

利用改进灰狼算法优化二维综合孔径天线阵列

陈 港, 马 帅, 韦焕泽, 雷 然, 张 利*

贵州大学大数据与信息工程学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2023年11月2日; 录用日期: 2023年12月17日; 发布日期: 2023年12月27日

摘 要

相同灵敏度或分辨率下单孔径天线所需的成本和实现难易程度都远高于孔径阵列, 同时相同配置下多天线组成的阵列望远镜性能一定优于单天线望远镜, 因此优化阵列十分重要。Kiehadrouinezhad等人利用遗传算法进行优化已取得不错效果, 由于遗传算法存在计算成本高、稳定性差等问题, 因此本文提出了改进的灰狼算法(Grey Wolf Optimizer, GWO)进行了优化改进, 并与VLA_A这个现实中表现良好的Y型阵列作对比。实验表明对于27根天线阵列优化, 提出的改进的灰狼算法比遗传算法更有效地分配uv域, 其最终优化综合孔径天线阵列的DV Density为0.3048, 该值小于VLA_A的DV Density和遗传算法优化所得的结果。

关键词

孔径天线阵列, 灰狼算法, DV Density

Optimisation of 2D Integrated Aperture Antenna Arrays Using Improved Grey Wolf Algorithm

Gang Chen, Shuai Ma, Huanze Wei, Ran Lei, Li Zhang*

School of Big Data and Information Engineering, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Nov. 2nd, 2023; accepted: Dec. 17th, 2023; published: Dec. 27th, 2023

Abstract

The cost and ease of implementation of a single aperture antenna are much higher than that of an aperture array for the same sensitivity or resolution, while an array telescope consisting of mul-

*通讯作者。

文章引用: 陈港, 马帅, 韦焕泽, 雷然, 张利. 利用改进灰狼算法优化二维综合孔径天线阵列[J]. 运筹与模糊学, 2023, 13(6): 7227-7239. DOI: 10.12677/orf.2023.136709

multiple antennas in the same configuration is bound to outperform a single-antenna telescope, so it is important to optimise the array. Kiehadrouinezhad et al have achieved good results using genetic algorithms for optimisation, due to the high computational cost and poor stability of genetic algorithms, this paper proposes an improved Grey Wolf Optimizer (GWO) for optimisation and improvement and compares it with VLA_A, a realistic and well-performing Y-type array which performs well in reality. The experiments show that for the 27 antenna array optimization, the proposed improved Grey Wolf algorithm allocates the uv-domain more efficiently than the genetic algorithm, and its final optimized DV Density of the integrated aperture antenna array is 0.3048, which is smaller than that of the DV Density of the VLA_A and the result obtained from the optimization of the genetic algorithm.

Keywords

Aperture Antenna Array, Grey Wolf Algorithm, DV Density

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

射电望远镜阵列与光学望远镜成像原理并不相同，光学望远镜可直接成像，而前者是通过获取辐射源在空间域的可见度数据再傅里叶反变换转换为图像亮度数据，因此最终成图质量几乎取决于空间域的覆盖程度。uv 域全覆盖时，射电成像系统才有可能接收到完整的图像，然而这个只有天线无限多时理论上才可实现，但在实际中是不可能实现的；天线阵列分布与 uv 覆盖息息相关，uv 覆盖[1]与脏束或 psf 是傅里叶变换对，不完整的 uv 覆盖可能导致接收的脏图无法通过 clean 算法以及其变体的算法来恢复出源图[2] [3] [4] [5]。因此诸多天文领域学者通过阵列布局来优化 uv 覆盖或脏束[6]。

模拟退火算法、爬山算法是在元启发算法出现之前的主要解决优化问题的传统优化算法[7]。因为这些算法需要从单点出发检索并且需要梯度信息，导致其优化需要大量时间。所以在解决诸多优化问题上都并非良选，如定位优化[8]。而元启发算法出现后，许多优化问题得以解决。它们与传统优化算法之间最大的差别是这类算法几乎不需要过多推导[9]，并且这类算法能有效避免局部最优。由于元启发算法的简单性、灵活性、低复杂度等特性，使其能应用于各个领域[10]。迄今为止开发的突出的自然启发的元启发式算法有萤火虫算法[11]，粒子群算法[9]，蝙蝠算法[12]，以及前沿的、应用领域广泛的、优异的灰狼优化算法[13] [14] [15] [16]等。

在很多应用问题上，元启发算法都表现良好，如线性天线阵优化[17] [18]、二值化技术[19]、路径规划[20]、同心圆形天线阵列优化[21]等。伴随着此类算法的快速发展，综合孔径天线阵列优化问题也逐渐开始用元启发算法来解决问题。Rahmat-Samii 等人在 2008 年将粒子群优化应用于射电天文学应用的干涉阵列[6]。该实验表明在三个臂上不均匀地部署天线相比于均匀地布置天线能提供更好地 uv 覆盖。该算法的弊端在于要获取更多的 uv 覆盖需要对每个观测单独运行。Kiehadrouinezhad 等人在 2014 年研究了更复杂的问题，即在角度域(l-m 域)中的抑制 SLL 和空间频率域(uv 域)中均匀覆盖[22]。其使用的是遗传算法进行优化并取得不错的效果，但遗传算法存在稳定性差、复杂度高等问题，而灰狼算法在诸多领域都表现良好[13]，因此本文基于灰狼算法进行天线布阵优化研究。

