

基于模糊直觉不确定语言信息的工程决策方法研究

何婷婷^{1,2}, 吴晖镗¹, 牛利利³, 陆星屹⁴, 余文质², 陈小军², 袁成林², 卢明好², 张琥石²

¹广西大学, 广西 南宁

²广西医科大学, 广西 南宁

³广西农业职业技术大学, 广西 南宁

⁴广西华蓝工程管理有限公司, 广西 南宁

Email: hetingting@stu.gxmu.edu.cn

收稿日期: 2021年6月25日; 录用日期: 2021年7月22日; 发布日期: 2021年7月29日

摘要

工程决策的完成需要人们先对基本指标进行相应评价, 再综合给出相应结论。但专家评价过程中, 往往使用定性语言, 本文将定性的语言表达与直觉不确定语言术语集的理论相结合, 提出模糊直觉不确定语言术语集的概念。本文理论可以细腻刻画决策者的犹豫程度和决策环境的不确定性, 并给出模糊直觉不确定语言术语的运算规则、比较方法和集成算子。进而给出相应的决策方法, 并通过算例分析表明了该方法工程决策问题中的可行性。

关键词

工程决策, 模糊, 直觉不确定语言, 集成算子

Research on Engineering Decision Making Method Based on Fuzzy Intuitionistic Uncertain Linguistic Information

Tingting He^{1,2}, Goh Hui Hwang¹, Lili Niu³, Xingyi Lu⁴, Wenzhi Yu², Xiaojun Chen², Chenglin Yuan², Mingyu Lu², Hushi Zhang²

¹Guangxi University, Nanning Guangxi

²Guangxi Medical University, Nanning Guangxi

³Guangxi Vocational and Technical College of Agriculture, Nanning Guangxi

⁴Guangxi Hualan Engineering Management Co. Ltd., Nanning Guangxi

Email: hetingting@stu.gxmu.edu.cn

Abstract

To successfully complete an engineering decision making, individuals must first analyze the fundamental indices and then synthesize the related findings. Qualitative language, on the other hand, is frequently utilized in expert evaluation. By merging qualitative language expression and the idea of intuitionistic uncertain language term sets, this article proposes the concept of fuzzy intuitionistic uncertain language term set. The theory presented in this article can precisely explain the degree of hesitation of the choice maker and the uncertainty of the decision environment, as well as the operation rules, comparison procedures, and integration operators for fuzzy intuitionistic uncertain language words. Then the appropriate decision procedure is presented, and the approach's applicability to engineering choice problems is proven through an examination of a numerical example.

Keywords

Engineering Decision Making, Fuzzy, Intuitionistic Uncertain Language, Integration Operators

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

工程决策实际上作为一个相对程序较多的过程,涉及的领域较多,为了给工程决策提供更多的参考方案,把决策理论应用到这个领域来是很好的解决手段。比如工程项目地址的选择问题[1],工程项目的方案选择问题,技术方案的选择等[2][3],应用决策理论的知识对其进行分析,给出具有一定理论支撑的决策方案,帮助企业在工程项目中获得相应的保障。

随着决策理论不断发展,基于多个专家的决策理论不断被更新,一些数学模型也被引入到工程决策的实际中。但在实际过程中,由于工程问题的复杂性,决策者对问题的描述以及对各项指标的评价往往不是定量的,而是定性的语。同时因为决策者的心里犹豫也要考虑实际决策过程中,基于不确定语言信息的群决策方法日益受到人们的关注。模糊集[4]在被提出之后,学者们不断对其进行优化改进,Atanassov通过隶属度和非隶属度对模糊性的刻画,提出了直觉模糊集概念[5]。同时语言型的多属性群决策问题也不断引起学者们的关注,文献[6][7][8]通过假设隶属函数,基于拓展原理将评价信息转化成模糊数进行分析。文献[9][10][11]利用符号转移方法,设计有序语言计算模型,但是这个方法容易丢失一些信息。文献[12][13][14]为了避免信息丢失设计二维模型对评价进行刻画表达,但是这个方法使得表述形式更加繁琐,不太适用于工程决策问题。

目前已有的关于语言术语集的理论的研究文献中,大多是针对属性值的隶属度和非隶属度均为数值即为定量的情况,由于决策者们通常受到自身经验因素以及外界复杂环境影响,容易产生犹豫不确定的心理波动,评价结果也应该要体现对这个犹豫程度的刻画。因此以定性的语言评价来表达属性值的隶属度和非隶属度,在便于直观表示评价的同时,能更好地刻画人类思维的模糊不确定本质以及描述客观世界的不确定性。结合上述分析,本文给出模糊直觉不确定语言术语的概念,并根据直觉不确定语言术语

集理论, 对其运算法则进行了相应验证。在此基础上提出 *FIULTWA* 算子、*FIULTOWA* 算子和 *FIULTHA* 算子, 并得到相应决策方法。

2. 主要结果

2.1. 模糊直觉不确定语言术语及运算

2.1.1. 模糊直觉不确定语言术语

定义 2.1 设 $L = \{l_0, l_1, \dots, l_{2\tau}\}$ 为语言评价集, \hat{L} 为 L 上的扩展语言评价集, \tilde{L} 为所有不确定语言术语构成的语言集, 对 $[l_{\theta(x)}, l_{\eta(x)}] \in \tilde{L}$, X 为一给定论域, 则称

$G = \left\{ \left\langle x \left[[l_{\theta(x)}, l_{\eta(x)}], (l_{\alpha(x)}^u, l_{\beta(x)}^v) \right] \right\rangle \middle| x \in X, l_{\alpha(x)}^u, l_{\beta(x)}^v \in \hat{L} \right\}$ 为 X 上的模糊直觉不确定语言术语集, 其中 $l_{\alpha(x)}^u, l_{\beta(x)}^v$

分别表示 x 隶属于和非隶属于不确定语言评价值 $[l_{\theta(x)}, l_{\eta(x)}]$ 的程度。称 $l_{\alpha(x)}^u$ 为 $[l_{\theta(x)}, l_{\eta(x)}]$ 的隶属语言值, $l_{\beta(x)}^v$ 为非隶属语言值, 且 $l_{\alpha(x)}^u, l_{\beta(x)}^v$ 满足条件 $0 \leq \alpha(x) + \beta(x) \leq 2\tau$ 。

