

一类树的主特征值数目刻画

杜泽楠, 于倩

长安大学, 理学院, 陕西 西安

Email: 1721930831@qq.com, 1779382456@qq.com

收稿日期: 2021年4月1日; 录用日期: 2021年4月30日; 发布日期: 2021年5月8日

摘要

一个图的邻接矩阵的特征值称为图的特征值, 图的所有特征值的多重集称为图的谱。如果图的一个特征值所对应的特征空间与全1向量不正交, 则称其为主特征值, 主特征值对于刻画图及研究图的性质都有重要的意义。刻画恰有 $k (2 \leq k \leq n)$ 个主特征值的图是一个存在已久的问题, 本文给出了一类树的主特征值数目的下界。

关键词

邻接矩阵, 主特征值, 树图

Characterization of the Number of Main Eigenvalues of a Class of Trees

Zenan Du, Qian Yu

School of Science, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Email: 1721930831@qq.com, 1779382456@qq.com

Received: Apr. 1st, 2021; accepted: Apr. 30th, 2021; published: May 8th, 2021

Abstract

The eigenvalues of the adjacency matrix of a graph are called the eigenvalues of a graph, the multi-set of all eigenvalues of a graph is called the spectrum of a graph. An eigenvalue of a graph is a main eigenvalue if its eigenspace is not orthogonal to the all-ones vector, the main eigenvalues are significant to the characterization of graphs and the properties of graphs. Characterizing graphs with $k (2 \leq k \leq n)$ number of main eigenvalues are a long-standing problem. In this paper, the lower bound of main eigenvalues of a class of trees is determined.

Keywords

Adjacency Matrix, Main Eigenvalues, Tree

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图论起源于 18 世纪哥尼斯堡七桥问题, 瑞士数学家 Leonhard Euler 在 1736 年发表了一篇解决七桥问题的论文, 该论文被认为是图论的第一篇论文, Euler 因此也被誉为图论之父。1936 年匈牙利数学家 König 出版了第一本图论专著《Theory of Directed and Undirected Graphs》, 标志着图论正式成为一门独立的学科。作为离散数学重要的分支之一, 图论已发展成一门独立的学科, 它主要研究某一集合元素间可用拓扑图形表示的二元关系。根据研究方法和内容的不同, 图论已衍生出许多分支, 如拓扑图论、代数图论、随机图论、结构图论、模糊图论、极值图论、超图论等。图谱理论作为代数图论中的一个重要分支, 与群论、矩阵论、组合数学、多项式理论、线性代数等学科都有着密切的联系, 它主要研究图的组合性质和图相关矩阵(如邻接矩阵, 拉普拉斯矩阵, 无符号拉普拉斯矩阵, 距离矩阵)的代数性质之间的关系。

一个图的邻接矩阵的特征值称为图的特征值, 图的所有特征值的多重集称为图的谱。1978 年 Cvetković D. [1] 第一次提出了图的主特征值的概念。若图的邻接矩阵 A 的特征值 λ 存在一个特征向量 x , 满足 x 与元素全为 1 的向量 e 不正交, 即 $e^T x \neq 0$, 那么就称 λ 为图的一个主特征值。Cvetković D. 在文献 [1] 中提出问题, 如何刻画恰有 k ($2 \leq k \leq n$) 个主特征值的图。对于一个连通图 G , 因为其邻接矩阵是不可约的, 故由著名的 Perron-Frobenius 定理可知 G 的最大特征值为主特征值。更一般的, 恰有一个主特征值的图为正则图 [1]。已经有一系列论文对于恰有两个主特征值的图进行了刻画, 如 Cardoso [2], Hagos [3], Hayat [4], Hou *et al.* [5] [6] [7], Lepović [8], Shi [9] 等, 然而这项工作还远未完成。2012 年 Godsil C. [10] 猜想: 几乎所有图的全部特征值均为主特征值, 2016 年 O'Rourke [11] 证明了这个猜想的正确性, 该结论说明主特征值对于刻画图及研究图的性质都有重要的意义。