为了解决以上问题，并且考虑现有元启发算法应用到综合孔径二维阵列优化领域的很少，本文首先

对现有的 VLA_A 阵列(由 27 根天线构成)进行分析,结果发现 VLA_A 阵列形成的 UV Density 数值较大。因此本文通过在优化综合孔径二维阵列领域较突出的遗传算法开展 27 根天线布阵优化,结果表明有所提升。但由于遗传算法存在计算成本高、稳定性差等问题,本文引入了元启发算法中前沿的灰狼算法进行了再次优化,与遗传算法对比,结果和花费时间均比其表现优异。并且考虑到标准元启发算法基本都是采用线性收敛因子,它的缺点是虽然前期探索能力强,但后期局部开发能力弱[23] [24],为了得到前期探索能力强,后期局部开发能力也强的收敛因子,提出了分段收敛因子,并应用到标准灰狼算法上进行改进,最终结果表明,分段收敛因子的灰狼算法优化结果优于标准灰狼算法所优化的结果。

2. 综合孔径成像原理

综合孔径天线阵列的阵型的选择在天线数目不变的情况下,很大程度上取决于采用函数的优化[1]。 n 个干涉仪对应 n 个空间频率分量,干涉仪的天线之间的基线不同时,其对应的 u, v 空间频率分量也不同。因此通过增加天线数量能获得更多的空间频率分量。但实际上设计射电望远镜时,由于成本、技术等因素,天线数量都是有限的,要在天线数目有限的情况下获得更多不同的空间频率,天线的布阵尤为重要。

2.1. u, v 覆盖

干涉仪的基线不同,对应的空间频率 u, v 也不同,基线与 u, v 之间的关系数学模型如下:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \sin(h) & \cos(h) & 0 \\ -\sin(\delta)\cos(h) & \sin(\delta)\sin(h) & \cos(\delta) \\ \cos(\delta)\cos(h) & -\cos(\delta)\sin(h) & \sin(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, B_x 、 B_y 、 B_z 分别为基线的三个分量,相位中心的指向为 (h, δ) , h 表示当地的时角, δ 表示赤纬。空间频率分量 w 的大小决定着成像视场的扭曲程度[7],因此当存在大视场问题时,必然需要 w 项修正,大多数方法是将三维数据投影或近似到二维平面上,在二维平面上可以使用二维傅里叶变换,从而返回到现有算法可以解决的情况[23]。

综合孔径天线数量为 n 时,可构成 $\frac{n(n-1)}{2}$ 架干涉仪,在快照模式下这 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条基线能获取 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个 (u, v) 点。当地球自转时, u 和 v 的值会发生变换,因此利用地球自转获取更多频率信息的工作模式逐渐得以发展,这种工作模式称为“非快照”工作模式。

2.2. 采样函数和脏束

干涉仪的基线矢量对应 UV 平面上的一个采样点,天线阵列相对应的 UV 覆盖可定义为该阵列配置参数的空间复相关函数,公式如下:

$$S(u, v) = \sum_f \delta(u - u_f, v - v_f) \quad (2)$$

其中, f 指取遍所有 (u, v) 点, $\delta(u - u_f, v - v_f)$ 为有限长的冲击响应。采样函数对应的傅里叶逆变换称为脏束或者点扩展函数(PSF)。PSF 代表望远镜系统性能,观测图的质量好坏很大程度上取决于它。在射电天文学中,用于消除望远镜点扩散函数(PSF)影响的最流行算法是 CLEAN 算法的变体[2] [3] [4],比如 Cotton-Schwab CLEAN (CS-Clean),基于峰值信噪比(psnr)来优化最陡下降法在恢复过程中的步长的 CLEAN 改进方法等。但这些方法都是 PSF 旁瓣效应在可接受程度上有效,因此脏束最终的形成十分重要,而通过天线阵列排布是改善脏束最直接也是最有效的方法。

3. 本文方法

3.1. 灰狼优化算法

灰狼优化算法(Grey Wolf Optimizer, GWO)是2014年澳大利亚 Mirjalili 等学者受到灰狼捕食猎物活动的启发而开发的一种元启发优化算法[13]。在自然中灰狼群常分为4个等级,第一等级的灰狼用 α 表示,第二等级的灰狼用 β 表示,第三等级的灰狼用 δ 表示,第四等级的灰狼用 ω 表示。 ω 灰狼数量在狼群中占比最多,并且其捕猎行为基本取决于前三等级灰狼的影响。GWO由于较强的收敛性,被用到诸多优化领域,其捕猎数学模型如下。

1) 包围过程。灰狼发现目标猎物后,带领狼群向猎物方向进行包围,过程数学如下:

$$D = |C \cdot X_p(t) - X(t)| \quad (3)$$

$$X(t+1) = X_p(t) - A \cdot D \quad (4)$$

其中, t 为迭代次数; $X_p(t)$ 为目标解在 t 次迭代后的位置向量; $X(t)$ 为灰狼 t 次迭代后的位置向量; D 为灰狼与猎物的距离; A 与 C 表示向量系数,两者定义如下:

$$A = 2a \cdot \text{rand}_1 - a \quad (5)$$

$$C = 2 \cdot \text{rand}_2 \quad (6)$$

$$a = 2 - \frac{2t}{T_{\max}} \quad (7)$$

其中, rand_1 和 rand_2 是在[0, 1]之间均匀分布的随机数, a 取值范围是[0, 2], T_{\max} 是最大迭代次数,本文取值 $T_{\max} = 150$ 。

2) 捕猎过程。

头狼 α 带领 β 、 δ 对猎物进行捕猎,捕猎过程中, α 、 β 、 δ 的行为用数学模型表示如下:

$$D_\alpha = |C_1 \cdot X_\alpha(t) - X(t)| \quad (8)$$

$$X_1(t+1) = X_\alpha(t) - A_1 \cdot D_\alpha \quad (9)$$

$$D_\beta = |C_2 \cdot X_\beta(t) - X(t)| \quad (10)$$

$$X_2(t+1) = X_\beta(t) - A_2 \cdot D_\beta \quad (11)$$

$$D_\delta = |C_3 \cdot X_\delta(t) - X(t)| \quad (12)$$

$$X_3(t+1) = X_\delta(t) - A_2 \cdot D_\delta \quad (13)$$

$$X(t+1) = 2 - \frac{X_1(t+1) + X_2(t+1) + X_3(t+1)}{3} \quad (14)$$

其中 $X_\alpha(t)$ 、 $X_\beta(t)$ 、 $X_\delta(t)$ 分别表示为头狼 α 、 β 、 δ 的位置, A_j 和 C_j 分别为 α 、 β 、 δ 的系数。由于 A_j 和 C_j 是线性收敛因子,这样虽然前期探索能力强,可后期局部开发能力却很弱,因此本文对传统灰狼算法又加以改进。