语言评价 $l_{\gamma(x)}^\pi = \text{neg}(l_{\alpha(x) + \beta(x)})$ 则表示元素 x 属于不确定语言评价值 $[l_{\theta(x)}, l_{\eta(x)}]$ 的犹豫度, 称为犹豫语言值。 $l_{\gamma(x)}^\pi$ 越大, 表示所给评价体现出来的犹豫程度越大; $l_{\gamma(x)}^\pi$ 越小, 表示所给评价体现出来的犹豫程度越小。特别地, 当 $l_{\gamma(x)}^\pi = l_0$ 时, $l_{\alpha(x)}^u \oplus l_{\beta(x)}^v = l_{2\tau}$, 则表示不存在犹豫性。

定义 2.2 设 $G = \left\{ \left\langle x \left[[l_{\theta(x)}, l_{\eta(x)}], (l_{\alpha(x)}^u, l_{\beta(x)}^v) \right] \right\rangle \middle| x \in X, l_{\alpha(x)}^u, l_{\beta(x)}^v \in \hat{L} \right\}$ 为模糊直觉不确定语言术语集, 则三元组 $\left\langle [l_{\theta(x)}, l_{\eta(x)}], (l_{\alpha(x)}^u, l_{\beta(x)}^v) \right\rangle$ 称为模糊直觉不确定语言术语。 G 可以看作模糊直觉不确定语言术语的集合, 故 G 又可以表示为:

$$G = \left\{ \left\langle [l_{\theta(x)}, l_{\eta(x)}], (l_{\alpha(x)}^u, l_{\beta(x)}^v) \right\rangle \middle| x \in X, l_{\alpha(x)}^u, l_{\beta(x)}^v \in \hat{L} \right\}$$

为简便表示, 以下模糊直觉不确定语言术语 G 可以写为 $G = \langle [l_\theta, l_\eta], (l_\alpha^u, l_\beta^v) \rangle$ 。

2.1.2. 模糊直觉不确定语言术语的运算

本文将直觉不确定语言数的运算法则进行推广, 得到关于模糊直觉不确定语言术语的加法、乘法、数乘的基本运算如下。

定义 2.3 对任意两个模糊直觉不确定语言术语 $g_1 = \langle [l_{\theta_1}, l_{\eta_1}], (l_{\alpha_1}^u, l_{\beta_1}^v) \rangle$ 和 $g_2 = \langle [l_{\theta_2}, l_{\eta_2}], (l_{\alpha_2}^u, l_{\beta_2}^v) \rangle$, 一些基本运算法则如下, 其中 $\lambda \geq 0$:

$$g_1 \hat{\oplus} g_2 = \left\langle [l_{\theta_1 + \theta_2}, l_{\eta_1 + \eta_2}], (l_{2\tau} - (l_{2\tau} - l_{\alpha_1}^u) \otimes (l_{2\tau} - l_{\alpha_2}^u), l_{\beta_1}^v \otimes l_{\beta_2}^v) \right\rangle;$$

$$g_1 \hat{\otimes} g_2 = \left\langle [l_{\theta_1 \times \theta_2}, l_{\eta_1 \times \eta_2}], (l_{\alpha_1}^u \otimes l_{\alpha_2}^u, l_{2\tau} - (l_{2\tau} - l_{\beta_1}^v) \otimes (l_{2\tau} - l_{\beta_2}^v)) \right\rangle;$$

$$\lambda g_1 = \left\langle [l_{\lambda \theta_1}, l_{\lambda \eta_1}], (l_{2\tau} - (l_{2\tau} - l_{\alpha_1}^u)^\lambda, (l_{\beta_1}^v)^\lambda) \right\rangle;$$

$$g_1^\lambda = \left\langle [l_{\theta_1^\lambda}, l_{\eta_1^\lambda}], ((l_{\alpha_1}^u)^\lambda, l_{2\tau} - (l_{2\tau} - l_{\beta_1}^v)^\lambda) \right\rangle。$$

其中基本语言的运算仍然遵循语言术语集的规则[15], 且上述定义的计算结果, 仍为模糊直觉不确定语言术语。则对于任意两个模糊直觉不确定语言术语 g_1 和 g_2 , 有如下算法则成立:

- $g_1 \hat{\oplus} g_2 = g_2 \hat{\oplus} g_1$;
- $g_1 \hat{\otimes} g_2 = g_2 \hat{\otimes} g_1$;
- $\lambda(g_1 \hat{\oplus} g_2) = \lambda g_1 \hat{\oplus} \lambda g_2, \lambda \geq 0$;

- d) $\lambda_1 g_1 \hat{\oplus} \lambda_2 g_1 = (\lambda_1 + \lambda_2) g_1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0;$
 e) $g_1^{\lambda_1} \hat{\otimes} g_1^{\lambda_2} = (g_1)^{\lambda_1 + \lambda_2}, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0;$
 f) $g_1^{\lambda_1} \hat{\otimes} g_2^{\lambda_2} = (g_1 \hat{\otimes} g_2)^{\lambda_1}.$

2.1.3. 模糊直觉不确定语言术语的比较

为比较两个模糊直觉不确定语言术语，利用记分函数和精确函数对直觉模糊值的比较思想，以及记分函数和精确函数的一些拓展形式，本文给出如下定义。

定义 2.4 设 $g_1 = \langle [l_{\theta_1}, l_{\eta_1}], (l_{\alpha_1}^u, l_{\beta_1}^v) \rangle$ 为模糊直觉不确定语言术语，则称 $Ec(g_1)$ 为 g_1 的期望值，形式如下：

$$Ec(g_1) = \frac{1}{4\tau} (l_{\alpha_1}^u \oplus l_{2\tau} - l_{\beta_1}^v) \otimes l_{(\theta_1 + \eta_1)/2} = l_{(\theta_1 + \eta_1) \times (\alpha_1 + 2\tau - \beta_1) / 8\tau} \quad (1)$$

