Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, **2014, 4, 47-51**
Published Online November 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2014.44007

The Relation of Two Kinds of Pointed Pseudo-Metrics on Fuzzy Lattice

Peng Chen[1,2]

[1]Mathematics and Statistics Institute, Henan University of Science and Technology, Luoyang
[2]College of Applied Science, Beijing University of Technology, Beijing
Email: chenpengbeijing@sina.com

Received: Mar. 15th, 2014; revised: Aug. 26th, 2014; accepted Sep. 25th, 2014

Abstract

In this paper, we negative the main result that an Erceg pseudo-metric is a pointwise pseudo-metric in [1], point out the wrong reasons in the process of its proof, and further put forward the new conclusion that a pointwise pseudo-metric is an Erceg pseudo-metric, but the converse is not true.

Keywords

Erceg Pseudo-Metric, A Pointwise Pseudo-Metric, Fuzzy Lattice

Fuzzy格上两种点式伪度量之间的关系

陈　鹏[1,2]

[1]河南科技大学，数学与统计学院，洛阳
[2]北京工业大学，应用数理学院，北京
Email: chenpengbeijing@sina.com

收稿日期：2014年3月15日；修回日期：2014年8月26日；录用日期：2014年9月25日

摘　要

本文否定了文[1]的主要结果：一个点式Erceg伪度量是一个点式伪度量,并进一步给出相反的新的结论：

一个点式伪度量是一个点式Erceg伪度量但反之不成立。

关键词

Erceg伪度量，点式伪度量，Fuzzy格

1. 引言

格上度量是格上拓扑学中最核心的问题，虽然迄今国内外已给出了几种较为重要的格上度量，并已取得了不少创造性工作[1]-[5] [6]，但对它研究还远没有结束.点式度量是由史福贵教授在 1996 年对文[6]中度量给出的比较合理协调的等价形式；Erceg 度量是基于集合间的 Hausdorff 距离而被 Erceg M.A.所引入[2]，是无点化 Fuzzy 度量理论的优秀成果。在文[1]中，梁基华教授给出了两者之间的一个主要结果，即该文定理 1：设 p 是 L 上的定式 Erceg 伪度量，则 p 是一个点式伪度量。本文否决了该文的这一主要结果，指出该文错误的证明原由，并给出新的结论。

由于 Erceg 度量的定义[2]较为复杂且直观意义不明显。鉴于此，1992 年，彭育威最先给出了 Erceg 伪度量的点式意义的简化形式定义如下：

定义 1.1 L 上的一个 Erceg 伪度量就是满足下列条件的映射 $d: M\times M \to [0,+\infty]$ 映射[3]：

(B1) $\forall a,b\in M$，如果 $a\geq b$，那么 $p(a,b)=0$;

(B2) $\forall a,b,c\in M$，$p(a,c)\leq p(a,b)+p(b,c)$;

(B3) $\forall a,b\in M$，$p(a,b)=\bigvee_{y\ll b}\bigwedge_{x\ll a} d(x,y)$;

(B4) $\forall a,b\in M, \exists x\not\leq b'$ 使得 $p(a,x)<r \Leftrightarrow \exists y\not\leq a'$ 使得 $p(b,y)<r$.

定义 1.2 L 上的一个点式伪度量是一个满足下列条件的 $d: M\times M\to [0,+\infty)$ 的映射[4]-[5]:

(N1)* $\forall a\in M$，$d(a,a)=0$;

(N2) $\forall a,b,c\in M$，$d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$;

(N3) $\forall a,b\in M$，$d(a,b)=\bigwedge_{c\ll b} d(a,c)$;

(N4) $\forall a,b\in M, \exists x\not\leq a'$ 使得 $d(x,b)<r \Leftrightarrow \exists y\not\leq b'$ 使得 $d(y,a)<r$.

注首先(N1)*可以由下列条件

(N1) $\forall a,b\in M$，如果 $a\leq b$，那么 $d(a,b)=0$;

其次在史福贵定义的点式伪度量的原始定义中，还有下列条件：

(N5)* $\forall a,b,c\in M$，若 $a\leq b$，则 $d(a,c)\leq d(b,c)$，

但这是多余的。事实上，当 $a\leq b$ 时，知 $d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)=d(b,c)$，另外，(N4)能够被下面(N4)*取代，

(N4)* $\forall a,b\in M$，$\bigwedge_{x\not\leq a'} d(x,b)=\bigwedge_{y\not\leq b'} d(y,a)$.

