

双正则可二部图的反魔幻标号

金靖翔

江苏师范大学数学与统计学院, 江苏 徐州

收稿日期: 2023年4月24日; 录用日期: 2023年6月19日; 发布日期: 2023年6月26日

摘要

一个简单图 G 的反魔幻标号是一个双射 $\varphi: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$, 使得对于 G 中任意两点 u, v , 有 $\sum_{e \in E(u)} \varphi(e) \neq \sum_{e \in E(v)} \varphi(e)$ 。如果一个图具有反魔幻标号, 那么这个图就是反魔幻的。在1990年, Hartsfield和Ringel定义了图的反魔幻标号, 并且猜想除 K_2 以外的每一个连通图都是反魔幻的。此猜想自1990年被提出以来受到广泛关注, 但仍未完全解决。本文从完全图入手, 设计出一种新的标号方式区分了完全图中的各点并且可以得到各点具体的标号和, 并且运用这种标号方式将猜想推广到了一类特殊图上——双正则可二部图, 证明了每一个双正则可二部图都是反魔幻的。

关键词

图标号, 反魔幻标号, 双正则可二部图

Antimagic Labeling of Biregular Cobipartite Graph

Jingxiang Jin

School of Mathematics and Statistics, Jiangsu Normal University, Xuzhou Jiangsu

Received: Apr. 24th, 2023; accepted: Jun. 19th, 2023; published: Jun. 26th, 2023

Abstract

An antimagic labeling of a simple graph G is a bijection $\varphi: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ such that $\sum_{e \in E(u)} \varphi(e) \neq \sum_{e \in E(v)} \varphi(e)$ for any two vertices u, v in G . In 1990, Hartsfield and Ringel defined the antimagic labeling of graphs and every connected graph other than K_2 is antimagic. This conjecture has received a lot of attention since it was proposed in 1990, but it is still not completely

solved. In this paper, we start from complete graphs and devise a new labeling method to distinguish the vertices in complete graphs and obtain the specific sum of the labels of each vertex, and use this labeling method to extend the conjecture to a special class of graphs, the biregular cobipartite graphs, and prove that every biregular cobipartite graph is antimagic.

Keywords

Graph Labeling, Antimagic Labeling, Biregular Cobipartite Graph

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文所考虑的图都是简单、连通、无向的有限图。

对于一个简单图 G , 设 $G = (V(G), E(G))$ 。设 m 为正整数, $|E(G)| = m$, 图 G 的标号是图的边集到整数集的一个双射 $\varphi: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ 。对于 $V(G)$ 中的一个顶点 v , v 的标号是和与顶点 v 相关联的边的标号之和, 用 $\varphi(v)$ 表示。如果对于 $V(G)$ 中的任意两个不同的顶点 u 和 v , 都有 $\varphi(u) \neq \varphi(v)$, 那么就称 G 的标号是反魔幻的。如果一个图具有反魔幻标号, 我们就称这个图是反魔幻的。

1990 年, Hartsfield 和 Ringel [1] 定义了图的反魔幻标号, 并提出了反魔幻标号猜想, 他们还给出了一些反魔法图, 包括至少有 3 个顶点的路图、圈图、至少有 3 个顶点的星图、轮图、完全图等, 并在同一篇文章中猜想每棵至少有三个顶点的树图都是反魔幻的。

猜想 1. (反魔幻标号猜想[1]) 除 K_2 以外的每一个连通图都是反魔幻的。

猜想 2. ([1]) 除 K_2 以外的每一个树图都是反魔幻的。

这两个猜想提出后, 引起了众多学者的关注并且通过研究得到了许多有趣的反魔幻图。对于树图, Kaplan, Lev Roditty [2] 证明了最多只有一个二度点的树是反魔幻的, Liang, Wong 和 Zhu [3] 将结果扩展到了有更多二度点的树图上。对于一些特殊类型的树图, 在 [4] [5] [6] [7] 中, 每个完全 m 叉树, 毛虫图, 蜘蛛图, 递推的二叉树和斐波那契树都被证明是反魔幻的。在 [8] [9] [10] [11] [12] 中, 所有的正则图都被证明是反魔幻的。反魔幻标号猜想其他的部分结果可以在 [13]-[18] 中被找到。

