降低手足口病的发生率。为预防该疾病，应注意几个方面：① 手足口病可以通过儿童的毛巾、玩具、床上用品等传播，注重儿童个人的卫生对预防该疾病是很重要的，家长们应当常换洗儿童的被褥、手绢等，保证儿童在干净、整洁的环境下成长；② 该疾病的病毒也可以通过空气传播，家长应当认真照看儿童，减少他们接触患有手足口病的患者，从而防治病毒的入侵；③ 5、6岁以下的儿童基本不懂得如何照顾自己，不知道什么该吃、什么不该吃，所以家长应当保证儿童的饮食安全，切勿让儿童接触不干净的食品，而导致疾病的发生[1]。

对于手足口病传染病，国内外已经有一些关于手足口病模型的研究，但是仅有少量关于受媒体报道影响的手足口病模型的研究。文献[2]研究了一类具有潜伏期且带有出生死亡的SEIR手足口病模型，得到了手足口病的基本再生数并对模型进行了动力学分析：平衡点的存在性和稳定性。文献[3]研究了一类具有媒体报道和接种的传染病模型，得到了决定传染病流行与否的阈值：基本再生数，讨论了模型无病平衡点和地方病平衡点的存在性，利用特征方程得到了平衡点的局部稳定性。基于以上的一些原因，本文讨论一类具有媒体报道和潜伏期的手足口病模型。

2. 建立模型

在本文中，总人口由四类人构成：t时刻的易感者类$\left(S(t)\right)$，t时刻的潜伏者类$\left(E(t)\right)$，t时刻的已感染者类$\left(I(t)\right)$，t时刻的恢复者类$\left(R(t)\right)$，$N(t)$表示t时刻的所有人，则有$N(t)=S(t)+E(t)+I(t)+R(t)$，考虑的模型如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\Lambda-\beta\mathrm{e}^{-mI}\left(kE+I\right)S-dS\\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\beta\mathrm{e}^{-mI}\left(kE+I\right)S-\left(\sigma+d\right)E\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\sigma E-\left(\gamma+\mu+d\right)I\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I-\mu R\end{cases} \tag{1}$$

模型(1)的初始值条件为

$$S\left(0\right)=S_0\geq 0,\quad I\left(0\right)=I_0\geq 0,\quad E\left(0\right)=E_0\geq 0,\quad R\left(0\right)=R_0\geq 0,$$

其中：Λ 为易感染人群的常数输入率，β 为有效接触率，$\beta\left(I\right)=\beta\mathrm{e}^{-mI}$ 表示在媒体报道下的接触率，k 为一个常数，用于表示 E、I 的传染率不同，d 为人群的自然死亡率，γ 为感染者的恢复率，μ 为人群的因病死亡率，σ 为儿童从潜伏者到传染者的转化率。

由于系统(1)中的第一、二、三个方程与 R 无关，因此，系统(1)的动力学性质等价于系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\Lambda-\beta\mathrm{e}^{-mI}\left(kE+I\right)S-dS\\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\beta\mathrm{e}^{-mI}\left(kE+I\right)S-\left(\sigma+d\right)E\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\sigma E-\left(\gamma+\mu+d\right)I\end{cases} \tag{2}$$

因为微分方程组(2)的等号右端关于因变量是连续并且可微的，所以由微分方程组解的存在唯一性定理，经过初始值点 $\left(S^0,E^0,I^0\right)^{\mathrm{T}}\in\Re_+^3$ 的解是存在且唯一的，进一步由定理 5.2.1 [4]可知，经过初始值点 $\left(S^0,E^0,I^0\right)^{\mathrm{T}}\in\Re_+^3$ 的解是非负的。利用系统(1)有 $N'=\Lambda-dN-\mu\left(I+R\right)\leq\Lambda-dN$，由比较定理，即有 $\lim\limits_{t\to+\infty}N\left(t\right)\leq S_0$，其中 $S_0=\dfrac{\Lambda}{d}$，所以 $N\left(t\right)$ 是最终有界的，从而 $S\left(t\right),E\left(t\right),I\left(t\right)$ 都是有界函数，且系统(2)在区域 Φ 中是正不变的，其中

$$\Phi=\left\{\left(S,E,I\right)^{\mathrm{T}}\in\Re_+^3\mid 0\leq S\leq\frac{\Lambda}{d},S+E+I\leq\frac{\Lambda}{d}\right\}。$$