其中 $Ec(g_1) \in [l_0, l_{\eta_1}]$ ， $Ec(g_1)$ 越大， g_1 就越大。特别地，如果 $Ec(g_1) = l_{\eta_1}$ ，那么 g_1 取最大值， $g_1 = \langle [l_{\eta_1}, l_{\eta_1}], (l_{2\tau}, l_0) \rangle$ 。如果 $Ec(g_1) = l_0$ ，那么 g_1 取最小值， $g_1 = \langle [l_{\theta_1}, l_{\theta_1}], (l_0, l_{2\tau}) \rangle$ 。

定义 2.5 设 $g_1 = \langle [l_{\theta_1}, l_{\eta_1}], (l_{\alpha_1}^u, l_{\beta_1}^v) \rangle$ 为模糊直觉不确定语言术语，则 $Sc(g_1)$ 称为 g_1 的记分函数，如下式所示：

$$Sc(g_1) = l_{(\theta_1 + \eta_1)/2} \otimes (l_{\alpha_1}^u - l_{\beta_1}^v) = l_{(\theta_1 + \eta_1) \times (\alpha_1 - \beta_1) / 2} \quad (2)$$

定义 2.6 设 $g_1 = \langle [l_{\theta_1}, l_{\eta_1}], (l_{\alpha_1}^u, l_{\beta_1}^v) \rangle$ 为模糊直觉不确定语言术语，则称为的精确函数，

$$Hc(g_1) = l_{(\theta_1 + \eta_1)/2} \otimes (l_{\alpha_1}^u \oplus l_{\beta_1}^v) = l_{(\alpha_1 + \beta_1) \times (\theta_1 + \eta_1) / 2} \quad (3)$$

基于以上分析，结合直觉模糊值的比较思想，本文拓展给出一种模糊直觉不确定语言术语的比较排序方法。

定义 2.7 设 g_1 和 g_2 为任意两个模糊直觉不确定语言术语，则有：

- 1) 如果 $Ec(g_1) \succ Ec(g_2)$ ，那么 $g_1 \succ g_2$ ；
- 2) 如果 $Sc(g_1) \succ Sc(g_2)$ ，那么 $g_1 \succ g_2$ ；
- 3) 如果 $Ec(g_1) = Ec(g_2)$ ， $Sc(g_1) = Sc(g_2)$ ；那么进一步，
 如果 $Hc(g_1) \succ Hc(g_2)$ ，那么 $g_1 \succ g_2$ ；
 如果 $Hc(g_1) = Hc(g_2)$ ，那么 $g_1 = g_2$ 。

2.2. 模糊直觉不确定语言术语集结算子

根据之前研究，至今为止形如梯形语言术语、三角模糊语言术语、不确定语言术语以及语言术语，均有可以有适应的集结算子对其进行集结。但针对模糊直觉不确定语言术语，现在有的语言集结算子还不能直接使用。因此，根据上述基于模糊直觉不确定语言术语的运算规则，以及根据 WA 算子和 OWA 算子的特点；本文将推广到模糊直觉不确定语言环境中，提出模糊直觉不确定语言术语相关集结算子。

定义 2.8 设 $g_i = \langle [l_{\theta_i}, l_{\eta_i}], (l_{\alpha_i}^u, l_{\beta_i}^v) \rangle (i=1, 2, \dots, n)$ 是一组模糊直觉不确定语言术语，若 $FIULTWA: \tilde{L}^n \rightarrow \tilde{L}$ ，满足：

$$FIULTWA_{\omega}(g_1, g_2, \dots, g_n) = \omega_1 g_1 \hat{\oplus} \omega_2 g_2 \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} \omega_n g_n \quad (4)$$

其中， $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 是 $g_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的加权向量，且 $\omega_i \in [0, 1]$ ， $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。那么，就称 $FIULTWA$

为模糊直觉不确定语言术语的加权算术平均算子。特别地，如果 $\omega = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^T$ ，则称 *FIULTWA* 为模糊直觉不确定语言术语的算术平均算子。

定理 2.1 设 $g_i = \left\langle [l_{\theta_i}, l_{\eta_i}], (l_{\alpha_i}^u, l_{\beta_i}^v) \right\rangle (i=1, 2, \dots, n)$ 是一组模糊直觉不确定语言术语，则公式(6)的计算结果仍为模糊直觉不确定语言术语，且有：

$$\begin{aligned}
 FIULTWA_{\omega}(g_1, g_2, \dots, g_n) &= \omega_1 g_1 \hat{\oplus} \omega_2 g_2 \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} \omega_n g_n \\
 &= \left\langle \left[l_{\sum_{i=1}^n \omega_i \theta_i}, l_{\sum_{i=1}^n \omega_i \eta_i} \right], \left(l_{2\tau - \prod_{i=1}^n (2\tau - \alpha_i)^{\omega_i}}, l_{\prod_{i=1}^n \beta_i^{\omega_i}} \right) \right\rangle
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

其中， $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 是 $g_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的加权向量，且 $\omega_i \in [0, 1]$ ， $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ 。

定义 2.9 设 $g_i = \left\langle [l_{\theta_i}, l_{\eta_i}], (l_{\alpha_i}^u, l_{\beta_i}^v) \right\rangle (i=1, 2, \dots, n)$ 是一组模糊直觉不确定语言术语，若 $FIULTWA: \tilde{L}^n \rightarrow \tilde{L}$ ，满足：

$$FIULTWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n) = w_1 g_{\sigma_1} \hat{\oplus} w_2 g_{\sigma_2} \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} w_n g_{\sigma_n}
 \tag{6}$$

其中， $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 是 *FIULTWA* 算子相关联的加权向量，且 $w_i \in [0, 1]$ ， $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ 。 $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ 是 $(1, 2, \dots, n)$ 的一个置换，是对任意的 i 有 $g_{\sigma_{i+1}} \geq g_{\sigma_i}$ 。则称 *FIULTWA* 为模糊直觉不确定术语的有序加权平均算子。特别地，如果 $w = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^T$ ，那么 *FIULTWA* 算子就退化为 *FIULTWA* 算子。

依据遇到的问题不同也有 w 不同的确定，通常采用如下公式。

1) 可由下式计算：

$$w_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right), \quad i=1, 2, \dots, n
 \tag{7}$$