本文中 L 表示一个具有逆序对合对应“ ′ ”的完全分配格。$e\in L-\{0\}$ 被叫一个分子，当且仅当对 $p,q\in L^X, e\leq p\vee q$ 蕴含 $e\leq p$ 或 $e\leq q$，L^X 的全部分子集记为 M。M 是一个连续偏序集，即 M 中每个元可表示 M 中 way-below($\ll$)关于它的元的定向上确界[7]。其它未声明概念与符号请参考文[8]。

2. 反例

文[1]中，梁基华教授证明了：如果 p 是点式 Erceg 伪度量，$\forall a,b\in M$，令 $d(a,b)=p(b,a)$，那么 p 是点式伪度量，但这个结果是错误的。

我们给出下面反例，它是一个点式 Erceg 伪度量，但不是一个点式伪度量，表明梁的这个结果是不正确。

例子 2.1 设 $L=[0,1]$，则，定义函数 $d:M\times M\to[0,+\infty)$ 如下：

$$\forall a,b\in M,\ p(a,b)=\begin{cases}0, & a\ge b;\\ 1, & a<b\cdot\end{cases}$$

那么 p 是 $[0,1]$ 上点式 Erceg 伪度量。事实上，不难验证 p 满足(B1)和(B2)。下证(B3)和(B4)。

(B3) 如果 $a,b\in(0,1]$, 且 $a\ge b$，那么 $p(a,b)=0$。1) 当 $a=b$ 时，对每个 $y\ll b$,，即 $0<y<b$，存在 x 满足 $0<y<x<a$ 即 $a\ll a$，

有 $a\ge b\bigwedge\limits_{y\ll a}p(x,y)=0$，从而 $\bigvee\limits_{y\ll b}\bigwedge\limits_{x\ll a}p(x,y)=0$；即有 $p(a,b)=\bigvee\limits_{y\ll b}\bigwedge\limits_{x\ll a}p(x,y)=0;$ 1) 当 $a>b$ 时，对每个 $y\ll b$，即 $0<y<b$，存在 x 满足 $0<x<y<a$ 即 $x\ll a$ 得 $\bigwedge\limits_{x\ll a}p(x,y)=0$，从而 $\bigvee\limits_{y\ll b}\bigwedge\limits_{x\ll a}p(x,y)=0$，即有 $p(a,b)=\bigvee\limits_{y\ll b}\bigwedge\limits_{x\ll a}p(x,y)=0$；2) 当 $a<b$ 时，当 $y<b$，有分两种情况：$y<a$ 与 $y>a$。当 $y<a$ 时，存在 x 满足 $y<x<a$，得 $\bigwedge\limits_{x\ll a}p(x,y)=0$，当 $y>a$ 时，此时 $\bigwedge\limits_{x\ll a}p(x,y)=1$，从而 $\bigvee\limits_{y\ll b}\bigwedge\limits_{x\ll a}p(x,y)=1$，即 p 满足(B3)。

(B4) $\bigwedge\limits_{x>1-b}p(a,y)=1\Leftrightarrow y>1-b$ 蕴含 $y>a\Leftrightarrow 1-b\ge a\Leftrightarrow x>1-a$

蕴含 $x>b\Leftrightarrow\bigwedge\limits_{x>1-a}p(b,x)=1$ 能够获得 $\bigwedge\limits_{y>1-b}p(a,y)=\bigwedge\limits_{x>1-a}p(b,x)$，根据(N4)*知(B4)成立。

但是，让 $d(a,b)=p(b,a)$，那么 d 不是点式伪度量。事实上，$\forall a\in(0,1], d(a,a)=0$，然而 $\bigwedge\limits_{c<a}d(a,c)=1$。因此 $d(a,b)=\bigwedge\limits_{c<b}d(a,c)$。

例子 2.1 表明，从一个彭育威意义下的点式 Erceg 伪度量出发，按照在文[1]中作为定理 1 给出的结论是不能得到一个史福贵意义下的点式伪度量函数。

3. 本文的主要结果

定理 3.1 一个映射 $d:M\times M\to[0,+\infty]$ 是 L 上的点式 Erceg 伪度量当且仅当 p 满足条件(B1)，(B2)，(B4)和下面(B3)*。