我们称一个二部图 $G = (V_1, V_2, E)$ 是双正则的, 若同一顶点集中的度也相同; 称一个简单图 G 是可二部的, 若其顶点集 $V(G)$ 存在划分 $X \cup Y$, 使得 X 和 Y 都是团(团是一个两两之间有边的顶点集合, 类似于完全图)。对于一个可二部的图 G , 若其顶点集 $V(G)$ 划分为 X 和 Y , 若 $E[X, Y]$ 的导出子图是一个双正则二部图, 则称图 G 是一个双正则可二部图。

寻找一个双正则可二部图的反魔幻标号, 重点是对中间的双正则二部图以及两端的团的处理。本文从完全图入手, 设计出一种新的标号方式区分了完全图的各点并且可以得到各点具体的标号(具体标号处理方式详见第二部分), 并且通过一个引理保证在双正则二部图中能找到一个匹配, 引理的证明可以在 [19] 被找到。另一方面, 通过对双正则可二部图两个顶点集 X 与 Y 中点的数量跟双正则二部图中点的度建立联系, 将所有的双正则可二部图分为三类。通过考虑与分析这三种类型的双正则可二部图, 最终找到双正则可二部图的反魔幻标号并得出以下定理(具体证明过程将在第三部分给出)。

定理 3. 每一个双正则可二部图都是反魔幻的。

2. 符号及引理

给出一个图 G 和 $E(G)$ 上的标号, 对于 $V(G)$ 中的一个顶点 v , $d_G(v)$ 表示 v 在 G 中的度, v 的标号是和与顶点 v 所有相关联的边的标号之和, 用 $\varphi(v)$ 表示. 对于 G 的一个子图 H , 我们用 $\varphi_H(v)$ 表示 v 在 H 中的关联边的标号之和. 对于任何两个整数 a 和 b , $[a, b] = \{i \in \mathbb{Z} | a \leq i \leq b\}$.

我们将需要以下引理来证明定理 3.

引理 4. 设 K_m 是一个完全图, $V(K_m) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, 当使用 $\left[1 + h, \frac{m(m-1)}{2} + h\right]$ 进行标号时, 存在一种标号使得以下结论成立, 其中 h 和 m 都是正整数, 并且 $h \geq 0$, $m \geq 3$.

$$1) \varphi(x_1) < \varphi(x_2) \cdots < \varphi(x_m).$$

$$2) \varphi(x_k) = \left(k - \frac{1}{2}\right)m^2 - \left(k^2 + k - h - \frac{3}{2}\right)m + \frac{k^3 + 3k^2 - 4k}{3} - h.$$

证明: 设 $e_{i,j} = x_i x_j$, 其中 $i < j \leq m$.

当 $h = 0$ 时, 我们定义一个标号 $\varphi: E(K_m) \rightarrow \left[1, \frac{m(m-1)}{2}\right]$ 如下:

$$\varphi(e_{i,j}) = (i-1)m + j - \frac{i(i+1)}{2}, \quad \forall e_{i,j} \in E(K_m)$$