3.2. 改进的灰狼优化算法

标准灰狼优化算法的线性收敛因子 $a = 2 - \frac{2t}{T_{\max}}$,其虽然前期探索能力强,但后期局部开发能力弱

[23] [24], 为了得到前期探索能力强, 后期局部开发能力也强的收敛因子, 提出了分段收敛因子, 其数学模型如公式 15 所示:

$$\begin{cases} a = 2 - 2 \cdot \frac{t}{T_{\max}}, t \leq 0.5T_{\max} \\ a = 2 - 2 \cdot \left(\frac{t}{T_{\max}}\right)^3, t > 0.5T_{\max} \end{cases} \quad (15)$$

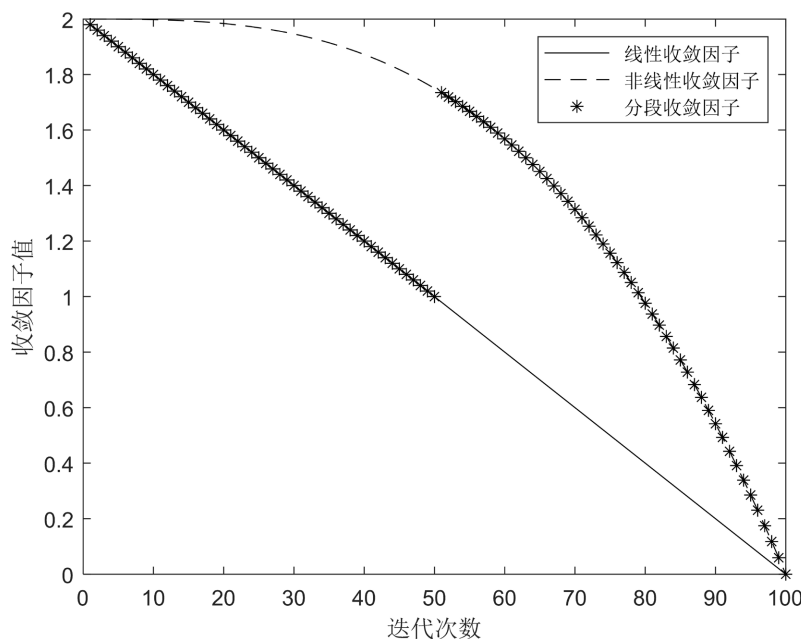


Figure 1. Comparison data of convergence factor
图 1. 收敛因子对比数据

由图 1 可清晰看到, 分段收敛因子和线性因子前期变化速率一样, 这保证了两者前期探索能力一样强, 而后期分段收敛因子的变化速率和非线性因子变化速率一样比较平缓, 使得其后期局部开发能力和非线性因子一样强。这有效的提升了灰狼算法的优化能力。

3.3. 利用改进的鲸鱼算法进行天线阵列排布

VLA_A 是一个由 27 根蝶形天线组成的 Y 型天线阵列。本文只研究其阵型, 因此工作频率、天线孔径直径并未与 VLA_A 保持一致。

我们的目标是在找到能采样到更完整的频率信息的天线排布。由于天线的排布丰富, 遗传算法能有效应用于此, Kiehadroudinezhad 等人利用遗传算法进行 30 根天线优化排布, 最终优化后得到的脏束的 SLL 和 uv 覆盖率都还不错。因为遗传算法在元启发算法中其复杂度较高、收敛性一般, 而灰狼算法复杂度较低、收敛性较强[13], 因此本文采用了灰狼算法应用到该排布问题上, 该算法进行优化能很好的解决此类问题。

3.3.1. 初始化

天线所在位置本文用经纬度表示, 为了统一单位, 将其转为单位米。由经纬度坐标最终转为矩形坐标如下所示:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{d}{\lambda} \begin{bmatrix} \cos(lat) \cdot \sin(el) - \sin(lat) \cdot \cos(el) \cdot \cos(az) \\ \cos(el) \cdot \sin(az) \\ \sin(lat) \cdot \sin(el) + \cos(lat) \cdot \cos(el) \cdot \cos(az) \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中 d 是基线距离, az 是基线的方位角, lat 是天文台维度, el 是基线仰角。

灰狼算法和粒子群以及遗传算法获取初始化点的方法都是一样的, 如果不给予确定的初始点, 都是通过随机初始化获取。

3.3.2. 评估

在空间频率域, 我们采用了 Babak E. Cohanim [24] 定义的参数 M , 也称 UV Density, 作为评估指标。其模型如下所示:

$$M = \frac{N_{UV} - N_{UVactual}}{N_{UV}} \quad (17)$$

其中 $N_{UVactual}$ 表示已填充的所有标称网格点, N_{UV} 表示 uv 点总数, $M \in [0,1]$, M 的值越小, uv 覆盖率更完整, 即 M 的值越小, 设计在优化中表现越好。

4. 结果

该算法在 Matlab R2020b 中实现, 使用的计算机 Intel(R) Core(TM) i7-6700 CPU @ 3.40GHz 3.41 GHz, RAM 为 8GB。

如下图 2 是 VLA_A 相关配置:

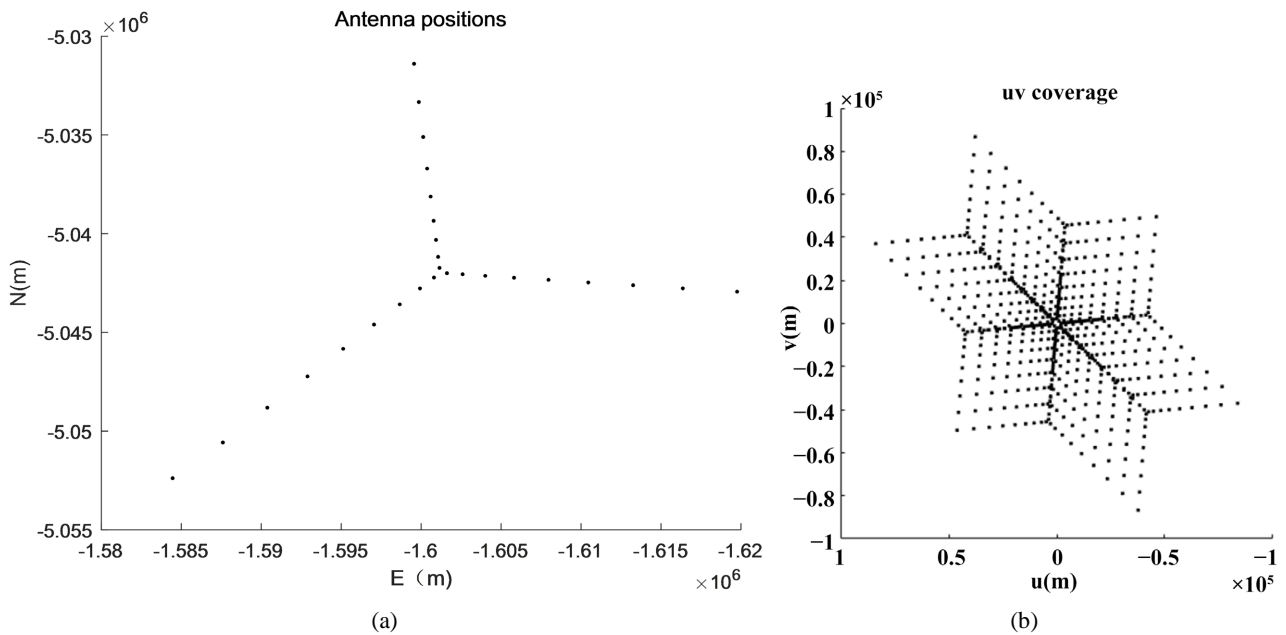
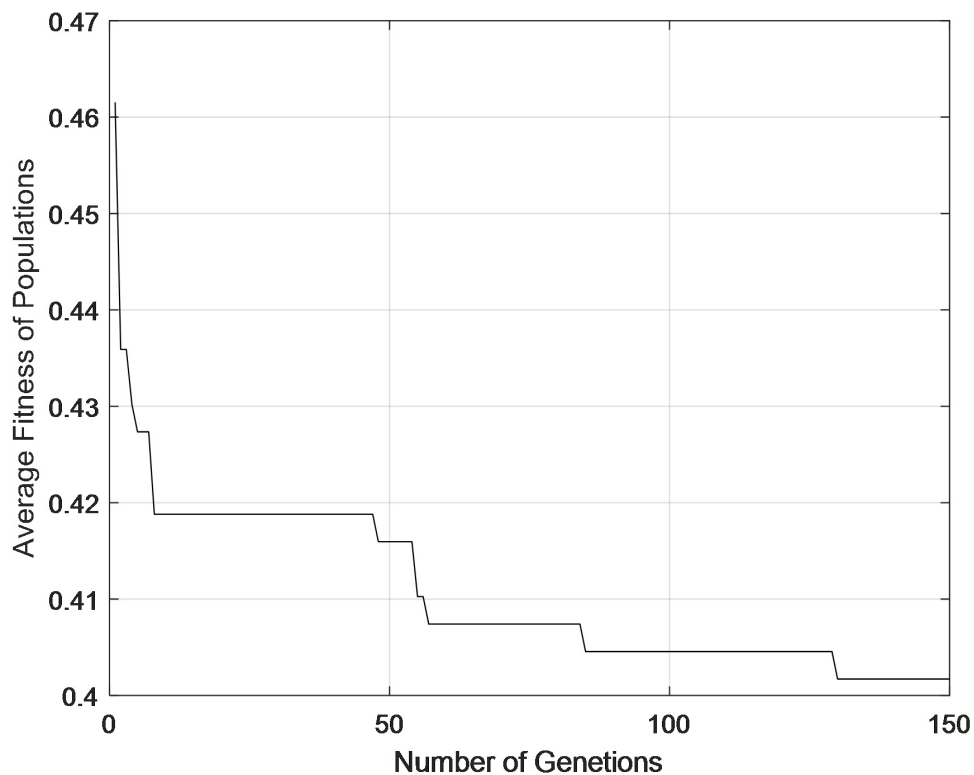