(B3)*. $\forall a,b\in M, p(a,b)=\bigvee\limits_{c\ll b}p(a,c)$

证明 设 p 是点式 Erceg 伪度量，则 p 满足(B1)，(B2)和(B4)。下证 p 满足(B3)*。由于

$$\forall a,b\in M,\ \ p(a,b)=\bigvee_{x\ll a}\bigwedge_{y\ll b}p(y,x).$$

因此 $\forall x\ll a$，有 $p(b,x)=\bigvee\limits_{e\ll x}\bigwedge\limits_{y\ll b}p(y,e)$ 由此得

$$\bigvee_{x\ll a}\bigwedge_{y\ll b}p(y,x)=\bigvee_{x\ll a}\bigvee_{e\ll x}\bigwedge_{y\ll b}p(y,e)=\bigvee_{x\ll a}p(b,x),$$

从而 $p(b,a)=\bigvee\limits_{x\ll a}p(b,x)$。因此 p 满足(B3)*。

反之，设 p 满足(B1)，(B2)，(B3)*和(B4)。下证 p 满足(B3)。$\forall c,a\in M$, 如果 $p(a,c)=+\infty$，那么根据(B3)*，有 $p(b,a)=\bigvee\limits_{e\ll c}p(e,c)=+\infty$。由(B1)和(B2)，如果 $b\ll a$，那么我们有 $p(b,e)\ge p(a,c)$，得

$$\bigvee_{e\ll c}\bigwedge_{b\ll a}p(y,e)\ge\bigvee_{e\ll c}p(a,e)=+\infty.$$

因此 $p(a,c)=\bigvee\limits_{e\ll c}\bigwedge\limits_{b\ll a}p(b,e)$。如果 $r>0$ 且 $p(a,c)<r$。则有 $c<D_r(a)$。其中定义

$D_r(a)=\{e\in M,|\,p(a,e)<r\}$。(B4)等价于：$\forall a,b\in M$，$D_r(a)\not\leq a'$，这是因为 $D_r(a)\not\leq a'\Leftrightarrow \exists x\not\leq a'$ 使得 $p(b,x)<r$，所以有

$$D_r(a)\not\leq b'\Leftrightarrow D_r(b)\leq a'=\bigwedge_{x\ll a}x'\Leftrightarrow \forall x\ll a, D_r(b)\leq x'$$

$$\Leftrightarrow \forall x\ll a, D_r(x)\not\leq b'\Leftrightarrow \bigvee_{x\ll a}D_r(x)\leq b'.$$

因此 $D_r(b)=\bigvee_{a\ll b}D_r(a)$，由此 $\forall e\ll c$，存在 $b\ll a$ 使得 $e\ll D_r(b)$。于是 $p(b,e)<r$。从而有 $\bigwedge_{b\ll a}p(b,e)<r$。由 $e\ll c$ 的任意性有 $\bigvee_{e\ll c}\bigwedge_{b\ll a}p(b,e)\leq r$。也就是如果 $p(a,c)<r$ 就有 $\bigvee_{e\ll c}\bigwedge_{b\ll a}p(b,e)\leq r$，因此

$$p(a,c)\geq \bigvee_{e\ll c}\bigwedge_{b\ll a}p(b,e).$$

其次，$\forall b\ll a$，由(B1)和(B2)得 $p(b,e)\geq p(a,e)$。于是 $\bigwedge_{b\ll a}p(b,e)\geq p(a,e)$，因 p 满足(B3)，所以

$$\bigvee_{e\ll c}\bigwedge_{b\ll a}p(b,e)\geq \bigvee_{e\ll c}p(a,e)=p(a,c).$$

因此 p 是点式 Erceg 伪度量。证毕。

定理 3.2 如果映射 d 是 L 上的点式伪度量，则 $\forall a,b\in M$，有 $d(a,b)=\bigvee_{\tilde{a}\ll a}d(\tilde{a},b)$.