因此我们有,

$$\begin{aligned} \varphi(x_k) &= \varphi(e_{1,k}) + \varphi(e_{2,k}) + \cdots + \varphi(e_{k-1,k}) + \varphi(e_{k,k+1}) + \cdots + \varphi(e_{k,m}) \\ &= k(k-1) + \sum_{i=1}^{k-1} \left[(i-1)m - \frac{i(i+1)}{2} \right] + (m-k) \left[(k-1)m - \frac{k(k+1)}{2} \right] + \frac{m(m+1) - k(k+1)}{2} \\ &= k(k-1) + \frac{(k-1)(k-2)m}{2} - \frac{(k-1)k(k+1)}{6} + \left[(k-1)m^2 - \frac{k(k+1)}{2}m - k(k-1)m + \frac{(k^2)(k+1)}{2} \right] \\ &\quad + \frac{m(m+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \left(k - 1 + \frac{1}{2}\right)m^2 + \left[\frac{(k-1)(k-2)}{2} - \left(\frac{3}{2}k - \frac{1}{2}\right)k + \frac{1}{2} \right]m + \left[k(k-1) - \frac{k^3 - k}{6} + \frac{k^2(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} \right] \\ &= \left(k - \frac{1}{2}\right)m^2 - \left(k^2 + k - \frac{3}{2}\right)m + \frac{k^3 + 3k^2 - 4k}{3} \end{aligned}$$

下一步我们证明 $\varphi(x_k)$ 的单调性:

$$\begin{aligned} &\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) \\ &= \left(k + 1 - \frac{1}{2}\right)m^2 - \left((k+1)^2 + k + 1 - \frac{3}{2}\right)m + \frac{(k+1)^3 + 3(k+1)^2 - 4(k+1)}{3} \\ &\quad - \left(k - \frac{1}{2}\right)m^2 - \left(k^2 + k - \frac{3}{2}\right)m + \frac{k^3 + 3k^2 - 4k}{3} \\ &= m^2 - 2(k+1)m + k^2 + 3k \\ &= k^2 + (3-2m)k + m^2 - 2m \end{aligned}$$

由于 $m \geq k \geq 1$ 并且 $m \geq 3$, 因此 $\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) > 0$ 是显然的.

换句话说, 当 $h = 0$ 时, $\varphi(x_1) < \varphi(x_2) \cdots < \varphi(x_m)$ 成立.

当 $h > 0$ ，我们基于 φ 定义一个标号，如下：

$$\varphi': E(K_m) \rightarrow \left[1+h, \frac{m(m-1)}{2}+h \right], \quad \forall e_{i,j} \in E(K_m)$$

易得 $\varphi'(e_{i,j}) = \varphi(e_{i,j}) + h$ 。

因此以下结论仍成立：

$$\varphi'(x_1) < \varphi'(x_2) \cdots < \varphi'(x_m)$$

并且，

$$\begin{aligned} \varphi'(x_k) &= \varphi(x_k) + (m-1)h \\ &= \left(k - \frac{1}{2}\right)m^2 - \left(k^2 + k - \frac{3}{2}\right)m + \frac{k^3 + 3k^2 - 4k}{3} + (m-1)h \\ &= \left(k - \frac{1}{2}\right)m^2 - \left(k^2 + k - h - \frac{3}{2}\right)m + \frac{k^3 + 3k^2 - 4k}{3} - h \end{aligned}$$

综上所述，引理 4 得证。

我们需要下面这个引理来保证在二部图中能找到一个匹配，引理的证明可以在[19]中被找到。

引理 5 ([19])。设 H 是一个二部图，顶点集是 X 和 Y 。如果在 X 中不存在孤立点，并且对于每一条边 xy 都有 $d_H(x) \geq d_H(y)$ ，其中 $x \in X$ ， $y \in Y$ ，那么 H 中可以找到一个饱和 X 中所有点的匹配。

3. 定理 3 证明

证明： 设 G 是一个双正则可二部图，顶点集 $V(G)$ 划分为 $X \cup Y$ ， $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ ， $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$ ($p, q > 0$)， $E[X, Y]$ 的导出子图是一个双正则二部图，记作 B 。假设 $d_B(x_i) = s$ ， $d_B(y_j) = m$ ，其中 $x_i \in X$ ， $y_j \in Y$ 。 X 和 Y 各自的导出子图都是团，我们分别记作 K_x ， K_y 。因此， $|E(B)| = ps = qm$ ， $|E(G)| = ps + \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2}$ 。

1) $p = q$

当 $p = q$ 时， G 是一个正则图，在[8] [9] [10] [11] [12]中，所有的正则图已经被证明是反魔幻的，因此我们只需要考虑 $p \neq q$ 的情况。

