Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2019, 9(4), 279-284
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2019.94032

Online Scheduling Problem for Jobs Arriving over Time on Related Machines

Lina Ma[1,2], **Rongheng Li**[1*]

[1]Key Laboratory of High Performance Computing and Stochastic Information Processing, College of Mathematics and Statistics, Hunan Normal University, Changsha Hunan
[2]The First Middle School of Yuanling County, Huaihua Hunan
Email: *lirongheng@hunnu.edu.cn

Received: Oct. 15th, 2019; accepted: Oct. 29th, 2019; published: Nov. 5th, 2019

Abstract

Online scheduling problem for jobs arriving over time is as follow. We are given m related machines $M_1, M_2, \cdots, M_m$ with the processing speed of $s_1, s_2, \cdots, s_{m-1}, s_m$, respectively and a job list $L = \{J_1, J_2, \cdots, J_n\}$ arriving over time. The objective function is to minimize the maximum completion time of all machines. In this paper, LS algorithm is considered for online scheduling problem for jobs arriving over time under the assumption $s_1 = s_2 = \cdots = s_{m-1} = 1$, $s_m > 1$. The worst performance ratio of the LS algorithm is given and proved.

Keywords

Scheduling Problem, Related Machine, LS Algorithm, Worst Performance Ratio

同类机上工件实时到达在线排序问题

马丽娜[1,2]，**李荣珩**[1*]

[1]计算与随机数学教育部重点实验室 湖南师范大学数学与统计学院，湖南 长沙
[2]沅陵县第一中学，湖南 怀化
Email: *lirongheng@hunnu.edu.cn

收稿日期：2019年10月15日；录用日期：2019年10月29日；发布日期：2019年11月5日

摘 要

同类机上工件实时到达的在线排序问题是给定m台分别具有加工速度$s_1, s_2, \cdots, s_m$的同类机器

*通讯作者。

文章引用: 马丽娜, 李荣珩. 同类机上工件实时到达在线排序问题[J]. 运筹与模糊学, 2019, 9(4): 279-284.
DOI: 10.12677/orf.2019.94032

$M_1,M_2,\cdots,M_m$ 及实时到达的工件序列 $L=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$，目标函数是最小化机器的最大完工时间，本文研究了 $s_1=s_2=\cdots=s_{m-1}=1$，$s_m>1$ 时同类机上工件实时到达的在线排序问题的LS算法，给出并证明了LS算法的最坏性能比。

关键词

排序问题，相关平行机，LS算法，最坏性能比

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

同类机排序问题是将 n 个独立工件 $J_1,J_2,\cdots,J_n$ 分配到 m 台具有相同功能的机器 $M_1,M_2,\cdots,M_m$ 上加工，每台机器 M_i 的加工速度为 $s_i\,(i=1,2,\cdots,m)$，不妨假设 $s_1\le s_2\le\cdots\le s_m$，每个工件只需在其中一台机器上加工一次就能完工，每台机器每次只能加工一个工件。工件 $J_1,J_2,\cdots,J_n$ 之间没有先后的依存关系，且 $J_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 的大小为 p_j，工件 J_j 安排在机器 M_i 上加工时所需的时间为 $\frac{p_j}{s_i}$，目标函数是使所有工件在最早时间内完成加工，也就是使得所有机器中最大完工时间达到最小。该问题由 Gonzalez [1]等人首先提出。当 $s_1=s_2=\cdots=s_m=1$ 时称为相同平行机排序问题，相同平行机排序问题首先由 Graham [2]提出。根据排序者对工件信息的了解程度，排序问题分为离线和在线两种情形，离线情形是指在安排工件前，所有工件信息都已知道，包括工件大小及到达时间等，在线情形是指工件是逐个释放的，只有在当前出现了的工件被安排后下一个工件的信息才能释放。Granham [2]首先研究了相同平行机在线排序问题，给出了 LS 算法并证明了 LS 算法具有最坏性能比 $2-\frac{1}{m}$。LS 是指总是安排当前工件在能使这个工件最早完工的机器上。Cho 和 Sahni [3]首先研究了同类机在线排序问题，得到了 $m=2$ 时 LS 算法的最坏性能比为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$m\ge3$ 时最坏性能比为 $1+\frac{\sqrt{2m-2}}{2}$，当 $s_1=s_2=\cdots=s_{m-1}=1$，$s_m>1$，$m\ge3$ 时最坏性能比为 $3-\frac{4}{m+1}$。Berman 等[4]得到最坏性能比为 $3+\sqrt{8}\approx5.828$，并证明了问题的下界为≈4.311。此外，关于机器数 m 取较小的值时，也有一些结果。例如：当 $m=2$ 时，Epstein 等[5]证明了 LS 是最好的在线算法，其最坏性能比为 $\min\left\{\frac{2s+1}{s+1},\frac{s+1}{s}\right\}$，这里的 s 为加工速度较快的机器与加工速度较慢的机器两者的加工速度的比值。当 $m=3$ 时，蔡[6]证明了当 $s_1=s_2=s\ge1$，$s_3=1$ 这一特殊情形下 LS 算法的最坏性能比。Cai 和 Yang [7]也研究了当 $m=3$ 时的情形，证明了部分情形下 LS 算法是最好的在线算法。