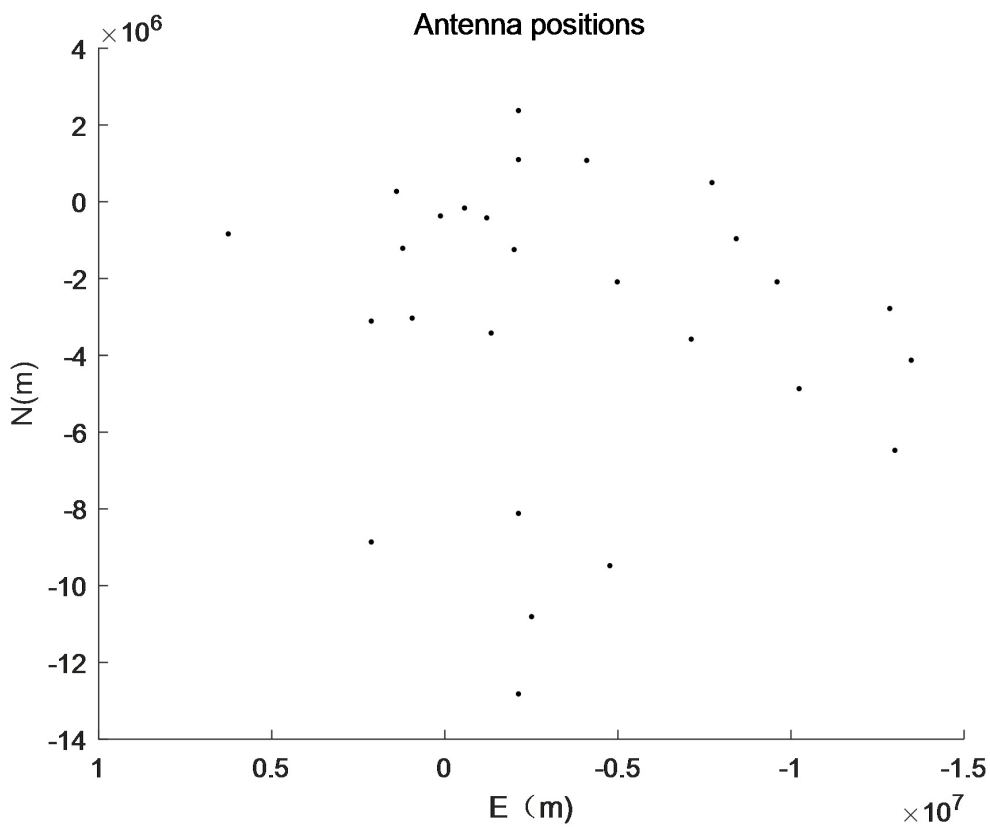
Figure 2. (a) VLA_A position distribution; (b) KAT-7 uv coverage

图 2. (a) VLA_A 位置分布; (b) KAT-7 uv 覆盖

如图 2 所示, VLA_A 的 uv 覆盖并不理想, 其 UV Density 是 0.547, 这表示其一半以上都是重采样点, 这有很大提升空间。由于遗传算法在优化天线阵列方面表现良好, 基于此利用遗传算法进行优化结果如图 3 所示。



(a)



(b)

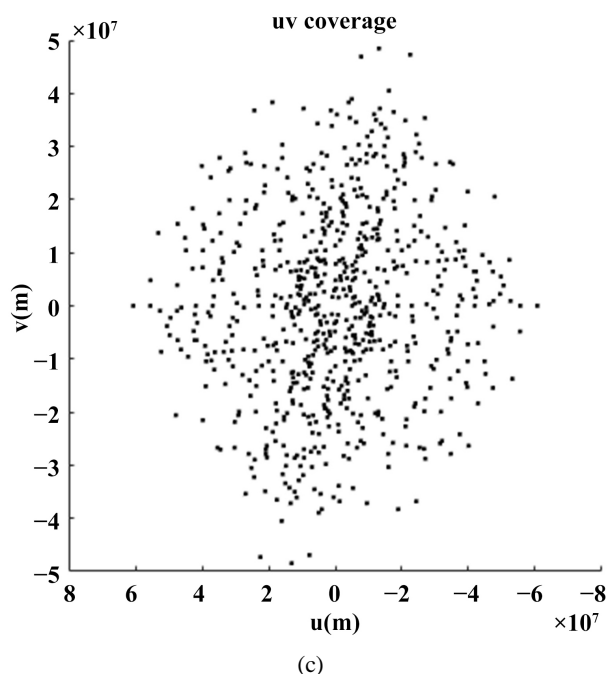
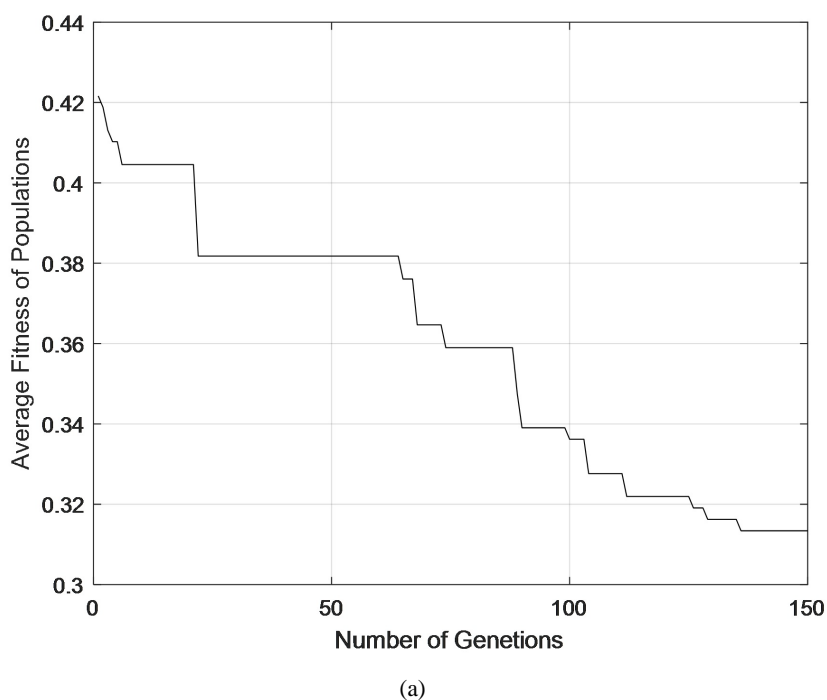


Figure 3. (a) Genetic algorithm optimised curve with M as fitness; (b) Antenna configuration obtained from genetic algorithm optimization; (c) Genetic algorithm optimised antenna corresponding to uv coverage