2) $p \neq q$

当 $p \neq q$ 时，不妨假设 $p > q$ 。

情况(1): $p - q \geq m - 1$

现在我们按照如下步骤来构造图 G 的反魔幻标号。

步骤 1: 将 $[1, qm]$ 分配给 B 的所有边。

由于 $p > q$ 并且 $ps = qm$ ，可得 $d_B(y_j) = m > d_B(x_i) = s$ 。通过引理 5，我们可以知道 B 中存在一个匹配 M 使 Y 中所有的点均饱和。不妨设这个匹配为：

$$M = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$$

注意到 M 中的所有边同时关联了 X 中的 q 个点，对于 X 中未饱和的 $p - q$ 点，从 $E[X, Y]$ 中各取一条它们的关联边构成边集 M^* ，记作：

$$M^* = \{e_{q+1}, e_{q+2}, \dots, e_p\}$$

换句话说， X 中的每个顶点都与 $M \cup M^*$ 的一条且仅有一条边相关联。

我们用 $[q(m-1)+1, qm]$ 任意来标 M 中的边, 用 $[p(m-1)+1, q(m-1)]$ 任意来标 M^* 中的边, 然后根据这 p 条边的标号大小顺序, 对 X 中的所有顶点 x_i 进行重新编号, 使得 x_i 在 $M \cup M^*$ 中的关联边标号越大, i 就越大。

对于 x_k (其中 $k \in [1, p]$) 在 B 中关联的剩余未被标号的 $s-1$ 条边, 用以下标号来标。

$$k, k+p, k+2p, \dots, k+(s-2)p$$

通过标号方式的步骤 1 (一个例子可见图 1), 我们可以得到

$$\varphi_B(x_1) < \varphi_B(x_2) \cdots < \varphi_B(x_p) \tag{1}$$

并且

$$\varphi_B(x_i) = 1 + 1 + p + 1 + 2p + \dots + 1 + (s-1)p = \sum_{i=0}^{s-1} (1 + ip) \tag{2}$$

对于点 $v \in Y$, 接下来我们考虑 $\varphi_B(v)$, 不妨假设,

$$\varphi_B(y_1) \leq \varphi_B(y_2) \cdots \leq \varphi_B(y_q) \tag{3}$$

其中 $\{y_1, y_2, \dots, y_q\}$ 是依据 y_j ($j \in [1, q]$) 的关联边的标号和大小顺序重新编号的顶点集。另一方面, 通过步骤 1 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \varphi_B(y_q) &\leq mq + (m-1)q + (m-1)q - 1 + (m-1)q - 2 + \dots + (m-1)q - (m-2) \\ &= mq + \sum_{i=0}^{m-2} [(m-1)q - i] \end{aligned} \tag{4}$$

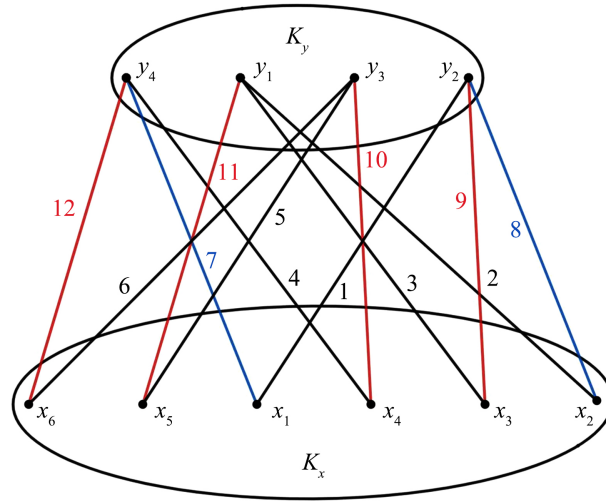


Figure 1. When $p - q \geq m - 1$, an example of a biregular cobipartite graph
图 1. $p - q \geq m - 1$ 时, 一个双正则可二部图的例子