3. 基本再生数 R_0 的计算

系统(2)始终存在一个无病平衡点 $P_0=\left(\dfrac{\Lambda}{d},0,0\right)$。

利用文献[5]中再生矩阵的方法可以计算系统(2)的基本再生数 R_0，即可得 $R_0=\rho\left(FV^{-1}\right)$ 其中 $\rho\left(M\right)$ 为矩阵 M 的谱半径，所以求得基本再生数为

$$R_0=\frac{k\beta\Lambda}{d\left(\sigma+d\right)}+\frac{\sigma\beta\Lambda}{d\left(\sigma+d\right)\left(\gamma+\mu+d\right)} \tag{3}$$

4. 地方病平衡点的存在性

定理 1：如果基本再生数大于 1，微分方程组(2)有且仅有一个地方病平衡点 P^*。

证明：令系统(1)的右端项为零有

$$\begin{cases} \Lambda - \beta \mathrm{e}^{-mI}(kE+I)S - dS = 0 \\ \beta \mathrm{e}^{-mI}(kE+I)S = (\sigma+d)E \\ \sigma E = (\gamma+\mu+d)I \end{cases} \tag{4}$$

由(4)的第三式得

$$E = \frac{\gamma+\mu+d}{\sigma}, \tag{5}$$

将(5)式代入(4)的第二式有 $\beta \mathrm{e}^{-mI}\left[k(\gamma+\mu+d)+\sigma\right]S = (\sigma+d)(\gamma+\mu+d)$，即可得

$$S = \frac{(\sigma+d)(\gamma+\mu+d)}{\beta\left[k(\gamma+\mu+d)+\sigma\right]\mathrm{e}^{-mI}}, \tag{6}$$

将(5)、(6)式代入(4)的第一式得

$$\Lambda - \frac{(\sigma+d)(\gamma+\mu+d)}{\sigma}I - \frac{d(\sigma+d)(\gamma+\mu+d)}{\beta\left[k(\gamma+\mu+d)+\sigma\right]\mathrm{e}^{-mI}} = 0,$$

令 $F(I) = \Lambda - \dfrac{(\sigma+d)(\gamma+\mu+d)}{\sigma}I - \dfrac{d(\sigma+d)(\gamma+\mu+d)}{\beta\left[k(\gamma+\mu+d)+\sigma\right]\mathrm{e}^{-mI}}$，

$$F(0) = \Lambda - \frac{d(\sigma+d)(\gamma+\mu+d)}{\beta\left[k(\gamma+\mu+d)+\sigma\right]\mathrm{e}^{-mI}} = \frac{\Lambda(R_0-1)}{R_0},$$

因为 $R_0 > 1$，从而 $F(0) > 0$，

$$F'(I) = -\frac{(\sigma+d)(\gamma+\mu+d)}{\sigma} - \frac{md(\sigma+d)(\gamma+\mu+d)}{\beta\left[k(\gamma+\mu+d)+\sigma\right]}\mathrm{e}^{mI} < 0,$$

且 $\lim\limits_{I\to+\infty} F(I) = -\infty$，故由零点存在定理可知(4)式有且仅有一个正解，即地方病平衡点 P^* 是唯一存在的。

5. 平衡点的稳定性分析

定理 2：当基本再生数小于 1 时，无病平衡点是全局渐近稳定的；当基本再生数大于 1 时，无病平衡点是不稳定的。

证明：系统(2)在无病平衡点 P_0 处的线性化系统的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -d & -\beta k\dfrac{\Lambda}{d} & -\beta\dfrac{\Lambda}{d} \\ 0 & \beta k\dfrac{\Lambda}{d} - (\sigma+d) & \beta\dfrac{\Lambda}{d} \\ 0 & \sigma & -(\gamma+\mu+d) \end{pmatrix}$$