2. 预备知识

定义 2.1 [12] 对于 n 个顶点的图, 其邻接矩阵定义为 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } v_i \text{ 和 } v_j \text{ 相邻} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。

由上述定义可知邻接矩阵为实对称矩阵且主对角元素为 0。

定义 2.2 [12] 路图 P_n 表示从一个顶点 v_1 出发, 依次将新点 v_i 与 v_{i-1} ($i \leq n$) 相连所得到的图。

定理 2.3 [13] 路图 P_n 的特征多项式为 $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_n(x) = x\varphi_{n-1}(x) - \varphi_{n-2}(x)$ ($n \geq 2$)。

推论 2.4 当 $n = 2k$ 时, $\varphi_n(x)$ 为偶函数; 当 $n = 2k + 1$ 时, $\varphi_n(x)$ 为奇函数。

证明: $k = 0$ 时结论显然成立,

$$k = 1 \text{ 时, } \varphi_2(-x) = -x\varphi_1(-x) - \varphi_0(-x) = x\varphi_1(x) - \varphi_0(x) = \varphi_2(x),$$

$$\varphi_3(-x) = -x\varphi_2(-x) - \varphi_1(-x) = -x\varphi_2(x) + \varphi_1(x) = -\varphi_3(x), \text{ 成立。}$$

$$k = 2 \text{ 时, } \varphi_4(-x) = -x\varphi_3(-x) - \varphi_2(-x) = x\varphi_3(x) - \varphi_2(x) = \varphi_4(x),$$

$$\varphi_5(-x) = -x\varphi_4(-x) - \varphi_3(-x) = -x\varphi_4(x) + \varphi_3(x) = -\varphi_5(x), \text{ 成立。}$$

以此类推, n 为奇偶的情况可交替证明, 故结论成立。

定义 2.5 [14] 星形树 $S(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$ 表示将一个顶点 v 分别与路 P_{n_1}, \dots, P_{n_k} 的一端相连所构成的图, 见图 1。

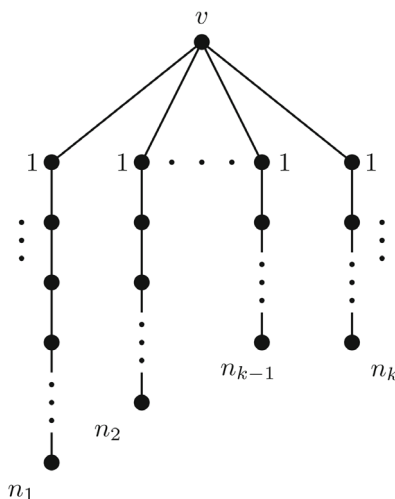


Figure 1. $S(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$

图 1. $S(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$

定理 2.6 [14] 对于正整数 m , 星形树 $S(1, 1, m)$ 的特征值为:

$$\text{Spec}(S(1, 1, m)) = \left\{ 2 \cos\left(\frac{2k+1}{2m+4} \pi\right) : k = 0, 1, \dots, m+1 \right\} \cup \{0\}$$

定义 2.7 [12] 若图 G 的顶点集可划分为两个非空子集 X 和 Y , 使得图 G 的任一条边都有一个端点在 X 中, 另一个端点在 Y 中, 则称图 G 为二部图。

推论 2.8 [12] 若图 G 为二部图, 顶点集可划分为 X 和 Y , 其中它们的阶数分别 s 和 t , 则其全部特征值关于原点对称。进一步若特征值 λ 对应特征向量 $x = (x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_t)^T$, 则 $-\lambda$ 对应特征向量 $x' = (x_1, \dots, x_s, -y_1, \dots, -y_t)^T$ 。

3. 一类星形树的主特征值数目

定理 3.1 星形树 $S(1, 1, m)$ ($m \geq 1$) 的主特征值数目有以下情况: 当 m 为偶数时, $S(1, 1, m)$ 的主特征值数大于等于 $\frac{m}{2} + 1$, 其中 0 是单根且为非主特征值; 当 m 为奇数时, 非零特征值 $\pm \lambda$ 同为主特征值或同为非主特征值, 且 0 是二重根, 进一步当 $m = 4k - 3$ 时, 0 为非主特征值; 当 $m = 4k - 1$ 时, 0 为主特征值 ($k \geq 1$)。