经典排序问题假设机器开始加工时所有工件都已到达，但实际情况中工件不一定都已到达，所以提出了工件有到达时间的排序问题。有到达时间的在线问题又分为实时到达在线问题和订单到达在线问题。设工件序列 $L=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$ 中 $J_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 的到达时间为 r_j，如果 $r_j\,(1,2,\cdots,n)$ 为任意实数序列，则称其为订单在线排序问题或工件有任意到达时间排序问题[8]，当 $r_1\le r_2\le\cdots\le r_n$ 时我们称其为工件实时到达在线排序问题。易知工件实时到达在线排序问题是订单在线排序问题的特例。文献[8]中只讨论相同平行机的订单在线排序问题，即 $s_i=1\,(i=1,2,\cdots,n)$ 的情形。本文是首次讨论同类平行机的实时到达在线排序问题。

2. 符号及 LS 算法

我们后面所要引入的符号的的意义如下：

1) U_i 表示在 LS 算法下机器 $M_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$ 上面的空闲时间总和。

2) r_j 和 p_j 分别表示工件 J_j 的到达时间和工件大小。

3) $C_{\max}^{\mathrm{OPT}}\left(L\right)$ 表示在 OPT 算法下机器的最大完工时间。

4) $C_{\max}^{\mathrm{LS}}\left(L\right)$ 表示在 LS 算法下机器的最大完工时间。

5) H_i 表示在 LS 算法下安排最后一个工件 J_n 之前机器 $M_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$ 的完工时间。

6) F_i 表示在 LS 算法下安排完所有的工件后机器 $M_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$ 的最后完工时间。

定义 1： 算法 A 是一个近似算法，$C_{\max}^{A}\left(L\right)$ 和 $C_{\max}^{\mathrm{OPT}}\left(L\right)$ 分别表示在算法 A 和最优算法下该工件序列的最大完工时间。我们定义

$$R\left(m,A\right)=\sup_{L}\frac{C_{\max}^{A}\left(L\right)}{C_{\max}^{\mathrm{OPT}}\left(L\right)}$$

为算法 A 的最坏性能比，其中 $L=\left\{J_1,J_2,\cdots,J_n\right\}$ 为任一符合条件的工件序列。

本文后面我们总是假设 m 台具有相同功能的机器 $M_1,M_2,\cdots,M_m$ 的加工速度为 $s_1=s_2=\cdots=s_{m-1}=1$，$s_m>1$。下面给出 LS 算法：

LS 算法：

设当前工件是 J_j，大小为 p_j 及到达时间为 r_j，各个机器当前的完工时间为 $L_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，我们将 J_j 安排在机器 M_k 上，这里 M_k 满足如下条件：

$$\begin{aligned}&\min\left\{\max\left\{L_i,r_j\right\}+p_j,\max\left\{L_m,r_j\right\}+\frac{p_j}{s}\mid i=1,2,\cdots,m-1\right\}\\&=\begin{cases}\max\left\{L_k,r_j\right\}+p_j, & k<m\\ \max\left\{L_k,r_j\right\}+\dfrac{p_j}{s}, & k=m\end{cases}\end{aligned}\tag{1}$$

即算法总是安排当前工件 J_j 在能使这个工件最早完工的机器上。

如果(1)中有 $L_k<r_j$，则 J_j 在机器 M_k 上产生空闲，空闲长度为 r_j-L_k。下面给出一个实例说明 LS 算法的应用。设 $m=2$，$s_1=1$，$s_2=s=2$，$n=3$，$r_1=1$，$r_2=1$，$r_3=2$，$p_1=4$，$p_2=1$，$p_3=4$。显然 J_1 被安排在机器 M_2 的[1, 3]时间段上加工，而 J_2 被安排在机器 M_1 的时间段[1, 2]上加工。J_3 安排在 M_1 上的起始时间为 2，完工时间为 6，安排在 M_2 上的起始时间为 3，完工时间为 5，故按 LS 算法规则，J_3 应安排在 M_2 上。