可得系数矩阵 A 的特征值为 $-d$ 及下面一元二次方程的根

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{8}$$

其中 $a_1 = (\sigma+d) + (\gamma+\mu+d) - \beta k\dfrac{\Lambda}{d}$，

$$a_2 = (\gamma+\mu+d)\left(\sigma+d-\beta k\frac{\Lambda}{d}\right) - \frac{\beta\Lambda\sigma}{d} = (\gamma+\mu+d)(\sigma+d)(1-R_0),$$

若 $R_0<1$，即 $\frac{k\beta\Lambda}{d(\sigma+d)}+\frac{\sigma\beta\Lambda}{d(\sigma+d)(\gamma+\mu+d)}<1$，故 $\frac{k\beta\Lambda}{d}+\frac{\sigma\beta\Lambda}{d(\gamma+\mu+d)}<(\sigma+d)$，

则 $(\sigma+d)-\frac{k\beta\Lambda}{d}>\frac{\sigma\beta\Lambda}{d(\gamma+\mu+d)}>0$，

则 $a_1=(\sigma+d)+(\gamma+\mu+d)-\beta k\frac{\Lambda}{d}>0$，$a_2=(\gamma+\mu+d)(\sigma+d)(1-R_0)>0$，

由 Hurwitz 判据[6]可知(8)式的根均具有负实部，从而当基本再生数 $R_0<1$ 时，无病平衡点 P_0 是局部渐近稳定的；当基本再生数 $R_0>1$ 时，有 $a_2<0$，则(8)式有正实部的根，无病平衡点 P_0 是不稳定的。

接下来利用 Laypunov 函数证明当基本再生数 $R_0<1$ 时，无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的。

定理 3：如果基本再生数 $R_0<1$ 时，系统(2)的无病平衡点是全局渐近稳定的，最终手足口病病毒将从人群中消失。

证明：当基本再生数 $R_0<1$ 时，构造如下的 Laypunov 函数

$$V=E+AI，$$

$$A=\frac{\beta\Lambda}{d(\gamma+\mu+d)}，$$

V 沿着系统(2)的解求全导数有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}&=E'+AI'\\&=\beta\mathrm{e}^{-mI}(kE+I)S-(\sigma+d)E+A\sigma E-A(\gamma+\mu+d)I\\&\le\frac{\beta k\Lambda}{d}+\frac{\beta\Lambda}{d}I-(\sigma+d)E+EA\sigma-A(\gamma+\mu+d)I\end{aligned}$$

整理得

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}\le(\sigma+d)\left[\frac{\beta k\Lambda}{d(\sigma+d)}+\frac{\sigma\beta\Lambda}{d(\sigma+d)(\gamma+\mu+d)}-1\right]E=(\sigma+d)(R_0-1)E。$$

由基本再生数 $R_0<1$，则有 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}\le0$，根据 LaSalle 不变集原理[7]，系统(2)的无病平衡点是全局渐近稳定的。

接下来用 Hurwitz 判据讨论地方病平衡点的局部稳定性。

定理 4：当 $R_0>1$ 时，地方病平衡点是局部渐近稳定的。

证明：在地方病平衡点 P^* 处有

$$\begin{cases}\Lambda=\beta\mathrm{e}^{-mI^*}(kE^*+I^*)S^*-dS^*\\\beta\mathrm{e}^{-mI^*}(kE^*+I^*)S^*=(\sigma+d)E^*\\\sigma E^*=(\gamma+\mu+d)I^*\end{cases}\tag{9}$$