证明: 首先分析图 $S(1, 1, m)$ 根的情况, 因为 $\lambda = \{0\} \cup \left\{ 2 \cos\left(\frac{2k+1}{2m+4} \pi\right), k = 0, 1, \dots, m+1 \right\}$, 而 $\frac{2k+1}{2m+4} = \frac{1}{2}$ 当且仅当 $k = \frac{m+1}{2}$, 说明只有 m 为奇数即 $|V(S(1, 1, m))| = m+3$ 为偶数时, 0 是 $S(1, 1, m)$ 的二重根, m 为偶数时 0 为单根。因为余弦值 $\cos \theta$ 在区间 $[0, \pi]$ 上单调递减, 故图 $S(1, 1, m)$ 的非零特征值均为单根, 且关于原点对称。

设图 $S(1,1,m)$ 的邻接矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$, 易见 $n = m + 3$ 。对其特征值 λ 及对应特

征向量 x 有 $Ax = \lambda x$, 令 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 展开方程得到:

$$\begin{cases} x_3 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = \lambda x_3 \\ x_3 + x_5 = \lambda x_4 \\ x_4 + x_6 = \lambda x_5 \\ \dots \\ x_{n-2} + x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases} \quad (1)$$

由(1)式可知, A 的每一个特征向量 x 都可以由最后一个分量 $x_n (\neq 0)$ 表示, 不妨设 $x_n = 1$ 。

若 $x_n = 0$, 则代入(1)式可得:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_n = x_{n-1} = x_{n-2} = x_{n-3} = \dots = x_5 = x_4 = x_3 = 0 \end{cases}$$

故易见向量 $x' = (1, -1, 0, \dots, 0)^T$ 是对应特征值 0 的特征向量, 即满足 $Ax' = 0 \cdot x'$, 由 $e^T x' = 0$ 知 0 是非主特征值, 且该 0 特征值不由 $2 \cos\left(\frac{2k+1}{2m+4}\pi\right)$ 贡献。

将(1)式左右两端相加得:

$$2 \sum_{i=1}^n x_i - x_1 - x_2 + x_3 - x_n = \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

化简得:

$$(2 - \lambda) \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 - x_3 + x_n$$

因为 $\lambda \in (-2, 2)$, $2 - \lambda > 0$, 故 $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ 即 λ 为非主特征值当且仅当

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_n = 0 \quad (2)$$

下面讨论 $\lambda \neq 0$ 的情况。

此时显然 $x_1 \neq 0$, 否则有 $x_n = x_{n-1} = x_{n-2} = x_{n-3} = \dots = x_5 = x_4 = x_3 = x_2 = x_1 = 0$, 向量 x 无意义。

由(1)式知 $x_n \neq 0$ 时, 有 $x_1 = x_2$, 故(2)式可表示为:

$$(2 - \lambda)x_1 + 1 = 0 \quad (3)$$

因为 $2 - \lambda > 0$, 故当 $x_1 > 0$ 时(3)式左端恒大于零, 等式矛盾, 说明 $x_1 > 0$ 时 $\sum_{i=1}^n x_i \neq 0$, 对应特征值 λ 为

主特征值。

1) 当 m 为偶数时, $n = m + 3$ 为奇数, 对于特征值 $\pm\lambda$, 若对应 λ 的特征向量为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)^T$, 因为 $S(1, 1, m)$ 为二部图, 连接在中心点 v 的两个一度点和 P_m 中与 v 的距离为奇数的顶点可划分为一个顶点集, 则由推论 2.8 可得对应 $-\lambda$ 的特征向量为 $y = (-x_1, -x_2, x_3, -x_4, x_5, \dots, x_{n-2}, -x_{n-1}, 1)^T$, x 和 y 的第一个分量异号且不等于 0, 则 $\pm\lambda$ 至少有一个为主特征值, 这就说明对于奇数个顶点的图 $S(1, 1, m)$, 其至少有 $\frac{m+3-1}{2}$ 个主特征值。

