Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2019, 9(2), 123-130
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2019.92014

Hans汉斯

Discussion on the Construction of Null-Norms on Bounded Lattices

Yanliang Gao, Kunlong Zhang

School of Science, Minzu University of China, Beijing
Email: 18811592919@163.com, zhangkunl@126.com

Received: Apr. 9th, 2019; accepted: Apr. 23rd, 2019; published: Apr. 30th, 2019

Abstract

Based on the concept of null-norm on bounded lattices, this paper gives a theorem that indicates there are only three construction methods of null-norm on bounded lattices, and gives a proposition that points out a relationship of the three null-norms with fixed zero element *a*.

Keywords

Lattice, Null-Norm, Zero Element

有界格上的Null－范数构造方法的讨论

高燕良，张昆龙

中央民族大学理学院，北京
Email: 18811592919@163.com, zhangkunl@126.com

收稿日期：2019年4月9日；录用日期：2019年4月23日；发布日期：2019年4月30日

摘　要

本文引入格上Null－范数的概念，从Null－范数的不同区间的取值入手进行讨论，证明了有界格上的Null－范数的构造方法有且仅有三种，并给出了三种Null－范数的大小关系。

关键词

格，Null－范数，零元

文章引用: 高燕良, 张昆龙. 有界格上的 Null–范数构造方法的讨论[J]. 运筹与模糊学, 2019, 9(2): 123-130.
DOI: 10.12677/orf.2019.92014

1. 引言

近年来，有界格上 Null－范数的研究是个热点问题，Null－范数在许多不同的领域中都是一个很重要的工具，例如，计算机科学技术中的专家系统，神经网络，模糊逻辑学，此外，Null－范数也常常用于模糊逻辑中的聚合算子。文章中，我们将讨论有界格上 Null－范数的构造方法。F. Karacal, M.A. Ince, R. Mesiar 在文[1]中给出了三种有界格上的 Null－范数的构造方法，Umit Ertugrul 在文[2]中给出了两种有界格上 Null－范数的构造方法，那么在一般有界格上 Null－范数的构造方法究竟有多少种，前人并没有给出明确的结论。我们从 Null－范数在不同区间上可能的取值入手，分别讨论每个区间的具体取值，得出有界格上 Null－范数的构造方法有且仅有三种，并对这三种零范数的序关系作了比较。

2. 预备知识

首先，我们给出与本论文相关的一些概念。

定义 1 ([3])：在一个偏序集 $(L,\leq)$ 中，如果任意二元 $x,y\in L$ 都有上确界 $x\vee y$ 和下确界 $x\wedge y$，则称偏序集 $(L,\leq)$ (或简称 L)为一个格。

这时，$x\vee y$ 和 $x\wedge y$ 分别叫做 x 与 y 的并与交。

定义 2 ([4])：有界格是一个有最小元 0 与最大元 1 的格 $(L,\leq)$，即存在两个元素 $0,1\in L$ 使得对所有的 $x\in L$，$0\leq x\leq 1$。

定义 3 ([4])：给定一个有界格 $(L,\leq,0,1)$，如果 a 和 b 是不可比的，我们用符号 $a\parallel b$，这里 $a,b\in L$。

令 $(L,\leq,0,1)$ 是一个有界格，$a\in L$，那么与 a 不可比的元素的集合我们记作 $I_a=\{x\in L\mid x\parallel a\}$。

定义 4 ([5])：令 $(L,\leq,0,1)$ 是一个有界格，二元运算 $T:L^2\to L$ 称为三角范数，若对任意的 $x,y,z\in L$，$T(x,y)$ 满足以下四个条件：

1) $T(x,y)=T(y,x)$ (交换性)；
2) $T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$ (结合性)；
3) 当 $y\leq z$ 时，有 $T(x,y)\leq T(x,z)$ (单调递增性)；
4) $T(x,1)=1$。