图 3. (a) 遗传算法以 M 作为适应度优化曲线; (b) 遗传算法优化所得天线配置; (c) 遗传算法优化天线对应 uv 覆盖

由图 3(a)结果可知, 使用遗传算法优化 27 根天线在 uv 域的 UV Density, 最终优化结果为 0.4017, 该结果小于 VLA_A 在 uv 域的 UV Density, 这表明了遗传算法优化所得的天线阵列相比于 VLA_A 能获取更多的频率信息。但这个值还有降低的空间, 并且考虑到灰狼算法的收敛性效果不错, 因此利用灰狼算法来进行优化求解, 结果如图 4 所示。



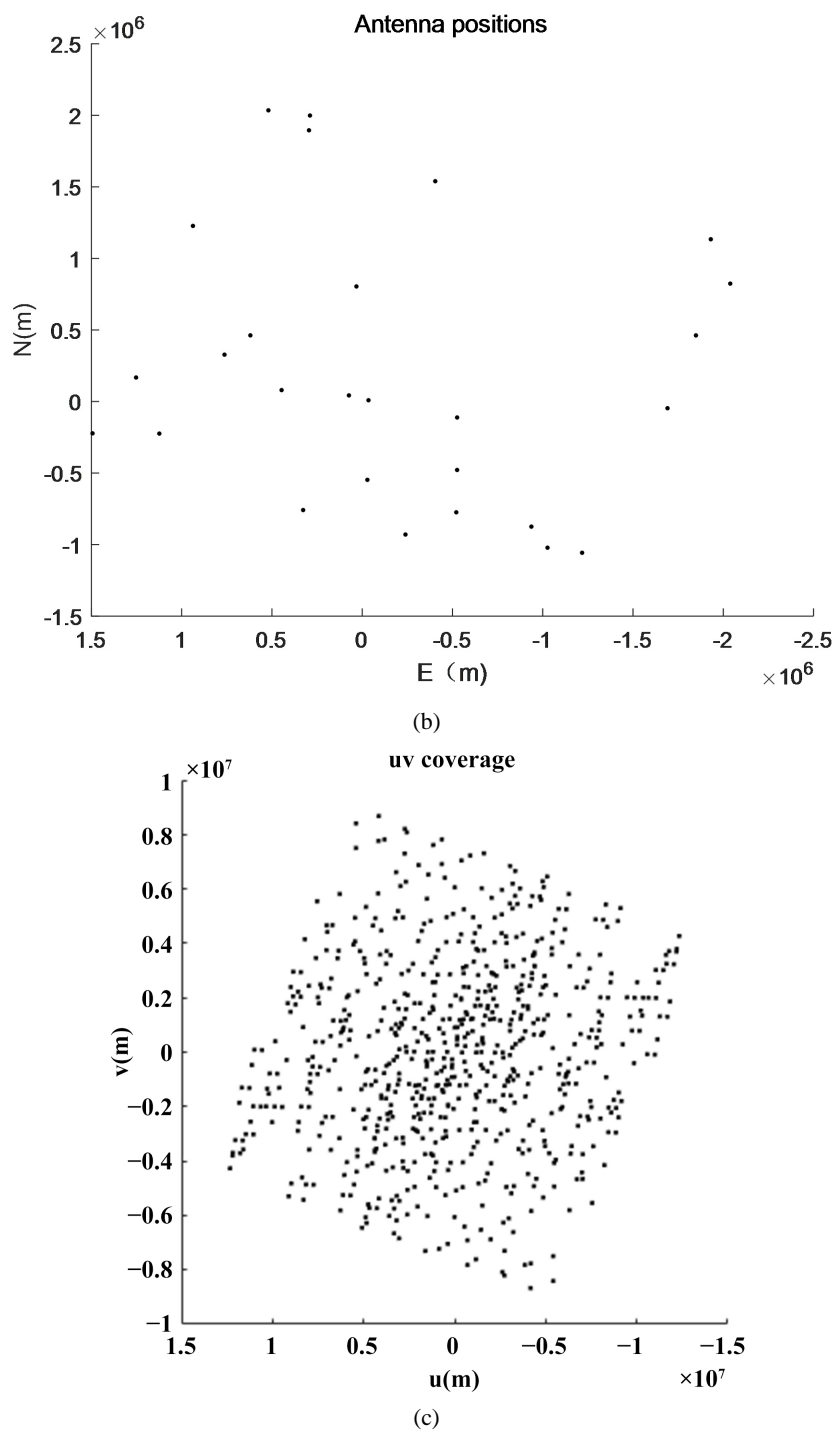


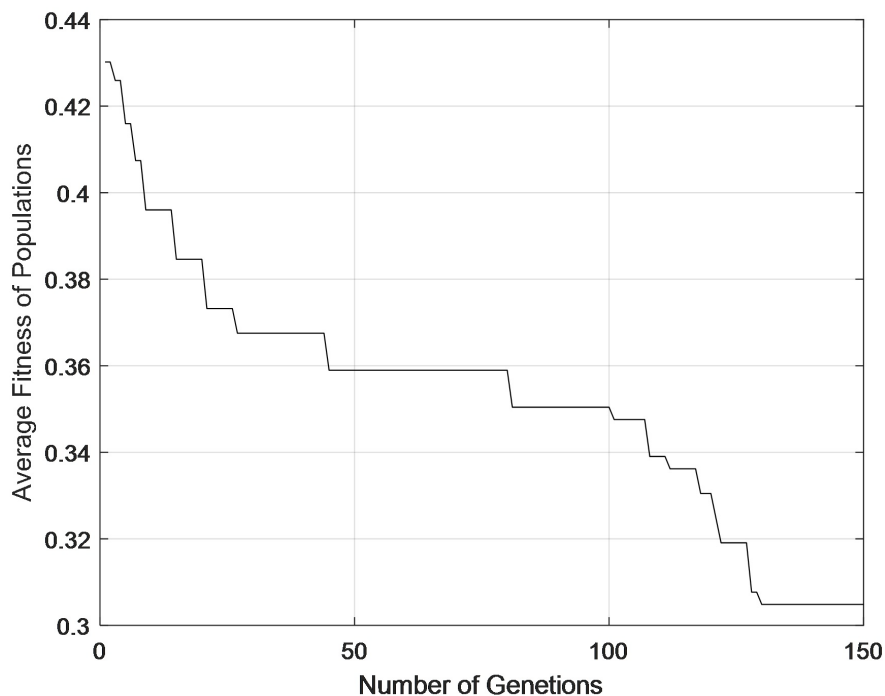
Figure 4. (a) Optimisation curve of the grey wolf algorithm with M as the fitness; (b) Antenna configurations optimised by the grey wolf algorithm; (c) Optimised antenna configurations corresponding to uv coverage by the grey wolf algorithm