步骤 2: 将 $\left[qm + 1, qm + \frac{q(q-1)}{2} \right]$ 分配给 K_y 的所有边。

在团 K_y 上应用引理 4, 我们得到了

$$\varphi_K(y_1) < \varphi_K(y_2) \cdots < \varphi_K(y_q) \tag{5}$$

和

$$\varphi_K(y_q) = \frac{q^3}{3} + \frac{\left(m - \frac{1}{2}\right)q^2}{3} \quad (6)$$

步骤 3: 将 $\left[qm + \frac{q(q-1)}{2} + 1, qm + \frac{q(q-1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2}\right]$ 分配给 K_x 的所有边。

在团 K_x 上应用引理 4, 可得:

$$\varphi_K(x_1) < \varphi_K(x_2) \cdots < \varphi_K(x_p) \quad (7)$$

并且

$$\varphi_K(x_1) = (p-1) \left(ps - \frac{q^2 - q + p}{2} \right) \quad (8)$$

由于 $\varphi = \varphi_K + \varphi_B$, 因此通过(1), (3), (5)和(7)可得

$$\varphi(y_1) < \varphi(y_2) \cdots < \varphi(y_q)$$

并且

$$\varphi(x_1) < \varphi(x_2) \cdots < \varphi(x_p)$$

如果 $\varphi(x_1) > \varphi(y_q)$ 成立, 那么 $p - q \geq m - 1$ 的情况就被证明完毕。接下来我们证明 $\varphi(x_1) > \varphi(y_q)$ 。根据(2), (4), (6)和(8), 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) - \varphi(y_q) &= \varphi_B(x_1) + \varphi_K(x_1) - \varphi_B(y_q) - \varphi_K(y_q) \\ &\geq \sum_{i=0}^{s-1} [(1+ip)] + (p-1) \left(ps - \frac{q^2 - q + p}{2} \right) - \left[\frac{q^3}{3} + \left(m - \frac{1}{2}\right)q^2 + \left(\frac{1}{6} - m\right)q + mq \right] + \sum_{i=0}^{m-2} [(m-1)q - i] \\ &\geq (p-q-1)ps + \frac{q^3}{6} - \frac{q}{6} + \frac{pq}{2} + s + \frac{s(s-1)p}{2} - (m-1)^2 q + \frac{(m-2)(m-1)}{2} \\ &\geq (p-q-1)ps + \frac{ps^2}{2} + s + \frac{q^3}{6} - \frac{q}{6} - (m^2 - 2m + 1)q + \frac{(m-2)(m-1)}{2} \\ &> \left(p - q + \frac{s}{2} - m + 1 \right) ps + \frac{q^3}{6} - \frac{7q}{6} + \frac{(m-2)(m-1)}{2} \end{aligned}$$

已知 $p - q \geq m - 1$, 因此 $p - q + \frac{s}{2} - m + 1 \geq 0$ 是显然。当 $q \geq 3$ 时, 我们可得:

$$\varphi(x_1) - \varphi(y_q) > 0$$

而当 $q = 1$ 时, 依据前面提到的标号方式, 我们可以轻易得到:

$$1) \varphi(y_q) = \varphi(y_1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2}.$$

$$2) \varphi(x_1) = 1 + 1 + p + 2 + p + \cdots + (p-1) + p = \frac{p(p+1)}{2} + (p-2)p + 1.$$

显然, $\varphi(x_1) > \varphi(y_q)$ 。

当 $q = 2$ 时, 可得 $m \leq p - 1$ 。若 $m < p - 1$, 依据前面提到的标号方式易得。

$\varphi(x_1) > \varphi(y_q)$ 。若 $m = p - 1$, 可得

$$1) \varphi(y_q) = 2p - 2 + 2p - 4 + 2p - 5 + \dots + 2p - (p - 1 - 2) + 2p - 1 = \frac{3}{2}p^2 - \frac{3}{2}p + 2.$$

$$2) \varphi(x_1) = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + p - 1 + (p - 1)(2p - 1) = \frac{5}{2}p^2 - \frac{7}{2}p + 2.$$