式中，模糊语义量化算子 Q 由下式给出：

$$Q(z) = \begin{cases} 0, & z < c \\ \frac{z-c}{d-c}, & c \leq z \leq d \\ 1, & z > d \end{cases}
 \tag{8}$$

其中 $c, d, z \in [0, 1]$ ，模糊语义取值与量化标准关系[11]，见表 1。

Table 1. The corresponding standard of fuzzy semantic quantization standard

表 1. 模糊语义量化标准的对应标准

模糊语义量化标准	大多数	至少半数	尽可能多
(c, d) 的取值	(0.3,0.8)	(0.0,0.5)	(0.5,1.0)

w 位置加权向量可由组合数确定，计算公式如下：

$$w_{i+1} = \frac{C_{n-1}^i}{2^{n-1}}, \quad i=0, 1, \dots, n-1
 \tag{9}$$

定理 2.2 设 $g_i = \left\langle [l_{\theta_i}, l_{\eta_i}], (l_{\alpha_i}^u, l_{\beta_i}^v) \right\rangle (i=1, 2, \dots, n)$ 是一组模糊直觉不确定语言术语, 则公式(6)的计算结果仍为模糊直觉不确定语言术语, 且有:

$$\begin{aligned} FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n) &= w_1 g_{\sigma_1} \hat{\oplus} w_2 g_{\sigma_2} \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} w_n g_{\sigma_n} \\ &= \left\langle \left[l_{\sum_{i=1}^n w_i \theta_{\sigma_i}}, l_{\sum_{i=1}^n w_i \eta_{\sigma_i}} \right], \left(l_{2\tau - \prod_{i=1}^n (2\tau - \alpha_{\sigma_i})^{w_i}}, l_{\prod_{i=1}^n \beta_{\sigma_i}^{w_i}} \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (10)$$

容易证明算子具有如下性质:

性质 2.1 (单调性) 设两组模糊直觉不确定语言术语为 $(g'_1, g'_2, \dots, g'_n)$ 和 (g_1, g_2, \dots, g_n) , 在权重向量不变的情况下, 若对所有 $i (i=1, 2, \dots, n)$, 有 $g'_i \succeq g_i$ 成立, 则:

$$FIULTOWA_w(g'_1, g'_2, \dots, g'_n) \succeq FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

性质 2.2 (幂等性) 设模糊直觉不确定语言术语 $g_i = g, i=1, 2, \dots, n$, 则:

$$FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n) = g$$

性质 2.3 (有界性) 设一组模糊直觉不确定语言术语为 (g_1, g_2, \dots, g_n) , 则有:

$$\min(g_1, g_2, \dots, g_n) \preceq FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n) \preceq \max(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

性质 2.4 (置换不变性) 设 $(g'_1, g'_2, \dots, g'_n)$ 是 (g_1, g_2, \dots, g_n) 的任一置换, 即:

$$FIULTOWA_w(g'_1, g'_2, \dots, g'_n) = FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

由于 $FIULTWA$ 算子和 $FIULTOWA$ 算子分别考虑了每个语言标度的自身重要性程度和语言标度所在位置进行的赋权, 二者均具片面性。为此, 下面将引进模糊直觉不确定混合平均算子, 对上述两算子进行改进。

定义 2.10 设 $g_i = \left\langle [l_{\theta_i}, l_{\eta_i}], (l_{\alpha_i}^u, l_{\beta_i}^v) \right\rangle (i=1, 2, \dots, n)$ 是一组模糊直觉不确定语言术语, 若 $FIULTHA: \tilde{L}^n \rightarrow \tilde{L}$, 满足:

$$FIULTHA_{w, \omega}(g_1, g_2, \dots, g_n) = w_1 b_{\sigma_1} \hat{\oplus} w_2 b_{\sigma_2} \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} w_n b_{\sigma_n} \quad (11)$$

其中, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 是与 $FIULTHA$ 相关联的权重向量, 且 $w_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n w_i = 1$; b_{σ_i} 为加权模糊直觉不确定语言术语 $b_k (k=1, 2, \dots, n)$ 中第 k 大元素, $b_{\sigma_i} = n\omega_k g_k (k=1, 2, \dots, n)$, n 为平衡因子, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 为 $g_k (k=1, 2, \dots, n)$ 的加权向量, 且 $w_k \in [0, 1], \sum_{k=1}^n \omega_k = 1$ 。则称, $FIULTHA$ 为模糊直觉不确定语言混合加权平均算子。

定理 2.3 设 $g_i = \left\langle [l_{\theta_i}, l_{\eta_i}], (l_{\alpha_i}^u, l_{\beta_i}^v) \right\rangle (i=1, 2, \dots, n)$ 是一组模糊直觉不确定语言术语, 则公式(11)的计算结果仍为模糊直觉不确定语言术语, 且有:

$$\begin{aligned} FIULTHA_{w, \omega}(g_1, g_2, \dots, g_n) &= w_1 b_{\sigma_1} \hat{\oplus} w_2 b_{\sigma_2} \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} w_n b_{\sigma_n} \\ &= \left\langle \left[l_{\sum_{i=1}^n w_i \theta_{b_{\sigma_i}}}, l_{\sum_{i=1}^n w_i \eta_{b_{\sigma_i}}} \right], \left(l_{2\tau - \prod_{i=1}^n (2\tau - \alpha_{b_{\sigma_i}})^{w_i}}, l_{\prod_{i=1}^n \beta_{b_{\sigma_i}}^{w_i}} \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