证明 d 满足(N1)和(N2)，$\forall a,\tilde{a},b\in M$，如果 $a\geq\tilde{a}$，那么 $d(\tilde{a},b)\leq d(a,b)$。因为 $\tilde{a}\ll a$ 蕴含 $a\geq\tilde{a}$，所以 $\bigvee_{\tilde{a}\ll a}d(\tilde{a},b)\leq d(a,b)$。假设 $\bigvee_{\tilde{a}\ll a}d(\tilde{a},b)\neq d(a,b)$，那么 $\exists s,r>0$ 使得

$$\bigvee_{\tilde{a}\ll a}d(\tilde{a},b)<r<s\leq d(a,b).$$

根据(N2)有 $d(a,b)\leq d(a,\tilde{a})+d(\tilde{a},b)$ 且 $d(\tilde{a},b)<r$。从而

$$s<d(a,b)\leq d(a,\tilde{a})+r.$$

所以有 $d(a,\tilde{a})>s-r$ 由 $\tilde{a}\ll a$ 且 $\tilde{a}$ 的任意性，得 $\bigwedge_{\tilde{a}\ll a}d(\tilde{a},b)\geq s-r$ 这和 $\bigwedge_{x\ll a}d(a,x)=0$ 矛盾。所以 $d(a,b)=\bigvee_{\tilde{a}\ll a}d(\tilde{a},b)$。定理被证。

但从定理 3.2 可知，从一个点式伪度量出发，却可以容易地得到一个点式 Erceg 伪度量。从而，文[1]中作为定理 2 的结论显然。

Erceg 度量与 Shi 度量由于不同的连续性公理(B3)与(N3)是导致两种度量局部性质呈现出本质的差异，由于不同的连续性公理是导致 Erceg 度量所诱导的拓扑只能用邻域刻画，但后者的诱导拓扑用远域和邻域都能刻画。

下面例子表明 Erceg 伪度量诱导的拓扑一般不是 $Q-C_1$ 的。

例 3.3 设 ω_1 表示第一个不可数序数，$[0,\omega_1]$ 表示从 0 到 ω_1 的所有序数之集。令

$$L=[-\omega_1,0]\cup[0,\omega_1],$$

那么 L^X 是一个具有逆序对合对应的完全分配格。再令 $X=\{x\}$ 是一个单点集合。

对每个实数 $r>0$ 和 $A\in L^X$ (L^X 与 L 同构)，规定 $D_r(A)=A$，即 $D_r:L^X\to L^X$ 是一个恒同映射，那么 $\{D_r|r>0\}$ 是一个 Erceg 伪度量的相关邻域映射族且此 Erceg 伪度量的拓扑是 $T=L^X$。取 L-fuzzy 点 ω_1，那么 $\{C_\alpha|\alpha\in[-\omega_1,\omega_1)\}$ 是 x_{ω_1} 的远域族，这里 C_α 表示取值 α 的常值 L-fuzzy 集。显然 $\{C_\alpha|\alpha\in[-\omega_1,\omega_1)\}$ 没有可数子集构成 x_{ω_1} 的闭远域基。因此 Erceg 伪度量诱导的拓扑不是 $Q-C_1$ 的。

Erceg 度量里不能直接反映格上“点式拓扑的特点”，即不能直接反映点和它的重域关系，但 Shi 度量却可以。

基金项目

河南科技大学博士启动项目(09001613)河南科技大学科研创新能力培育基金项目(13000810)。

参考文献 (References)

[1] 梁基华 (2001) 关于 Fuzzy 格上点式伪度量的一个注记. *四川大学学报*, **38**, 455-498.

[2] Erceg, M.A. (1979) Metric spaces in fuzzy set theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **69**, 205-230.

[3] Peng, Y.W. (1993) Simplification of Erceg's fuzzy metric function and its application. *Fuzzy Sets and Systems*, **54**, 181-189.

[4] Shi, F.G. (1996) Pointwise quasi-uniformities and p.q. metrics on completely distributive lattices. *Acta Mathematics Sinica*, **5**, 701-706.

[5] Shi, F.G. (2001) Pointwise pseudo-metrics in L-fuzzy set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, **121**, 200-216.

[6] 杨乐成 (1988) 完全分配格上的 p.q.度量理论. *科学通报*, **4**, 247-250.

[7] Gierz, G., et al. (1980) A compendium of continuous lattices. Springer-Verlag, New York.

[8] Wang, G.J. (1988) Theory of L-fuzzy Topological Space. Shanxi Normal University Publishers, Xian.