2) 当 m 为奇数时, $n = m + 3$ 为偶数, 对于特征值 $\pm\lambda$, 若对应 λ 的特征向量为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)^T$, 同理可得对应 $-\lambda$ 的特征向量为 $y = (x_1, x_2, -x_3, x_4, -x_5, \dots, -x_{n-2}, x_{n-1}, 1)^T$, x 和 y 的第一个分量同号且不等于 0, 说明对于偶数个顶点的图 $S(1, 1, m)$, 其特征值 $\pm\lambda$ 同为主特征值(或非主特征值)。

最后讨论 0 作为二重根出现的情况。

由上面分析可知当 m 为奇数, 0 是二重根, 且其中一个 0 对应特征向量 $x' = (1, -1, 0, \dots, 0)^T$ 。

将 $x_n = 1$ 代入(1)式并化简得:

$$\begin{cases} x_3 = \lambda x_4 - x_5 \\ x_4 = \lambda x_5 - x_6 \\ \dots \\ x_{n-2} = \lambda x_{n-1} - x_n \\ x_{n-1} = \lambda \\ x_n = 1 \end{cases}$$

观察可得向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的分量满足递推关系 $x_t = \lambda x_{t+1} - x_{t+2}$ ($t = 3, 4, \dots, n-2$), 且初始值 $x_n = 1, x_{n-1} = \lambda$ 。则对比路 P_n 的特征多项式可得:

$$\begin{cases} \varphi_{n-3}(\lambda) = x_3 \\ \varphi_{n-4}(\lambda) = x_4 \\ \dots \\ \varphi_2(\lambda) = x_{n-2} \\ \varphi_1(\lambda) = x_{n-1} \\ \varphi_0(\lambda) = x_n \end{cases}$$

故由 $x_1 + x_2 + x_4 = \lambda x_3$ 可得:

$$x_1 + x_2 = \lambda x_3 - x_4 \Rightarrow x_1 + x_2 = \lambda \varphi_{n-3}(\lambda) - \varphi_{n-4}(\lambda) = \varphi_{n-2}(\lambda)$$

代入(2)式有 $\varphi_{n-2}(\lambda) + 1 = 0$ (此时 $x_3 = \lambda x_1 = 0$)。

由 $\varphi_n(x)$ 的奇偶性可得,

$$\varphi_0(0) = 1, \varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = -1, \varphi_3(0) = 0, \varphi_4(0) = 1, \dots, \varphi_{4t}(0) = 1, \varphi_{4t+2}(0) = -1, (t = 0, 1, \dots)$$

故当 $n = 4k + 2$ 时, $\varphi_{4k+2-2}(0) + 1 = 2 > 0$, 0 为主特征值; 当 $n = 4k$ 时, $\varphi_{4k-2}(0) + 1 = -1 + 1 = 0$, 0 为非主特征值, 其中 $k \geq 1$ 。

定义 3.2 [1] 对于一个图 G , 若其顶点集可划分为 $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, $V_i \cap V_j$ 为空集, 其中 V_i 中的每个顶点在 V_j 中的邻点个数相同, 记为 b_{ij} , $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 则称该划分为图 G 的一个公平划分, 记为 Π 。以 V_1, V_2, \dots, V_k 为顶点集, V_i 到 V_j 有 b_{ij} 条弧的有向多重图称为图 G 的商图, 矩阵 $B = (b_{ij})_{k \times k}$ 称为商矩阵。

定理 3.3 [1] 对于图 G 的任意商图 H , H 的谱包含 G 的全部主特征值。

对于任意图 G 的一个公平划分 Π 来说, 因为每个划分 V_i 内的顶点处于 G 自同构群中的同一轨道, 故由定理 3.3 可知, 对于恰有 k 个主特征值的图, 其自同构群至少有 k 条轨道。