定理 2.5 $FIULTWA$ 算子和 $FIULTOWA$ 算子分别是 $FIULTHA$ 算子的特例。

3. 基于模糊直觉不确定语言术语的群决策方法

对于一个模糊直觉不确定语言 MAGDM 问题, 设 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 为属性集, $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 表示方案集, $E = \{E_1, E_2, \dots, E_p\}$ 表示群决策中的专家集; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)^T$ 表示决策专家的相应权重, 且 $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 表示属性权重向量, 且 $\omega_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ 。假设, 专家 E_k 给出决策方案 A_i 在属性 C_j 下的评价用模糊直觉不确定语言术语表示, 为 $R_{ij}^k = \left\langle \left[l_{\theta_{ij}^k}, l_{\eta_{ij}^k} \right], \left(l_{\alpha_{ij}^k}^u, l_{\beta_{ij}^k}^v \right) \right\rangle$, 其中, $l_{\theta_{ij}^k}, l_{\eta_{ij}^k}, l_{\alpha_{ij}^k}^u, l_{\beta_{ij}^k}^v$ 均为 $L = \{l_0, l_1, \dots, l_{2\tau}\}$ 中的元素 $\left[l_{\theta_{ij}^k}, l_{\eta_{ij}^k} \right] \in \tilde{L}$, \tilde{L} 为所有不确定语言术语构成的语言集, 且 $0 \leq \alpha_{ij}^k + \beta_{ij}^k \leq 2\tau$, ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p$)。即决策专家给出的决策矩阵为 $R^k = [R_{ij}^k]_{m \times n}$, 下面给出一种基于模糊直觉不确定语言的 MAGDM 方法步骤, 具体过程如下给出:

步骤 1 利用 FIULTWA 算子对决策矩阵 $R^k = [R_{ij}^k]_{m \times n}$ 中第 i 行的属性值进行集成, 从而得到专家 E_k 对方案 A_i 的综合属性值 R_i^k 。

$$R_i^k = FIULTWA_{\omega} (R_{i1}^k, R_{i2}^k, \dots, R_{in}^k)$$

步骤 2 利用 FIULTHA 算子对 p 位专家给出 A_i 的综合属性值 R_i^k 进行集成, 得到 A_i 的群体综合属性值 R_i 。

$$R_i = FIULTHA_{w, \lambda} (R_i^1, R_i^2, \dots, R_i^p) = w_1 b_{i\sigma_1} \hat{\otimes} w_2 b_{i\sigma_2} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} w_p b_{i\sigma_p}$$

其中, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 是与 FIULTHA 相关的加权向量, 由公式(7)计算得出, 且 $w_k \in [0, 1]$, $\sum_{k=1}^p w_k = 1$;

$b_{i\sigma_k}$ 为加权模糊直觉不确定语言术语 b_{ik} 中第 k 大元素 ($k = 1, 2, \dots, p$), $b_{ik} = p\lambda_k R_i^k$ 。

步骤 3 利用定义 2.4, 定义 2.5, 定义 2.6 分别计算 R_i 的期望值 $Ec(R_i)$ 、记分函数值 $Sc(R_i)$ 和精确函数值 $Hc(R_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ 。

步骤 4 根据定义 2.7, 对 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 进行排序, 从而得到最佳方案。

4. 算例分析

为了响应国家最新环保政策, 广西某燃煤电厂需要进行改造, 要达到在基准氧含量为 6% 时 SO_2 的排放量在 35 gm/Nm^3 以下的国家标准。但是用于烟气脱硫的设施要对原有机组的系统进行较大的改造, 同时新设施的维护费用较高。电厂在选择合适的脱硫技术方案时, 既要保障企业的利润, 更要满足国家的环保要求。该燃煤电厂根据自身的机组情况, 以及企业可以投入的资金, 参考其他省市的脱硫方案, 制定了四种备选的脱硫方案: 喷雾干燥法脱硫、石膏湿法脱硫、氨法脱硫、循环流化床法脱硫。这四种方案各有优缺点, 为了选出最合适的脱硫方案, 该燃煤电厂咨询了由多位脱硫专家、生产部工程师和咨询顾问构成的 3 个专家组 $\{E_1, E_2, E_3\}$ 。通过对燃煤参数的调研以及对该电厂汽包锅炉系统构造的调研, 专家组根据 Delphi Method 原则, 以及评价指标体系的构造原则, 最终确定燃煤电厂脱硫环保改造工程的 4 项评价指标分别为: 技术性、安全性、经济性和环保性。专家组采用语言术语集 $L = \{l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\} = \{\text{很低, 低, 稍微低, 一般, 稍高, 高, 很高}\}$ 的表达形式, 对该燃煤电厂机组的脱硫环保改造工程的四个备选方案进行评价, 其结果见表 2。其中, 3 个专家组的权重为 $\lambda = (0.4, 0.35, 0.25)$, 备选方案分别用 A_1 表示喷雾干燥法脱硫, A_2 表示石膏湿法脱硫, A_3 表示氨法脱硫, A_4 表示氨法脱硫。评价体系为分别用 C_1 表示技术性, C_2 表示安全性, C_3 表示经济性, C_4 表示环保性。

Table 2. The results of the evaluation of the alternatives presented by the expert group
表 2. 专家组给出的备选方案的评价结果