定义 5 ([5])：$(L,\leq,0,1)$ 是一个有界格，二元运算 $S:L^2\to L$ 称为三角对偶范数，若对任意的 $x,y,z\in L$，$S(x,y)$ 满足以下四个条件：

1) $S(x,y)=S(y,x)$ (交换性)；
2) $S(S(x,y),z)=S(x,S(y,z))$ (结合性)；
3) 当 $y\leq z$ 时，有 $S(x,y)\leq S(x,z)$ (单调递增性)；
4) $S(x,0)=x$。

定义 6 ([1])：$(L,\leq,0,1)$ 是一个有界格，二元运算 $V:L^2\to L$ 称为 Null－范数，若对任意的 $x,y,z\in L$，$V(x,y)$ 满足以下四个条件：

1) $V(x,y)=V(y,x)$ (交换性)；
2) $V(V(x,y),z)=V(x,V(y,z))$ (结合性)；
3) 当 $y\leq z$ 时，有 $V(x,y)\leq V(x,z)$ (单调递增性)；

4) 存在 $a\in[0,1]$，对任意的 $x\in[0,a]$，使得 $V(x,0)=x$；对任意的 $x\in[a,1]$，使得 $V(x,1)=x$。

我们可以得到，对所有的 $x\in L$，$V(x,a)=a$，因此我们说 $a\in L$ 是 V 的零元。

考虑 L 上的所有的 Null－范数的集合 ν：对 $V_1,V_2\in\nu$，$(x,y)\in L^2$，$V_1\le V_2\Leftrightarrow V_1(x,y)\le V_2(x,y)$。

我们用 D_α 表示集合：$D_\alpha=(a,1]\times[0,a)\cup[0,a)\times(a,1]$。

例 1：$(L,\le,0,1)$ 是一个有界格，有界格 L 上最小的三角范数 T_W，最大的三角范数 $T_\wedge$ 分别定义如下：

$$T_W(x,y)=\begin{cases} y & x=1 \\ x & y=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$T_\wedge(x,y)=x\wedge y。$$

有界格 L 上最小的三角对偶范数 $S_\vee$，最大的三角对偶范数 S_W 分别定义如下：

$$S_\vee(x,y)=x\vee y，$$

$$S_W(x,y)=\begin{cases} y & x=0 \\ x & y=0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}。$$

2015 年，F. Karacal, M.A. Ince, R. Mesiar 在文献[1]中提出了三种 Null－范数的构造方法，具体如下：

$$V_a^{(S)}(x,y)=\begin{cases} S(x,y) & (x,y)\in[0,a]^2 \\ a & (x,y)\in[a,1)^2\cup[a,1]\times I_a\cup I_a\times[a,1]\cup D_\alpha \\ S(x\wedge a,y\wedge a) & (x,y)\in[0,a]\times I_a\cup I_a\times[0,a]\cup I_a\times I_a \\ x\wedge y & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$V_a^{(T)}(x,y)=\begin{cases} T(x,y) & (x,y)\in[a,1]^2 \\ a & (x,y)\in[0,a)^2\cup[0,a]\times I_a\cup I_a\times[0,a]\cup D_\alpha \\ T(x\vee a,y\vee a) & (x,y)\in[a,1]\times I_a\cup I_a\times[a,1]\cup I_a\times I_a \\ x\vee y & \text{otherwise} \end{cases}。$$

$$V_a^{(T,S)}(x,y)=\begin{cases} S(x,y) & (x,y)\in[0,a]^2 \\ T(x,y) & (x,y)\in[a,1]^2 \\ a & \text{otherwise} \end{cases}$$

2018 年，Umit Ertugrul 在文献[2]中给出了两种 Null－范数的构造方法：

$$V_T^S(x,y)=\begin{cases} S(x,y) & (x,y)\in[0,a]^2 \\ T(x,y) & (x,y)\in[a,1]^2 \\ S(x\wedge a,y\wedge a) & (x,y)\in[0,a]\times I_a\cup I_a\times[0,a]\cup I_a\times I_a \\ a & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$V_S^T(x,y)=\begin{cases} S(x,y) & (x,y)\in[0,a]^2 \\ T(x,y) & (x,y)\in[a,1]^2 \\ T(x\vee a,y\vee a) & (x,y)\in[a,1]\times I_a\cup I_a\times[a,1]\cup I_a\times I_a \\ a & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $T(x,y)$ 是定义在 $[a,1]$ 上的三角范数， $S(x,y)$ 是定义在 $[0,a]$ 上的三角对偶范数。