推论 3.4 星形树 $S(m_1, \dots, m_1, m_2, \dots, m_2, \dots, m_s, \dots, m_s)$ 至多有 $m_1 + m_2 + \dots + m_s + 1$ 个主特征值, 其中 m_1, \dots, m_s 的个数分别为 t_1, \dots, t_s ($t_i \geq 1$)。

证明: 显然星形树 $S(m_1, \dots, m_1, m_2, \dots, m_2, \dots, m_s, \dots, m_s)$ 的顶点数为 $t_1 m_1 + t_2 m_2 + \dots + t_s m_s + 1$, 我们可以找到其阶数最小的商图 H , 点集划分如下: 首先将长度相同的 P_{m_i} 分为一组, 其中每条路 P_{m_i} 中与中心点 v 距离相同的点处于同一轨道, 故可将同一轨道中的 t_i 个顶点划分为一个顶点集, 因此对每组 P_{m_i} 来说, 其可划分为因子图 H 中的 m_i 个顶点。同理每组 P_{m_i} 均可划分为 H 中的 m_i 个顶点, 又中心点 v 自处一个轨道, 故 H 的阶为 $m_1 + m_2 + \dots + m_s + 1$ 。由定理 3.3 知, 任意商图的谱包含原图的全部主特征值, 故星形树 $S(m_1, \dots, m_1, m_2, \dots, m_2, \dots, m_s, \dots, m_s)$ 至多有 $m_1 + m_2 + \dots + m_s + 1$ 个主特征值。

参考文献

- [1] Cvetković, D. (1978) The Main Part of the Spectrum, Divisors and Switching of Graphs. *Publications de l'Institut Mathématique (Beograd)*, **23**, 31-38.
- [2] Butler, G. and McKay, J. (1983) The Transitive Groups of Degree up to Eleven. *Communications in Algebra*, **11**, 836-911. <https://doi.org/10.1080/00927878308822884>
- [3] Hagos, E.M. (2002) Some Results on Graph Spectra. *Linear Algebra and Its Applications*, **356**, 103-111. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(02\)00324-5](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00324-5)
- [4] Hayat, S., Koolen, J.H., Liu, F. and Qiao, Z. (2016) A Note on Graphs with Exactly Two Main Eigenvalues. *Linear Algebra and Its Applications*, **511**, 318-327. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.09.019>
- [5] Hou, Y.P., Tang, Z.K. and Shiu, W.C. (2012) Some Results on Graphs with Exactly Two Main Eigenvalues. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 1274-1278. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.11.025>
- [6] Hou, Y.P. and Tian, F. (2006) Unicyclic Graphs with Exactly Two Main Eigenvalues. *Applied Mathematics Letters*, **19**, 1143-1147. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2005.11.025>
- [7] Hou, Y.P. and Zhou, H.Q. (2005) Trees with Exactly Two Main Eigenvalues. *Journal of Natural Science of Hunan Normal University*, **26**, 1-3. (In Chinese)
- [8] Lepović, M. (2001) Some Results on Graphs with Exactly Two Main Eigenvalues. *Publikacija Elektrotehnikog Fakulteta Serija Matematika*, **12**, 68-84.
- [9] Shi, L. (2009) On Graphs with Given Main Eigenvalues. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 1870-1874. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.06.027>
- [10] Godsil, C. (2012) Controllable Subsets in Graphs. *Annals of Combinatorics*, **16**, 733-744. <https://doi.org/10.1007/s00026-012-0156-3>
- [11] O'Rourke, S. and Touri, B. (2016) On a Conjecture of Godsil Concerning Controllable Random Graphs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **54**, 3347-3378. <https://doi.org/10.1137/15M1049622>
- [12] 高随祥. 图论与网络流理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [13] Biggs, N. Algebraic Graph Theory [M]. 北京: 世界图书出版公司, 2004.
- [14] Oboudi, R.M. (2018) On the Eigenvalues and Spectral Radius of Starlike Trees. *Aequationes Mathematicae*, **92**, 683-694. <https://doi.org/10.1007/s00010-017-0533-4>