由于 $p > q = 2$, 因此 $\varphi(x_1) > \varphi(y_q)$ 显然。

情况(1)证明完毕。

情况(2): $p - q \leq m - 1$

接下来我们通过以下几个步骤来构造 $p - q \leq m - 1$ 时 G 的反魔幻标号。

步骤 1: 将 $\left[\frac{q(q-1)}{2} + 1, \frac{q(q-1)}{2} + mq \right]$ 分配给 B 的所有边。

由于 $p > q$ 并且 $ps = qm$, 可得 $d_B(y_j) = m > d_B(x_i) = s$ 。通过引理(5), 我们可以知道 B 中存在一个匹配 M 使 Y 中所有的点均饱和。类比前文, 不妨设这个匹配:

$$M = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$$

M 中的所有边同时关联了 X 中的 q 个点, 对于 X 中这未饱和的 $p - q$ 点, 同样从 $E[X, Y]$ 中各取一条它们的关联边构成边集 M^* , 记作:

$$M^* = \{e_{q+1}, e_{q+2}, \dots, e_p\}$$

换句话说, X 中的每个顶点都与 $M \cup M^*$ 的一条且仅有一条边相关联。

接下来, 我们用 $\left[\frac{q(q-1)}{2} + q(m-1) + 1, \frac{q(q-1)}{2} + qm \right]$ 任意地来标 M 中的各边, 用

$\left[\frac{q(q-1)}{2} + p(s-1) + 1, \frac{q(q-1)}{2} + q(m-1) \right]$ 任意来标 M^* 中的边, 然后根据这 p 条边的标号大小顺序, 对 X 中与 p 边关联的所有顶点 x_i 进行重新编号, 使得 x_i 在 $M \cup M^*$ 中的关联边标号越大, i 就越大。

对于 x_k (其中 $k \in [1, p]$) 在 B 中关联的剩余未被标号的 $s - 1$ 条边, 用以下标号来标:

$$k + \frac{q(q-1)}{2}, k + 1p + \frac{q(q-1)}{2}, k + 2p + \frac{q(q-1)}{2}, \dots, k + (s-2)p + \frac{q(q-1)}{2}.$$

通过步骤 1, 我们可以得到:

$$\varphi_B(x_1) < \varphi_B(x_2) \dots < \varphi_B(x_p) \tag{9}$$

并且

$$\varphi_B(x_1) = 1 + 1 + p + 1 + 2p + \dots + 1 + (s-1)p + \frac{sq(q-1)}{2} = \sum_{i=0}^{s-1} (1 + ip) + \frac{sq(q-1)}{2} \tag{10}$$

对于点 $v \in Y$, 接下来我们考虑 $\varphi_B(v)$, 不妨假设

$$\varphi_B(y_1) \leq \varphi_B(y_2) \dots \leq \varphi_B(y_q) \tag{11}$$

其中 $\{y_1, y_2, \dots, y_q\}$ 是依据 y_j ($j \in [1, q]$) 的关联边的标号和大小顺序重新编号的顶点集。另一方面, 通过步骤 1 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \varphi_B(y_q) &\leq (m-1)q + (m-1)q - 1 + \dots + (m-1)q - (m-2) + mq + \frac{mq(q-1)}{2} \\ &= mq + \frac{mq(q-1)}{2} + \sum_{i=0}^{m-2} [(m-1)q - i] \end{aligned} \tag{12}$$

步骤 2: 将 $\left[1, \frac{q(q-1)}{2}\right]$ 分配给 K_y 的所有边。

在团 K_y 上应用引理 4, 我们得到了

$$\varphi_K(y_1) < \varphi_K(y_2) \cdots < \varphi_K(y_q) \tag{13}$$

并且

$$\varphi_K(y_q) = \frac{q^3}{3} - \frac{q^2}{2} + \frac{q}{6} \tag{14}$$

步骤 3: 将 $\left[mq + \frac{q(q-1)}{2} + 1, mq + \frac{q(q-1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2}\right]$ 分配给 K_x 的所有边。