图 4. (a) 灰狼算法以 M 作为适应度优化曲线; (b) 灰狼算法优化所得天线配置; (c) 灰狼算法优化天线对应 uv 覆盖

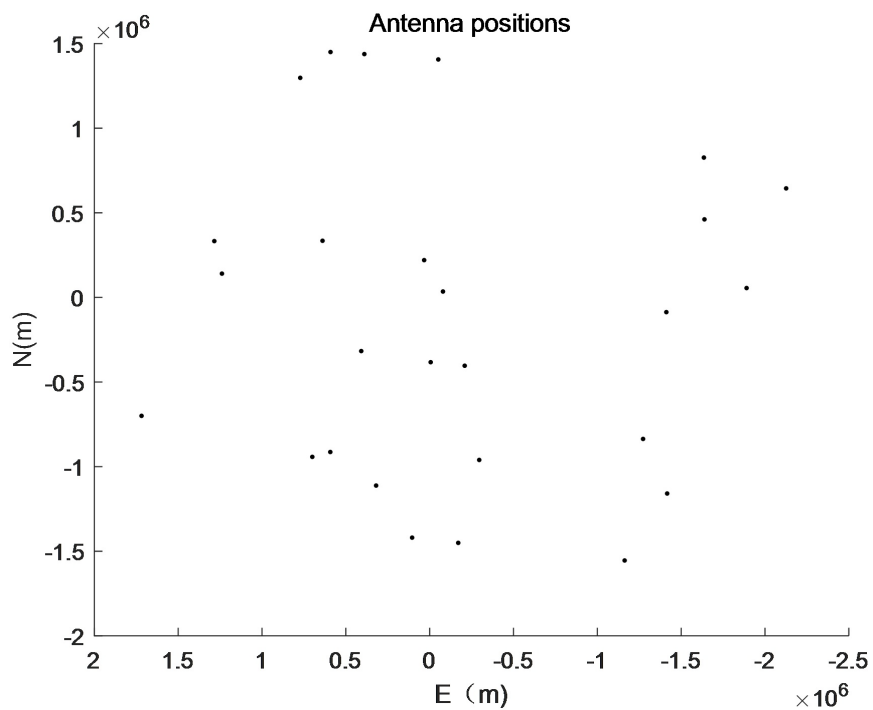
由图 3(a)和图 4(a)可知, 使用灰狼算法优化 27 根天线在 uv 域的 UV Density 的值小于使用遗传算法优化 27 根天线在 uv 域的 UV Density。并且从图 3(c)和图 4(c)的 uv 覆盖图也能明显看到图 4(c)的 uv 覆盖

重叠采样点少于图 3(c)的 uv 覆盖的重叠采样点。这表明了图 4(c)的 uv 覆盖能获取更多的频率信息。

由于传统灰狼算法采用的是线性收敛因子，局部开发能力较弱，将线性因子优为分段收敛因子进行优化结果如图 5 所示。



(a)



(b)

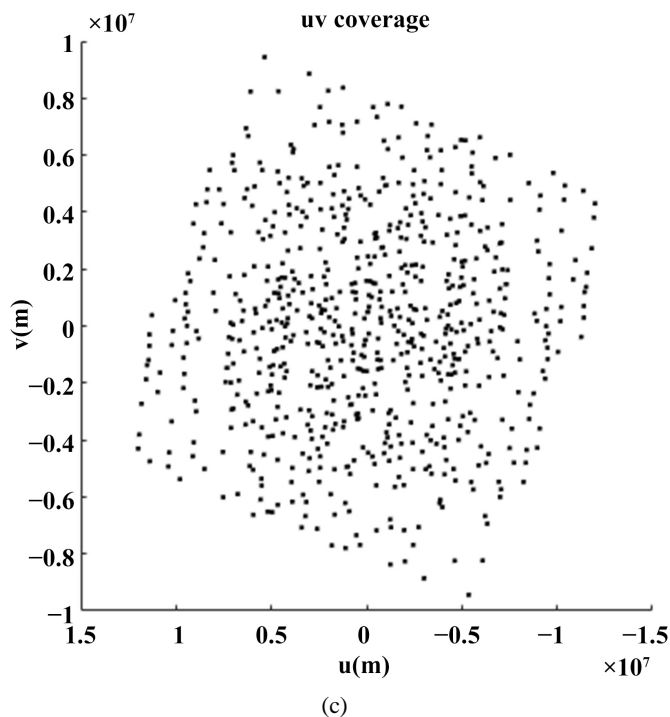


Figure 5. (a) Improved grey wolf algorithm optimising the curve with M as the fitness; (b) Optimised antenna configuration from the improved grey wolf algorithm; (c) Optimised antenna corresponding to uv coverage by the improved grey wolf algorithm

图 5. (a)改进灰狼算法以 M 作为适应度优化曲线; (b) 改进灰狼算法优化所得天线配置; (c) 改进灰狼算法优化天线对应 uv 覆盖

对比图 5(a)和图 4(a),可知,改进后的灰狼算法优化 27 根天线阵列在 uv 域的 UV Density 最终为 0.3048,该值低于传统灰狼算法优化所得的 UV Density。