3. 主要结果

我们从 Null－范数在不同区间上可能的取值入手，分别讨论每个区间的具体取值，得出了下面的定理。

定理：令 $(L,\le,0,1)$ 是一个有界格，$a\in L\setminus\{0,1\}$，$S(x,y)$ 是 $[0,a]$ 上的三角对偶范数，$T(x,y)$ 是 $[a,1]$ 上的三角范数。那么在有界格 L 上有零元 a 的 Null－范数 $V(x,y)$ 有且仅有三种。

证明：首先我们来讨论一下在一般的有界格上 Null－范数在不同区间上的取值，根据 Null－范数的定义我们把有界格上的元素与零元 a 的关系划分为 9 个区域如图 1：

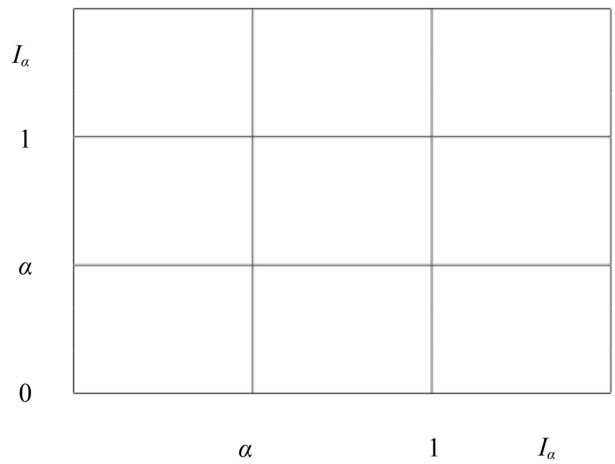

Figure 1. Interval division graph
图 1. 区间划分图

这里讨论的是一般有界格，在格区间上 Null－范数可能出现的取值可能是下面情况中的某一种：

1) $T(x,y)$ 或者 $S(x,y)$。

2) $T(x\vee a,y\vee a)$ 或者 $S(x\wedge a,y\wedge a)$。

3) 0，1，a，x 或 y。

4) 常数值 $c\in L$。

下面来做简单分析，分情况讨论 9 个区域的具体取值，由定义可得：

$(x,y)\in[0,a]^2$，$V(x,y)=S(x,y)$；$(x,y)\in[a,1]^2$，$V(x,y)=T(x,y)$；

当 $(x,y)\in[0,a)\times(a,1]\cup(a,1]\times[0,a)$ 时：

当 $0\le x<a, a<y\le1$ 时，$a=V(x,a)\le V(x,y)\le V(a,y)=a$，因此，$V(x,y)=a$；

当 $0\le x<a, a<x\le1$ 时，$a=V(a,y)\le V(x,y)\le V(x,a)=a$，因此，$V(x,y)=a$。

当 $(x,y)\in[0,a]\times I_a$，$x=V(x,0)\le V(x,y)\le V(a,y)=a$，所以区间 $(x,y)\in[0,a]\times I_a$ 上可能的取值为 $x,a,S(x\wedge a,y\wedge a)$；

当 $(x,y)\in[a,1]\times I_a$，$a=V(a,y)\le V(x,y)\le V(x,1)=x$，所以区间 $(x,y)\in[0,a]\times I_a$ 上可能的取值为 $x,a,T(x\vee a,y\vee a)$；

当 $(x,y)\in I_a\times I_a$ 时，可能的取值为：$0,1,a,c,S(x\wedge a,y\wedge a),T(x\vee a,y\vee a)$。