在团 K_x 上应用引理 4, 我们得到了

$$\varphi_K(x_1) < \varphi_K(x_2) \cdots < \varphi_K(x_p) \tag{15}$$

并且

$$\varphi_K(x_1) = \frac{p(p-1)}{2} + (p-1) \left(mq + \frac{q^2 - q}{2} \right) \tag{16}$$

由于 $\varphi = \varphi_K + \varphi_B$, 再根据(9), (11), (13)和(15)可得:

$$\varphi(y_1) < \varphi(y_2) \cdots < \varphi(y_q)$$

并且

$$\varphi(x_1) < \varphi(x_2) \cdots < \varphi(x_p)$$

若 $\varphi(x_1) > \varphi(y_q)$ 成立, 那么情形(2)则被证明。下面证明 $\varphi(x_1) > \varphi(y_q)$ 。首先, 根据(12)和(16), 可得:

$$\begin{aligned} & \varphi_K(x_1) - \varphi_B(y_q) \\ & \geq (p-1) \left(mq + \frac{q^2 - q}{2} \right) + \frac{p(p-1)}{2} - mq - \sum_{i=0}^{m-2} [(m-1)q - i] - \frac{mq(q-1)}{2} \\ & = (p-1) \left(mq + \frac{q^2 - q}{2} \right) + \frac{p(p-1)}{2} - m^2q + mq - q + \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{mq(q-1)}{2} \\ & = (p-m)mq + \frac{(p-1)q(q-1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} - q + \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{mq(q-1)}{2} \\ & \geq \frac{(p-1)q(q-1)}{2} - \frac{mq(q-1)}{2} \end{aligned}$$

另一方面, 根据(10)和(14)可得:

$$\begin{aligned} \varphi_B(x_1) - \varphi_K(y_q) &= \sum_{i=0}^{s-1} (1+ip) + \frac{sq(q-1)}{2} - \frac{q^3}{3} + \frac{q^2}{2} - \frac{q}{6} \\ &= \frac{1}{2p} (ps)^2 - \frac{1}{2} (ps) + \frac{q(q-1)}{2p} (ps) - \frac{q^3}{3} + \frac{q^2}{2} - \frac{q}{6} + s \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 \varphi(x_1) - \varphi(y_q) &= \varphi_B(x_1) - \varphi_K(y_q) + \varphi_K(x_1) - \varphi_B(y_q) \\
 &\geq \frac{1}{2p}(ps)^2 - \frac{1}{2}(ps) + \frac{q(q-1)}{2p}(ps) - \frac{q^3}{3} + \frac{q^2}{2} - \frac{q}{6} + s + \frac{(p-1)q(q-1)}{2} - \frac{mq(q-1)}{2} \\
 &= \left(\frac{1}{p} + \frac{s}{2} + \frac{q(q-1)}{2p} - \frac{q}{2} \right) ps - \frac{q^3}{3} + \frac{q^2}{2} - \frac{q}{6} + \frac{(p-1)q(q-1)}{2} \\
 &\geq \left(\frac{1}{p} + \frac{s}{2} + \frac{q(q-1)}{2p} - \frac{q}{2} \right) ps - \frac{q^3}{3} + \frac{q^2}{2} - \frac{q}{6} + \frac{q^2(q-1)}{2} \\
 &= \frac{2 + ps + q^2 - q - pq}{2} \cdot s + \frac{q^3}{6} - \frac{q}{6} > \frac{ps + q^2 - q - pq}{2} \cdot s
 \end{aligned}$$

因为已知 $p - q \leq m - 1$ 并且 $mq = ps$, 所以 $ps + q^2 - q - pq \geq 0$ 是显然的, 故 $\varphi(x_1) > \varphi(y_q)$ 。
综上所述, 定理 3 得证。