LS 算法中每个工件的安排需要找出最早完工的机器，机器台数为 m，最多 m 次可以找出，注意到工件个数为 n，所以复杂度为 $O(mn)$。

下面我们分析 LS 算法的最坏性能比。

3. 定理及其证明

对给定的工件序列 $L=\left\{J_1,J_2,\cdots,J_n\right\}$，我们首先给出下面的基本不等式：

$$C_{\max}^{\mathrm{OPT}}\left(L\right)\geq\max\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j}{m+s-1},r_j+\frac{p_j}{s}\mid j=1,2,\cdots,n\right\}$$

$$U_i\leq r_n,\quad i=1,2,\cdots,m$$

引理 1： $U_i \le C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L) - \frac{p_n}{s}\left(1 \le i \le m\right)$。

证明： 由基本不等式知有 $r_i + \frac{p_i}{s} \le C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)$，$U_i \le r_n$，所以有 $U_i \le C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L) - \frac{p_n}{s}$。

定理 2： 如果 $s_1 = s_2 = \cdots = s_{m-1} = 1$，$s_m = s > 1$，则实时在线 LS 算法有性能比：

$$\frac{C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)}{C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)} \le \begin{cases} 2, & s \le \frac{m-1}{m-2} \\ 1 + \frac{m-1}{m+s-1}\min\{3, s\}, & \frac{m-1}{m-2} < s \le m-1 \\ 2 + \frac{m-1}{m+s-1}, & s > m-1 \end{cases}$$

证明： 我们不妨设 J_n 的完工时间即为 $C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)$，由 LS 算法，我们有

$$sH_m + p_n \ge sC_{\max}^{\mathrm{LS}}(L),\ \ H_i + p_n \ge C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L),\ \ i = 1, 2, \cdots, m-1$$

所以

$$\begin{aligned} &(m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L) \\ &\le sH_m + p_n + (m-1)\sum_{i=1}^{m-1}(H_i + p_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_n + \sum_{i=1}^{m-1} U_i + sU_m + (m-1)p_n \\ &\le (m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L) + (m+s-1)\left(C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L) - \frac{p_n}{s}\right) + (m-1)p_n \\ &= 2(m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L) + \frac{s(m-1)-(s+m-1)}{s}p_n \end{aligned}$$

上面第二个不等式由引理 1 得。

当 $s(m-1) \le s+m-1$ 时 $(m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L) \le 2(m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)$ 即有：

$$\frac{C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)}{C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)} \le 2$$

当 $s(m-1) > s+m-1$ 时，由于 $C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L) > \frac{p_n}{s}$，所以有

$$(m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L) \le 2(m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L) + \left[s(m-1)-(m+s-1)\right]C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)$$

因而得到

$$\frac{C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)}{C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)} \le \begin{cases} 2, & s \le \frac{m-1}{m-2} \\ 1 + \frac{s(m-1)}{m+s-1}, & s > \frac{m-1}{m-2} \end{cases} \tag{2}$$

下面我们假设工件 t' 是最后一个被 LS 算法安排在机器 M_m 上加工但在 OPT 算法下没有安排在 M_m 上的工件的长度。如果这样的 t' 不存在，则有 $H_m \le C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)$。如果 J_n 在 OPT 算法下安排在机器 M_m 上，则有

$$C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L) \le H_m + \frac{p_n}{s} \le C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)。$$

否则 J_n 在 OPT 算法下安排在某一机器 $M_i\left(i \in \{1, 2, \cdots, m-1\}\right)$ 上，这时有 $p_n \le C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)$，并且

$$C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)\le H_m+\frac{p_n}{s}\le C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)+\frac{C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)}{s}\le 2C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)\text{。}$$

现在我们假设存在这样的 t'，设 $SUC(t')$ 表示工件 t'之后在机器 M_m 上加工的工件总长度。显然 $SUC(t')\le sC_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)$ 且 $t'\le C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)$。假设在 LS 算法下工件 t'之后 M_m 上还有空闲，则在 OPT 算法下从 M_m 移走工件 t'之后不会改变 M_m 的完工时间，所以 $H_m\le C_{\max}^{OPT}(L)$。分别讨论最优算法里 J_n 安排在机器 M_m 上与不在机器 M_m 上，我可以用 t'不存在时同样的方法可得

$$C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)\le 2C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)\text{。}$$

假设在 LS 算法下工件 t'之后 M_m 上没有空闲，由 LS 算法知

$$H_i+t'\ge H_m-\frac{SUC(t')}{s},\ i=1,2,\cdots,m-1\text{。}$$

如果 J_n 在 OPT 算法下安排在机器 M_m 上，则

$$U_m+\frac{SUC(t')+p_n}{s}\le C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)\text{。}$$