系统(2)在地方病平衡点 P^* 处的 Jacobian 矩阵为：

$$B=\begin{pmatrix}-d-\beta\mathrm{e}^{-mI^*}(kE^*+I^*) & -\beta\mathrm{e}^{-mI^*}kS^* & -\beta S^*\mathrm{e}^{-mI^*}(1-mI^*)\\\beta\mathrm{e}^{-mI^*}(kE^*+I^*) & \beta\mathrm{e}^{-mI^*}kS^*-(\sigma+d) & \beta S^*\mathrm{e}^{-mI^*}(1-mI^*)\\0 & \sigma & -(\gamma+\mu+d)\end{pmatrix}$$

矩阵 B 的特征方程如下：

$$\begin{vmatrix} \lambda+d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right) & \beta e^{-mI^*}kS^* & \beta S^* e^{-mI^*}\left(1-mI^*\right) \\ -\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right) & \lambda-\beta e^{-mI^*}kS^*+(\sigma+d) & -\beta S^* e^{-mI^*}\left(1-mI^*\right) \\ 0 & -\sigma & \lambda+\left(\gamma+\mu+d\right) \end{vmatrix}=0,$$

即

$$\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0 \tag{10}$$

$$a_1=d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)-\beta kS^* e^{-mI^*}+\left(\sigma+d\right)+\left(\gamma+\mu+d\right)$$

$$\begin{aligned} a_2=&\left[d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\right]\cdot\left[\left(\sigma+d\right)-\beta kS^* e^{-mI^*}\right] \\ &+\left[d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\right]\cdot\left[\left(\gamma+\mu+d\right)+\left(\gamma+\mu+d\right)\cdot\left[\left(\sigma+d\right)-\beta kS^* e^{-mI^*}\right]\right] \\ &+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\cdot\beta kS^* e^{-mI^*}-\beta\sigma S^* e^{-mI^*}\left(1-mI^*\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3=&\left[d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\right]\cdot\left[\left(\sigma+d\right)-\beta kS^* e^{-mI^*}\right]\cdot\left(\gamma+\mu+d\right) \\ &+\beta\sigma S^* e^{-mI^*}\left(1-mI^*\right)\cdot\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)+\left(\gamma+\mu+d\right)\cdot\beta kS^* e^{-mI^*}\cdot\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right) \\ &-\beta\sigma S^* e^{-mI^*}\left(1-mI^*\right)\cdot\left[d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\right] \end{aligned}$$

由(9)式中的第二式可得 $\beta e^{-mI^*}kE^*S^*<\left(\sigma+d\right)E^*$，即

$$\beta e^{-mI^*}kS^*<\left(\sigma+d\right) \tag{11}$$

由(11)式可知

$$a_1>d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)+\left(\gamma+\mu+d\right)>0$$

$$\begin{aligned} a_3=&\left[d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\right]\cdot\left[\left(\sigma+d\right)-\beta kS^* e^{-mI^*}\right]\cdot\left(\gamma+\mu+d\right) \\ &+\beta\sigma e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\cdot\beta S^* e^{-mI^*}+\left(\gamma+\mu+d\right)\cdot\beta kS^* e^{-mI^*}\cdot\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right) \\ &+\beta\sigma S^* e^{-mI^*}\cdot mI^*\left[d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\right] \\ &-\beta\sigma S^* e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\cdot\beta\sigma S^* e^{-mI^*}\cdot mI^*-\beta\sigma S^* e^{-mI^*}\left[d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\right] \end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned} &\left[\left(\sigma+d\right)-\beta kS^* e^{-mI^*}\right]\cdot\left(\gamma+\mu+d\right) \\ &=\frac{\beta I^* S^* e^{-mI^*}}{E^*}\cdot\left(\gamma+\mu+d\right)=\frac{\beta S^* e^{-mI^*}}{E^*}\sigma E^*=\sigma\beta S^* e^{-mI^*} \end{aligned}$$

从而 $a_3=\sigma\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\cdot\beta kS^* e^{-mI^*}>0$，
因为

$$\left[\left(\sigma+d\right)-\beta kS^* e^{-mI^*}\right]\cdot\left(\gamma+\mu+d\right)=\beta\sigma S^* e^{-mI^*} \tag{12}$$