基金项目

江苏省研究生科研与实践创新计划项目(NO. KYCX22_2779)。

参考文献

- [1] Hartsfield, N. and Ringel, G. (2003) *Pearls in Graph Theory*. Dover Publications, Inc., Mineola.
- [2] Kaplan, G., Lev, A. and Roditty, Y. (2009) On Zero-Sum Partitions and Anti-Magic Trees. *Discrete Mathematics*, **309**, 2010-2014. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.04.012>
- [3] Liang, Y.-C., Wong, T.-L. and Zhu, X. (2014) Anti-Magic Labeling of Trees. *Discrete Mathematics*, **331**, 9-14. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.04.021>
- [4] Chawathe, P.D. and Krishna, V.B. (2002) Antimagic Labeling of Complete m-ary Trees. In: Agarwal, A.K., et al., Eds., *Number Theory and Discrete Mathematics*, Springer, Berlin, 77-80. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8223-1_8
- [5] Lozano, A., Mora, M., Seara, C. and Tey, J. (2021) Caterpillars Are Antimagic. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **18**, Article No. 39. <https://doi.org/10.1007/s00009-020-01688-z>
- [6] Sethuraman, G. and Shermily, K.M. (2021) Antimagic Labeling of New Classes of Trees. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, **18**, 110-116. <https://doi.org/10.1080/09728600.2021.1964334>
- [7] Shang, J.-L. (2015) Spiders Are Antimagic. *Ars Combinatoria*, **118**, 367-372.
- [8] Chang, F., Liang, Y.-C., Pan, Z. and Zhu, X. (2016) Antimagic Labeling of Regular Graphs. *Journal of Graph Theory*, **82**, 339-349. <https://doi.org/10.1002/jgt.21905>
- [9] Cranston, D.W. (2009) Regular Bipartite Graphs Are Antimagic. *Journal of Graph Theory*, **60**, 173-182. <https://doi.org/10.1002/jgt.20347>
- [10] Cranston, D.W., Liang, Y.-C. and Zhu, X. (2015) Regular Graphs of Odd Degree Are Antimagic. *Journal of Graph Theory*, **80**, 28-33. <https://doi.org/10.1002/jgt.21836>
- [11] Liang, Y.-C. and Zhu, X. (2014) Antimagic Labeling of Cubic Graphs. *Journal of Graph Theory*, **75**, 31-36. <https://doi.org/10.1002/jgt.21718>
- [12] Wang, T.-M. and Zhang, G.-H. (2012) On Antimagic Labeling of Odd Regular Graphs. In: Arumugam, S. and Smyth, W.F., Eds., *Combinatorial Algorithms*, Springer, Heidelberg, 162-168. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35926-2_19
- [13] Eccles, T. (2016) Graphs of Large Linear Size Are Antimagic. *Journal of Graph Theory*, **81**, 236-261. <https://doi.org/10.1002/jgt.21872>
- [14] Li, P.C. (2016) Antimagic Labelings of Cycle Powers. *Ars Combinatoria*, **124**, 341-351.
- [15] Vaidya, S.K. and Vyas, N.B. (2013) Annals of Antimagic Labeling of Some Path and Cycle-Related Graphs.
- [16] Wang, T., Liu, M. and Li, D. (2012) Some Classes of Disconnected Antimagic Graphs and Their Joins. *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, **17**, 195-199. <https://doi.org/10.1007/s11859-012-0827-2>

-
- [17] Wang, T.-M. and Hsiao, C.-C. (2008) On Anti-Magic Labeling for Graph Products. *Discrete Mathematics*, **308**, 3624-3633. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.07.027>
- [18] Yilma, Z.B. (2013) Antimagic Properties of Graphs with Large Maximum Degree. *Journal of Graph Theory*, **72**, 367-373. <https://doi.org/10.1002/jgt.21664>
- [19] Chen, G., Saito, A. and Shan, S. (2013) The Existence of a 2-Factor in a Graph Satisfying The local Chvatal-Erdos Condition. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **27**, 1788-1799. <https://doi.org/10.1137/12090037X>