		E_1	E_2	E_3
C_1	A_1	$\langle [I_5, I_6], (I_0^u, I_4^v) \rangle$	$\langle [I_4, I_4], (I_0^u, I_4^v) \rangle$	$\langle [I_5, I_5], (I_0^u, I_3^v) \rangle$
	A_2	$\langle [I_4, I_5], (I_2^u, I_3^v) \rangle$	$\langle [I_5, I_6], (I_2^u, I_3^v) \rangle$	$\langle [I_4, I_5], (I_0^u, I_4^v) \rangle$
	A_3	$\langle [I_3, I_4], (I_0^u, I_4^v) \rangle$	$\langle [I_4, I_5], (I_0^u, I_3^v) \rangle$	$\langle [I_4, I_4], (I_0^u, I_4^v) \rangle$
	A_4	$\langle [I_6, I_6], (I_3^u, I_2^v) \rangle$	$\langle [I_5, I_5], (I_1^u, I_3^v) \rangle$	$\langle [I_5, I_4], (I_0^u, I_4^v) \rangle$
C_2	A_1	$\langle [I_2, I_3], (I_2^u, I_5^v) \rangle$	$\langle [I_3, I_4], (I_0^u, I_4^v) \rangle$	$\langle [I_3, I_4], (I_1^u, I_4^v) \rangle$
	A_2	$\langle [I_5, I_5], (I_2^u, I_3^v) \rangle$	$\langle [I_3, I_4], (I_1^u, I_3^v) \rangle$	$\langle [I_5, I_5], (I_1^u, I_3^v) \rangle$
	A_3	$\langle [I_4, I_4], (I_0^u, I_4^v) \rangle$	$\langle [I_4, I_4], (I_0^u, I_4^v) \rangle$	$\langle [I_5, I_5], (I_1^u, I_3^v) \rangle$
	A_4	$\langle [I_2, I_3], (I_0^u, I_5^v) \rangle$	$\langle [I_4, I_5], (I_2^u, I_3^v) \rangle$	$\langle [I_5, I_4], (I_0^u, I_4^v) \rangle$
C_3	A_1	$\langle [I_5, I_6], (I_3^u, I_3^v) \rangle$	$\langle [I_3, I_4], (I_0^u, I_5^v) \rangle$	$\langle [I_4, I_5], (I_2^u, I_3^v) \rangle$
	A_2	$\langle [I_3, I_4], (I_0^u, I_5^v) \rangle$	$\langle [I_4, I_5], (I_0^u, I_3^v) \rangle$	$\langle [I_2, I_3], (I_0^u, I_5^v) \rangle$
	A_3	$\langle [I_4, I_5], (I_1^u, I_4^v) \rangle$	$\langle [I_2, I_3], (I_2^u, I_3^v) \rangle$	$\langle [I_4, I_3], (I_0^u, I_5^v) \rangle$
	A_4	$\langle [I_3, I_4], (I_0^u, I_5^v) \rangle$	$\langle [I_2, I_3], (I_1^u, I_3^v) \rangle$	$\langle [I_4, I_5], (I_1^u, I_3^v) \rangle$
C_4	A_1	$\langle [I_3, I_4], (I_0^u, I_3^v) \rangle$	$\langle [I_6, I_6], (I_2^u, I_3^v) \rangle$	$\langle [I_4, I_4], (I_0^u, I_4^v) \rangle$
	A_2	$\langle [I_4, I_4], (I_3^u, I_5^v) \rangle$	$\langle [I_3, I_4], (I_0^u, I_4^v) \rangle$	$\langle [I_5, I_4], (I_2^u, I_3^v) \rangle$
	A_3	$\langle [I_4, I_5], (I_0^u, I_4^v) \rangle$	$\langle [I_3, I_4], (I_1^u, I_4^v) \rangle$	$\langle [I_4, I_4], (I_0^u, I_4^v) \rangle$
	A_4	$\langle [I_3, I_3], (I_1^u, I_5^v) \rangle$	$\langle [I_4, I_4], (I_0^u, I_5^v) \rangle$	$\langle [I_5, I_5], (I_2^u, I_3^v) \rangle$

决策步骤如下:

步骤 1 利用 $FIULTWA$ 算子对决策矩阵 $R^k = [R_{ij}^k]_{m \times n}$ 中第 i 行的属性值进行集成, 从而得到专家组 $\{E_1, E_2, E_3\}$ 对方案 A_i 的综合属性值 R_i^k , 结果见表 3。

Table 3. The comprehensive attribute value R_i^k of scheme A_i

表 3. 方案 A_i 的综合属性值 R_i^k

		E_1	E_2	E_3
A_1	$R_1^1 = \langle [I_{3.7}, I_{4.4}], (I_{1.4}^u, I_{3.0}^v) \rangle$	$R_1^2 = \langle [I_{4.1}, I_{4.5}], (I_{0.6}^u, I_{3.9}^v) \rangle$	$R_1^3 = \langle [I_{4.1}, I_{4.5}], (I_{0.7}^u, I_{5.5}^v) \rangle$	
A_2	$R_2^1 = \langle [I_{4.1}, I_{4.6}], (I_{2.0}^u, I_{3.3}^v) \rangle$	$R_2^2 = \langle [I_{3.8}, I_{4.8}], (I_{1.0}^u, I_{3.2}^v) \rangle$	$R_2^3 = \langle [I_{3.7}, I_{4.4}], (I_{1.1}^u, I_{3.6}^v) \rangle$	
A_3	$R_3^1 = \langle [I_{3.7}, I_{4.4}], (I_{0.2}^u, I_{4.0}^v) \rangle$	$R_3^2 = \langle [I_{3.4}, I_{4.1}], (I_{0.7}^u, I_{3.5}^v) \rangle$	$R_3^3 = \langle [I_{3.7}, I_{4.1}], (I_{0.3}^u, I_{5.9}^v) \rangle$	
A_4	$R_4^1 = \langle [I_{3.7}, I_{4.1}], (I_{1.4}^u, I_{3.0}^v) \rangle$	$R_4^2 = \langle [I_{4.0}, I_{4.4}], (I_{1.1}^u, I_{3.0}^v) \rangle$	$R_4^3 = \langle [I_{3.7}, I_{4.2}], (I_{0.7}^u, I_{3.5}^v) \rangle$	

步骤 2 利用 $FIULTHA$ 算子对 p 位专家给出 A_i 的综合属性值 R_i^k 进行集成, 得到 A_i 的群体综合属性值 R_i ; 其中, 位置向量 w 由公式(9)计算得到, $w = (0.25, 0.5, 0.25)$, 则得到:

$$R_1 = \langle [l_{3.9}, l_{4.4}] (l_{0.9}^u, l_{3.6}^v) \rangle, \quad R_2 = \langle [l_{3.8}, l_{4.6}] (l_{1.4}^u, l_{3.3}^v) \rangle$$

$$R_3 = \langle [l_{3.5}, l_{4.2}] (l_{0.5}^u, l_{3.7}^v) \rangle, \quad R_4 = \langle [l_{3.6}, l_{4.1}] (l_{1.3}^u, l_{3.1}^v) \rangle$$

步骤 3 利用定义 2.4, 计算 R_i 的期望值 $Ec(R_i)$, 得到:

$$Ec(R_1) = l_{1.2}, \quad Ec(R_2) = l_{1.5}$$

$$Ec(R_3) = l_{0.9}, \quad Ec(R_4) = l_{1.4}$$

步骤 4 根据定义 2.7, 对方案 $A_i (i=1,2,3,4)$ 进行排序, 得到 $A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$, 从而得到 A_2 最佳方案。