从而有

$$a_2=\left[d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\right]\cdot\left[\left(\sigma+d\right)-\beta kS^*e^{-mI^*}\right]+\left[d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\right]\cdot\left(\gamma+\mu+d\right)$$
$$+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\cdot\beta kS^*e^{-mI^*}+\beta\sigma S^*e^{-mI^*}mI^*$$

故 $a_2>0$，

$$\begin{aligned}a_1a_2-a_3=&\left[d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)-\beta kS^*e^{-mI^*}+\left(\sigma+d\right)+\left(\gamma+\mu+d\right)\right]\\&\cdot\left\{\left[d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\right]\cdot\left[\left(\sigma+d\right)-\beta kS^*e^{-mI^*}\right]+\left[d+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)^*\right]\cdot\left(\gamma+\mu+d\right)\right.\\&\left.+\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\cdot\beta kS^*e^{-mI^*}+\sigma\beta e^{-mI^*}S^*mI^*\right\}-\sigma\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\cdot\beta S^*e^{-mI^*}\\&-\left(\gamma+\mu+d\right)\cdot\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\cdot\beta kS^*e^{-mI^*}-d\beta\sigma S^*e^{-mI^*}\cdot mI^*\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\left[-\beta kS^*e^{-mI^*}+\left(\sigma+d\right)\right]\cdot\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\left(\gamma+\mu+d\right)-\sigma\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\cdot\beta S^*e^{-mI^*}\\&\overset{(12)}{=}\sigma\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\beta kS^*e^{-mI^*}-\sigma\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\cdot\beta S^*e^{-mI^*}=0\end{aligned}$$

$$\left(\gamma+\mu+d\right)\cdot\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\cdot\beta kS^*e^{-mI^*}-\left(\gamma+\mu+d\right)\cdot\beta e^{-mI^*}\left(kE^*+I^*\right)\cdot\beta kS^*e^{-mI^*}=0$$

$$d\cdot\sigma\beta e^{-mI^*}S^*mI^*-d\beta\sigma S^*e^{-mI^*}\cdot mI^*=0$$

故 $a_1a_2-a_3>0$，从而由 Hurwitz 判据可知，方程(10)的特征根均具有负实部，从而地方病平衡点 P^* 是局部渐近稳定的。

6. 总结

本文考虑传染率受媒体报道影响的手足口病模型，说明了模型的解的适定性和有界性。得到手足口病模型的基本再生数，证明地方病平衡点的存在性和唯一性。其次，通过利用 Hurwitz 判据、Laypunov 函数讨论了无病平衡点的稳定性，证明当基本再生数小于 1 时，无病平衡点是全局稳定的，即手足口病患者将在人群中消失；当基本再生数大于 1 时，无病平衡点是不稳定的，手足口病将无法控制。同时利用 Hurwitz 判据证明了地方病平衡点是局部渐近稳定的。

基金项目

河南科技大学 SRTP 基金项目(项目编号：2021127)；河南科技大学青年学术带头人科研项目(项目编号：13490002)。

参考文献

[1] 彭秋燕, 黄哲梅, 黄呈辉, 等. 手足口病发病情况分析[J]. 贵阳中医学院学报, 2013, 35(3): 19-21. https://doi.org/10.3969/j.issn.1002-1108.2013.03.0009

[2] 王晓红. 一类具有潜伏期的 SEIR 手足口病模型的研究[J]. 吕梁学院学报, 2015, 5(3): 9-11, 21. https://doi.org/10.3969/j.issn.2095-185X.2015.03.004

[3] 丰利香. 具有媒体报道和接种传染病模型的局部稳定性分析[J]. 价值工程, 2016, 35(33): 194-195.

[4] Ziv, E., Daley, C.L. and Blower, S.M. (2001) Early Therapy for Latent Tuberculosis Infection. *American Journal of Epidemiology*, **153**, 381-385. https://doi.org/10.1093/aje/153.4.381

[5] van den Driessche, P. and Watmough, J. (2002) Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for

Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, **180**, 29-48. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6

[6] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 79.

[7] 马知恩, 周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 178-192.