1) 当 $(x,y)\in[0,a]\times I_a$，$V(x,y)=x$ 时，

若 $x\in[0,a],y\in[0,a],z\in I_a,y\le z$ 时，

$V(x,y)=S(x,y)$，$V(x,z)=x$，不满足单调性。

2) 当 $(x,y)\in[0,a]\times I_a$， $V(x,y)=a$ 时，

2.1) 当 $(x,y)\in[a,1]\times I_a$， $V(x,y)=a$ 时，

2.1.1) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=0$ 时，

若 $x\in I_a, y\in[0,a], z\in I_a, y\le z$ 时，

$V(x,y)=a, V(x,z)=0$，不满足单调性。

2.1.2) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=1$ 时，

若 $x\in I_a, y\in I_a, z\in[a,1], y\le z$ 时，

$V(x,y)=1, V(x,z)=a$，不满足单调性。

2.1.3) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=a$ 时，

此时我们得到了一个 Null－范数的构造：

$$V_a^{(T,S)}(x,y)=\begin{cases} S(x,y) & (x,y)\in[0,a]^2 \\ T(x,y) & (x,y)\in[a,1]^2 \\ a & \text{otherwise} \end{cases}$$

2.1.4) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=c$ 时，

若 $c<a, x\in I_a, y\in[0,a], z\in I_a$，

$V(x,y)=a, V(x,z)=c$，不满足单调性；

若 $c>a, x\in I_a, y\in I_a, z\in[a,1]$，

$V(x,y)=c, V(x,z)=a$，不满足单调性。

2.1.5) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=S(x\wedge a, y\wedge a)$ 时，

若 $x\in I_a, y\in[0,a], z\in I_a$，

$V(x,y)=a, V(x,z)=S(x\wedge a, y\wedge a)$，不满足单调性。

2.1.6) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=T(x\vee a, y\vee a)$ 时，

若 $x\in I_a, y\in I_a, z\in[a,1]$，

$V(x,y)=T(x\vee a, y\vee a), V(x,z)=a$ 不满足单调性。

2.2) 当 $(x,y)\in[a,1]\times I_a$， $V(x,y)=T(x\vee a, y\vee a)$ 时，

2.2.1) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=0$ 时，

若 $x\in I_a, y\in[0,a], z\in I_a, y\le z$ 时，

$V(x,y)=a, V(x,z)=0$，不满足单调性。

2.2.2) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=1$ 时，

若 $x\in I_a, y\in I_a, z\in[a,1], y\le z$ 时，

$V(x,y)=1, V(x,z)=T(x\vee a, z)$，不满足单调性。

2.2.3) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=a$ 时，

若 $x\in I_a, y\in I_a, z\in[a,1], y\le z$ 时，

$V(V(x,y),z)=V(a,z)=a$，

$V(x,V(y,z))=V(x,T(y\vee a,z))=T(x\vee a,T(y\vee a,z))$，不满足结合律。

2.2.4) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=c$ 时，

若 $c<a, x\in I_a, y\in[0,a], z\in I_a$，

$V(x,y)=a, V(x,z)=c$，不满足单调性；

若 $c>a, x\in I_a, y\in I_a, z\in[a,1]$，

$V(x,y)=c, V(x,z)=T(x\vee a, y\vee a)$，不满足单调性。

2.2.5) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$，$V(x,y)=S(x\wedge a, y\wedge a)$ 时，

若 $x\in[0,a], y\in I_a, z\in I_a$，$V(V(x,y),z)=V(a,z)=a$，

$V(x,V(y,z))=V(x,S(y\wedge a,z\wedge a))=S(x,S(y\wedge a,z\wedge a))$，不满足结合律。

2.2.6) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$，$V(x,y)=T(x\vee a, y\vee a)$ 时，