通过决策方法的计算得到最优方案为 A_2 方案, 也就是该燃煤电厂应该使用石膏湿法脱硫来改造机组。通过算例结果发现, A_4 的相关期望值跟 A_2 方案较为接近, 也可以把氨法脱硫方案作为备选改造方案, 或者把石膏湿法脱硫与氨法脱硫方案组合进行改造。该方法优势在于比较细致地考虑了评价的模糊性, 充分考虑了专家组在决策时候的心理因素, 即犹豫不确定性。最终能为燃煤电厂最终改造方案的决策提供合理且有意义的参考建议。

5. 结论

本文对直觉不确定语言术语集进行拓展, 定义了模糊直觉不确定语言术语, 进而推导出相应的算子以及决策方法。该方法能很好地刻画人类思维的模糊本质以及决策者的犹豫性。由于工程决策一直是工程管理方面的非常复杂的过程, 涉及内容繁多, 企业在做决策的同时容易丢失一些信息, 未考虑到一些主观的干扰因素, 因此本文提供的方法为工程决策提供了非常有益且合理的决策思路以及参考。

基金项目

2021 年度广西高校中青年教师科研基础能力提升项目, 基于决策者风险偏好的区间直觉模糊多属性决策方法研究, 2021KY1563。

参考文献

- [1] Sennaroglu, B. and Celebi, G.V. (2018) A Military Airport Location Selection by AHP Integrated PROMETHEE and VIKOR Methods. *Transportation Research*, **59**, 160-173. <https://doi.org/10.1016/j.trd.2017.12.022>
- [2] Ghasempour, R., Alhuyi, N., Ebrahimi, M., et al. (2019) Multi-Criteria Decision Making (MCDM) Approach for Selecting Solar Plants Site and Technology: A Review. *International Journal of Renewable Energy Development (IJRED)*, **8**, 15-25. <https://doi.org/10.14710/ijred.8.1.15-25>
- [3] 余长虹. 上跨电气化铁路防护方案比选及施工技术的应用[J]. 价值工程, 2019, 38(18): 214-216.
- [4] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information & Control*, **8**, 338-353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
- [5] Atanassov, K.T. (1986) Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets & Systems*, **20**, 87-96. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(86\)80034-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3)
- [6] Hu, J.J., Wang, H.H., Chen, Y. et al. (2015) Project Evaluation Method Using Non-Formatted Text Information Based on Multi-Granular Linguistic Labels. *Information Fusion*, **24**, 93-107. <https://doi.org/10.1016/j.inffus.2014.09.006>
- [7] Doukas, H., Tsiouisi, A., Marinakis, V. et al. (2014) Linguistic Multi-Criteria Decision Making for Energy and Environmental Corporate Policy. *Information Sciences*, **258**, 328-338. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.08.027>
- [8] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 215-219.
- [9] Herrera, F. and Martinez, L. (2001) The 2-Tuple Linguistic Computational Model Advantages of Its Linguistic Description, Accuracy and Consistency. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **9**, 33-48. <https://doi.org/10.1142/S0218488501000971>
- [10] Pang, J.F. and Liang, J.Y. (2012) Evaluation of the Results of Multi-Attribute Group Decision-Making with Linguistic Information. *Omega: The International Journal of Management Science*, **40**, 294-301. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2011.07.006>

-
- [11] 刘培德, 左甲. 梯形直觉模糊数集成算子及在决策中的应用研究[J]. 模糊系统与数学, 2012, 26(3): 127-138.
- [12] 王晓, 陈华友, 刘兮. 基于离差的区间二元语义集结算子的多属性群决策方法[J]. 管理学报, 2011, 8(2): 300-305.
- [13] 刘勇, 刘思峰. 基于区间二元语义的动态灰色关联群决策方法及应用[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(9): 1915-1922.
- [14] 张娜, 方志耕, 朱建军, 等. 基于等信息的区间二元语义多属性群决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(3): 404-409.
- [15] Xu, Y.J. and Da, Q.L. (2010) Standard and Mean Deviation Methods for Linguistic Group Decision Making and Their Applications. *Expert Systems with Applications*, **37**, 5905-5912. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.02.015>

附录

定理 2.1 证明: 当 $n=1$ 时, 结论直接由定义 4.3 和相关结果可得. 下面用数学归纳法证明式(4.2)

(1) 当 $n=2$ 时, 由于

$$\begin{aligned} \omega_1 g_1 &= \left\langle \left[l_{\omega_1 \theta_1}, l_{\omega_1 \eta_1} \right], \left(l_{2\tau} - (l_{2\tau} - l_{\alpha_1}^u)^{\omega_1}, (l_{\beta_1}^v)^{\omega_1} \right) \right\rangle = \left\langle \left[l_{\omega_1 \theta_1}, l_{\omega_1 \eta_1} \right], \left(l_{2\tau - (2\tau - \alpha_1)^{\omega_1}}^u, l_{\beta_1^{\omega_1}}^v \right) \right\rangle \\ \omega_2 g_2 &= \left\langle \left[l_{\omega_2 \theta_2}, l_{\omega_2 \eta_2} \right], \left(l_{2\tau} - (l_{2\tau} - l_{\alpha_2}^u)^{\omega_2}, (l_{\beta_2}^v)^{\omega_2} \right) \right\rangle = \left\langle \left[l_{\omega_2 \theta_2}, l_{\omega_2 \eta_2} \right], \left(l_{2\tau - (2\tau - \alpha_2)^{\omega_2}}^u, l_{\beta_2^{\omega_2}}^v \right) \right\rangle \end{aligned}$$

则,

$$\begin{aligned} FIULTWA_{\omega}(g_1, g_2) &= \left\langle \left[l_{\omega_1 \theta_1}, l_{\omega_1 \eta_1} \right], \left(l_{2\tau - (2\tau - \alpha_1)^{\omega_1}}^u, l_{\beta_1^{\omega_1}}^v \right) \right\rangle \hat{\oplus} \left\langle \left[l_{\omega_2 \theta_2}, l_{\omega_2 \eta_2} \right], \left(l_{2\tau - (2\tau - \alpha_2)^{\omega_2}}^u, l_{\beta_2^{\omega_2}}^v \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left[l_{\omega_1 \theta_1 + \omega_2 \theta_2}, l_{\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2} \right], \left(l_{2\tau - [2\tau - (2\tau - \alpha_1)^{\omega_1}] \times [2\tau - (2\tau - \alpha_2)^{\omega_2}]}^u, l_{\beta_1^{\omega_1} \times \beta_2^{\omega_2}}^v \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left[l_{\omega_1 \theta_1 + \omega_2 \theta_2}, l_{\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2} \right], \left(l_{2\tau - (2\tau - \alpha_1)^{\omega_1} (2\tau - \alpha_2)^{\omega_2}}^u, l_{\beta_1^{\omega_1} \beta_2^{\omega_2}}^v \right) \right\rangle \end{aligned}$$