所以

$$H_i+C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)\ge H_i+t'\ge H_m-\frac{SUC(t')}{s}=H_m+\frac{p_n}{s}+U_m-\frac{sU_m+SUC(t')+p_n}{s}\ge C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)+U_m-C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)$$

整理得

$$C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)\le H_i-U_m+2C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)\text{。}$$

若 J_n 在 OPT 算法下没有安排在 M_m 上，则有 $p_n\le C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)$ 并且有

$$C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)\le H_i+p_n\le H_i+C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)\le H_i-U_m+2C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L),\ i=1,2,\cdots,m-1\text{。}$$

所以不管什么情况都有

$$C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)\le H_i-U_m+2C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L),\ i=1,2,\cdots,m-1\text{。}$$

对于 M_m 有 $sC_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)\le sH_m+p_n$，所以

$$\begin{aligned}\frac{C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)}{C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)}&=\frac{sC_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)+(m-1)C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)}{(m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)}\le\frac{sH_m+p_n+\sum_{i=1}^{m-1}H_i+2(m-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)-(m-1)U_m}{(m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)}\\&=\frac{(s-m+1)U_m+\sum_{i=1}^{m-1}U_i+\sum_{j=1}^{n}p_n+2(m-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)}{(m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)}\\&\le\begin{cases}\dfrac{(s-m+1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)+(m-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)+(m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)+2(m-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)}{(m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)}, & s\ge m-1\\ \dfrac{(m-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)+(m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)+2(m-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)}{(m+s-1)C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)}, & s<m-1\end{cases}\\&\le\begin{cases}2+\dfrac{m-1}{m+s-1}, & s>m-1\\ 1+\dfrac{3(m-1)}{m+s-1}, & s\le m-1\end{cases}\end{aligned}$$

结合(2)定理得证。

4. 小结

本文研究了特殊情形下在同类机上工件实时到达的在线排序问题的 LS 算法，给定 m 台同类机器 $M_1, M_2, \cdots, M_m$，机器加工速度假设为 $s_1 = s_2 = \cdots = s_{m-1} = 1$，$s_m > 1$ 时，目标函数是最小化机器的最大完工时间，我们给出了 LS 算法的最坏性能比为

$$\frac{C_{\max}^{\mathrm{LS}}(L)}{C_{\max}^{\mathrm{OPT}}(L)} \le \begin{cases} 2, & s \le \dfrac{m-1}{m-2} \\ 1 + \dfrac{m-1}{m+s-1} \min\{3, s\}, & \dfrac{m-1}{m-2} < s \le m-1 \\ 2 + \dfrac{m-1}{m+s-1}, & s > m-1 \end{cases}$$

进一步的研究可设计比 LS 算法具有更好性能比的算法。

基金项目

本文得到湖南省教育厅重点课题(编号：16A126)资助。

参考文献

[1] Gonzalez, T., Ibarra, O.H. and Sahni, S. (1977) Bounds for LPT Scheduling on Uniform Processors. *SIAM Journal on Computing*, **6**, 155-166. https://doi.org/10.1137/0206013

[2] Graham, R.L. (1969) Bounds on Multiprocessing Timing Anomalies. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **17**, 416-429. https://doi.org/10.1137/0117039

[3] Cho, Y. and Sahni, S. (1980) Bounds for List Schedules on Uniform Processors. *SIAM Journal on Computing*, **9**, 91-103. https://doi.org/10.1137/0209007

[4] Berman, P., Chanrikar, M. and Karpinski, M. (2000) Online Load Balancing for Related Machines. *Journal of Algorithms Archive*, **35**, 108-121. https://doi.org/10.1006/jagm.1999.1070

[5] Epstein, L., Noga J., Seiden, S., Sgall, J. and Woeginger, G.J. (2001) Randomized Online Scheduling on Two Uniform Machines. *Journal of Scheduling*, **4**, 71-92. https://doi.org/10.1002/jos.60

[6] 蔡圣义. 三台同类机在线排序问题一种特殊情形的研究[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(7): 41-46.

[7] Cai, S.Y. and Yang, Q.F. (2012) Online Scheduling on Three Uniform Machines. *Discrete Applied Mathematics*, **160**, 291-302. https://doi.org/10.1016/j.dam.2011.10.001

[8] Li, R.H. and Huang, H.C. (2004) On-line Scheduling for Jobs with Arbitrary Release Times. *Computing*, **73**, 79-97. https://doi.org/10.1007/s00607-004-0067-1