此时我们得到了一种 Null－范数的构造方法，它的表达式为：

$$V_S^T(x,y)=\begin{cases} S(x,y) & (x,y)\in[0,a]^2 \\ T(x,y) & (x,y)\in[a,1]^2 \\ T(x\vee a, y\vee a) & (x,y)\in[a,1]\times I_a\cup I_a\times[a,1]\cup I_a\times I_a \\ a & \text{otherwise} \end{cases}$$

2.3) 当 $(x,y)\in[a,1]\times I_a$，$V(x,y)=x$ 时，

若 $x\in[a,1], y\in I_a, z\in[a,1]$，

$V(x,y)=a, V(x,z)=T(x,z)$，不满足单调性。

3) 当 $(x,y)\in[0,a]\times I_a$，$V(x,y)=S(x\wedge a, y\wedge a)$ 时，

3.1) 当 $(x,y)\in[a,1]\times I_a$，$V(x,y)=a$ 时，

3.1.1) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$，$V(x,y)=0$ 时，

若 $x\in I_a, y\in[0,a], z\in I_a, y\le z$ 时，

$V(x,y)=S(x\wedge a, y\wedge a), V(x,z)=0$，不满足单调性。

3.1.2) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$，$V(x,y)=1$ 时，

若 $x\in I_a, y\in I_a, z\in[a,1], y\le z$ 时，

$V(x,y)=1, V(x,z)=a$，不满足单调性。

3.1.3) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$，$V(x,y)=a$ 时，

若 $x\in[0,a], y\in I_a, z\in I_a$ 时，

$V(V(x,y),z)=V(S(x\wedge a,y\wedge a),z)=S(S(x\wedge a,y\wedge a),z\wedge a)$，

$V(x,V(y,z))=V(x,a)=a$，不满足结合律。

3.1.4) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$，$V(x,y)=c$ 时，

若 $c<a, x\in[0,a], y\in I_a, z\in I_a$，

$V(V(x,y),z)=V(S(x\wedge a,y\wedge a),z)=S(S(x\wedge a,y\wedge a),z\wedge a)$，

$V(x,V(y,z))=V(x,c)=S(x,c)$，不满足结合律。

若 $c>a, x\in[0,a], y\in I_a, z\in I_a$，

$V(V(x,y),z)=V(S(x\wedge a,y\wedge a),z)=S(S(x\wedge a,y\wedge a),z\wedge a)$，

$V(x,V(y,z))=V(x,c)=a$，不满足结合律。

3.1.5) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$，$V(x,y)=S(x\wedge a, y\wedge a)$ 时，

此时我们得到了一种 Null－范数的构造方法，它的表达式为：

$$V_T^S(x,y)=\begin{cases} S(x,y) & (x,y)\in[0,a]^2 \\ T(x,y) & (x,y)\in[a,1]^2 \\ S(x\wedge a, y\wedge a) & (x,y)\in[0,a]\times I_a\cup I_a\times[0,a]\cup I_a\times I_a \\ a & \text{otherwise} \end{cases}$$

3.1.6) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=T(x\vee a,y\vee a)$ 时