(2) 当 $n=k$ 时, 式(5)成立, 即

$$\begin{aligned} FIULTWA_{\omega}(g_1, g_2, \dots, g_k) &= \omega_1 g_1 \hat{\oplus} \omega_2 g_2 \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} \omega_k g_k \\ &= \left\langle \left[l_{\sum_{i=1}^k \omega_i \theta_i}, l_{\sum_{i=1}^k \omega_i \eta_i} \right], \left(l_{2\tau - \prod_{i=1}^k (2\tau - \alpha_i)^{\omega_i}}^u, l_{\prod_{i=1}^k \beta_i^{\omega_i}}^v \right) \right\rangle \end{aligned}$$

则, 当 $n=k+1$ 时, 由定义 2.3 中的(1)和(3)可得

$$\begin{aligned} FIULTWA_{\omega}(g_1, g_2, \dots, g_k, g_{k+1}) &= \omega_1 g_1 \hat{\oplus} \omega_2 g_2 \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} \omega_k g_k \hat{\oplus} \omega_{k+1} g_{k+1} \\ &= \left\langle \left[l_{\sum_{i=1}^k \omega_i \theta_i}, l_{\sum_{i=1}^k \omega_i \eta_i} \right], \left(l_{2\tau - \prod_{i=1}^k (2\tau - \alpha_i)^{\omega_i}}^u, l_{\prod_{i=1}^k \beta_i^{\omega_i}}^v \right) \right\rangle \hat{\oplus} \left\langle \left[l_{\omega_{k+1} \theta_{k+1}}, l_{\omega_{k+1} \eta_{k+1}} \right], \left(l_{2\tau - (2\tau - \alpha_{k+1})^{\omega_{k+1}}}^u, l_{\beta_{k+1}^{\omega_{k+1}}}^v \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left[l_{\sum_{i=1}^k \omega_i \theta_i + \omega_{k+1} \theta_{k+1}}, l_{\sum_{i=1}^k \omega_i \eta_i + \omega_{k+1} \eta_{k+1}} \right], \left(l_{2\tau - [2\tau - (2\tau - \prod_{i=1}^k (2\tau - \alpha_i)^{\omega_i})] \times [2\tau - (2\tau - (2\tau - \alpha_{k+1})^{\omega_{k+1}})]}^u, l_{\prod_{i=1}^k \beta_i^{\omega_i} \times \beta_{k+1}^{\omega_{k+1}}}^v \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left[l_{\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i \theta_i}, l_{\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i \eta_i} \right], \left(l_{2\tau - \prod_{i=1}^{k+1} (2\tau - \alpha_i)^{\omega_i}}^u, l_{\prod_{i=1}^{k+1} \beta_i^{\omega_i}}^v \right) \right\rangle \end{aligned}$$

即, 当 $n=k+1$ 时, 式(5)也成立, 综合上述步骤(1)和(2)可知, 对一切 n , 式(5)均成立。

定理 2.2 和 **定理 2.3** 的证明过程与 **定理 2.1** 的类似, 此处从略。

性质 2.1 证明: 因为 $FIULTOWA_w(g'_1, g'_2, \dots, g'_n) = w_1 g'_{\sigma_1} \hat{\oplus} w_2 g'_{\sigma_2} \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} w_n g'_{\sigma_n}$,

$FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n) = w_1 g_{\sigma_1} \hat{\oplus} w_2 g_{\sigma_2} \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} w_n g_{\sigma_n}$, 对所有的 i , 有 $g'_i \succeq g_i$, 也就有 $g'_{\sigma_i} \succeq g_{\sigma_i}$, 所以 $FIULTOWA_w(g'_1, g'_2, \dots, g'_n) \succeq FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n)$ 。

性质 2.2 证明:

$$\begin{aligned}
FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n) &= w_1 g_{\sigma_1} \hat{\oplus} w_2 g_{\sigma_2} \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} w_n g_{\sigma_n} \\
&= w_1 g \hat{\oplus} w_2 g \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} w_n g \\
&= (w_1 + w_2 + \dots + w_n) g \\
&= \sum_{j=1}^n w_j g = g \sum_{j=1}^n w_j = g
\end{aligned}$$

性质 2.3 证明: 假设 $a = \min(g_1, g_2, \dots, g_n)$, $b = \max(g_1, g_2, \dots, g_n)$, 由于对于所有的 i , 有 $a \leq g_i$, 根据性质 1, 有 $FIULTOWA_w(a, a, \dots, a) \leq FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n)$ 。根据性质 2, 有 $FIULTOWA_w(a, a, \dots, a) = a$, 所以 $a \leq FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n)$ 。

同理, $FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n) \leq b$;

故 $a \leq FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n) \leq b$;

即 $\min(g_1, g_2, \dots, g_n) \leq FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n) \leq \max(g_1, g_2, \dots, g_n)$ 成立。

性质 2.4 证明: 因为 $FIULTOWA_w(g'_1, g'_2, \dots, g'_n) = w_1 g'_{\sigma_1} \hat{\oplus} w_2 g'_{\sigma_2} \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} w_n g'_{\sigma_n}$, $FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n) = w_1 g_{\sigma_1} \hat{\oplus} w_2 g_{\sigma_2} \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} w_n g_{\sigma_n}$, 而 $(g'_1, g'_2, \dots, g'_n)$ 是 (g_1, g_2, \dots, g_n) 的任一置换, 有 $g_{\sigma_i} = g'_{\sigma'_i}$, 所以, $FIULTOWA_w(g'_1, g'_2, \dots, g'_n) = FIULTOWA_w(g_1, g_2, \dots, g_n)$ 。