若 $x\in[0,a],y\in I_a,z\in I_a$，

$V(V(x,y),z)=V(S(x\wedge a,y\wedge a),z)=S(S(x\wedge a,y\wedge a),z\wedge a)$，

$V(x,V(y,z))=V(x,T(y\vee a,z\vee a))=a$，不满足结合律。

3.2) 当 $(x,y)\in[a,1]\times I_a$， $V(x,y)=T(x\vee a,y\vee a)$ 时，

3.2.1) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=0$ 时，

若 $x\in I_a,y\in[0,a],z\in I_a,y\le z$ 时，

$V(x,y)=S(x\wedge a,y)$， $V(x,z)=0$，不满足单调性。

3.2.2) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=1$ 时，

若 $x\in I_a,y\in I_a,z\in[a,1],y\le z$ 时，

$V(x,y)=1,V(x,z)=T(x\vee a,z)$，不满足单调性。

3.2.3) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=a$ 时，

若 $x\in[0,a],y\in I_a,z\in I_a,y\le z$ 时，

$V(V(x,y),z)=V(S(x,y\wedge a),z)=S(S(x,y\wedge a),z\wedge a)$，

$V(x,V(y,z))=V(x,a)=a$，不满足结合律。

3.2.4) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=c$ 时，

若 $c<a,x\in[0,a],y\in I_a,z\in I_a$，

$V(V(x,y),z)=V(S(x,y\wedge a),z)=S(S(x,y\wedge a),z\wedge a)$，

$V(x,V(y,z))=V(x,c)=S(x,c)$，不满足结合律。

若 $c>a,x\in[0,a],y\in I_a,z\in I_a$，

$V(V(x,y),z)=V(S(x,y\wedge a),z)=S(S(x,y\wedge a),z\wedge a)$，

$V(x,V(y,z))=V(x,c)=a$，不满足结合律。

3.2.5) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=S(x\wedge a,y\wedge a)$ 时，

若 $x\in[a,1],y\in I_a,z\in I_a$，

$V(V(x,y),z)=V(T(x,y\vee a),z)=T(T(x,y\vee a),z\vee a)$，

$V(x,V(y,z))=V(x,S(y\wedge a,z\wedge a))=a$，不满足结合律。

3.2.6) 当 $(x,y)\in I_a\times I_a$， $V(x,y)=T(x\vee a,y\vee a)$ 时，

若 $x\in[0,a],y\in I_a,z\in I_a$，

$V(V(x,y),z)=V(S(x,y\wedge a),z)=S(S(x,y\wedge a),z\wedge a)$，

$V(x,V(y,z))=V(x,T(y\vee a,z\vee a))=a$，不满足结合律。

因此，综上所述，有界格上的 Null－范数只有三种。

证毕。

通过对定理的证明我们发现当 V_T^S 中 $T=T_W$ 时，$V_T^S=V_a^{(S)}$；当 V_S^T 中 $S=S_W$ 时，$V_S^T=V_a^{(T)}$。也就是说，$V_a^{(S)}$ 和 $V_a^{(T)}$ 是 V_T^S 和 V_S^T 的特殊情况，因此我们只需要对三种 Null－范数进行比较。

命题：令 $(L,\le,0,1)$ 是一个有界格， $a\in L\setminus\{0,1\}$， $S(x,y)$ 是 $[0,a]$ 上的三角对偶范数， $T(x,y)$ 是 $[a,1]$ 上的三角范数。那么 $V_T^S\le V_a^{(T,S)}\le V_S^T$。

显然成立。

4. 小结

从 Null－范数的定义出发，在前人给出的五种有界格上 Null－范数的构造方法的基础上，讨论了有

界格上不同区间上的 Null－范数的取值情况，证明了有界格上 Null－范数的构造方法有且仅有三种，我们发现当 V_T^S 中 $T=T_W$ 时，$V_T^S=V_a^{(S)}$；当 V_S^T 中 $S=S_W$ 时，$V_S^T=V_a^{(T)}$。并给出了三种 Null－范数之间的大小关系。

基金项目

中央民族大学硕士研究生自主科研项目资助(项目编号：182011)。

参考文献

[1] Karacal, F., Ince, M.A. and Mesiar, R. (2015) Nullnorms on Bounded Lattices. *Information Sciences*, **325**, 227-236. https://doi.org/10.1016/j.ins.2015.06.052

[2] Ertugrul, U. (2018) Construction of Nullnorms on Bounded Lattices and an Equivalence Relation on Nullnorm. *Fuzzy Sets and Systems*, **334**, 94-109. https://doi.org/10.1016/j.fss.2017.07.020

[3] 陈杰. 格论初步[M]. 呼和浩特: 内蒙古大学出版社, 1988.

[4] Mesiar, R. and Pap, E. (1998) Different Interpretations of Triangular Norms and Related Operations. *Fuzzy Sets and Systems*, **96**, 183-189. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(96)00290-4

[5] Klement, E.P., Mesiar, R. and Pap, E. (2000) Triangular Norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9540-7