将遗传算法和灰狼算法以及改进后灰狼算法优化 27 跟天线阵列排布最终所花费时间和优化所得指标 UV Density 记录于表 1。

Table 1. UV Density obtained by the three algorithms to optimise the antenna array with their corresponding time spent
表 1. 三个算法优化天线阵列所得的 UV Density 与其对应所花费时间

算法	UV Density	Time
遗传算法	0.4017	220.9557 s
灰狼算法	0.3133	211.0261 s
改进灰狼算法	0.3048	222.3399 s

从表 1 可清楚看到,遗传算法不仅优化性能表现差于灰狼算法,所花费的时间也高于灰狼算法。而改进后的灰狼算法优化所花费时间虽然增加了一些,但性能相比于传统灰狼算法性能却有所提升。牺牲一些时间来提高优化性能,这是可接受的。

5. 总结

本文提出了一种改进灰狼算法来优化综合孔径天线阵列排布,结果表明改进后的灰狼算法不仅能有效解决天线阵列优化问题,而且优化效果均比标准灰狼算法和遗传算法表现优异。

对于天线的排布优化,元启发算法应用到该领域的很少,其中比较突出的是 Kiehadrouinezhad 等人利用遗传算法进行布阵优化研究,其优化的是 30 根天线组成的阵列,与 GMRT 阵列作对比得出利用遗传算法优化结果良好。但由于天线布阵研究不同的数量会存在巨大的差异性,并且由于遗传算法存在易陷入局部最优、复杂度较高等问题,因此本文研究 27 根天线布阵研究时,采用了元启发算法中前沿的、不易陷入局部最优的灰狼算法进行布阵优化,与遗传算法进行对比的同时也与现有的 VLA_A 阵列进行了对比研究,结果表明标准的灰狼算法能有效解决 27 根天线布阵优化的问题,并且表现优于遗传算法。之后考虑到标准的元启发算法都是采用线性收敛因子,存在后期局部开发能力弱的缺点,会导致最终优化结果不理想。因此本文提出了分段收敛因子对标准灰狼算法进行改进,结果表明提出的分段收敛灰狼算法优化 27 根天线布阵的表现优于标准的灰狼算法,其优化的 DV Density 减少为 0.3048。通过改进后的灰狼算法在天线布阵优化的表现,我们相信在其他领域,其也能表现优异。

基金项目

国家自然科学基金(12273007, 11963003, 12242303); 贵州省优秀青年科技人才计划项目(黔科合平台人才-YQK[2023]006); 贵州省基础研究(自然科学)项目(黔科合基础-ZK[2022]一般 143); 贵州大学培育项目(贵大培育[2020]76 号)。

参考文献

- [1] Thompson, A.R., Moran, J.M. and Swenson, G.W. (2017) *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*. Springer Nature, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44431-4>
- [2] Zhang, L., Xu, L. and Zhang, M. (2020) Parameterized CLEAN Deconvolution in Radio Synthesis Imaging. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, **132**, Article ID: 041001. <https://doi.org/10.1088/1538-3873/ab7345>
- [3] Zhang, L., Bhatnagar, S., Rau, U., et al. (2016) Efficient Implementation of the Adaptive Scale Pixel Decomposition Algorithm. *Astronomy & Astrophysics*, **592**, A128. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201628596>
- [4] Zhang, L., Mi, L.G., Zhang, M., et al. (2020) Adaptive-Scale Wide-Field Reconstruction for Radio Synthesis Imaging. *Astronomy & Astrophysics*, **640**, A80. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202038153>
- [5] Zhang, L., Xu, L., Zhang, M., et al. (2019) An Adaptive Loop Gain Selection for CLEAN Deconvolution Algorithm. *Research in Astronomy and Astrophysics*, **19**, 79. <https://doi.org/10.1088/1674-4527/19/6/79>
- [6] Jin, N.B. and Rahmat-Samii, Y. (2008) Particle Swarm Optimization for Antenna Designs in Engineering Electromagnetics. *Journal of Artificial Evolution and Applications*, **2008**, Article ID: 728929. <https://doi.org/10.1155/2008/728929>
- [7] Yang, X.S. (2010) *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms*. Luniver Press, Frome.
- [8] Arora, S. and Singh, S. (2017) Node Localization in Wireless Sensor Networks Using Butterfly Optimization Algorithm. *Arabian Journal for Science and Engineering*, **42**, 3325-3335. <https://doi.org/10.1007/s13369-017-2471-9>
- [9] Kennedy, J. and Eberhart, R. (1995) Particle Swarm Optimization. *Proceedings of ICNN'95-International Conference on Neural Networks*, Vol. 4, 1942-1948.
- [10] Sivanandam, S.N. and Deepa, S.N. (2007) *Principles of Soft Computing (with CD)*. John Wiley & Sons, Hoboken.
- [11] Yang, X.S. (2010) *Firefly Algorithm, Lévy Flights and Global Optimization*.
- [12] Tsai, P.W., Zhang, J., Zhang, S., et al. (2015) Improving Swarm Intelligence Accuracy with Cosine Functions for Evolved Bat Algorithm. *Journal of Information Hiding and Multimedia Signal Processing*, **6**, 1194-1202.
- [13] Mirjalili, S., Mirjalili, S.M. and Lewis, A. (2014) Grey Wolf Optimizer. *Advances in Engineering Software*, **69**, 46-61. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2013.12.007>
- [14] 孙意凡, 刘仁杰, 李世超, 等. 基于 GWO-MPC 的联合收获机喂入量控制方法与仿真实验[J/OL]. 农业机械学报, 2023: 1-11. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1964.S.20230919.1145.014.html>
- [15] 刘勃, 黄金, 张亚亚, 等. 基于灰狼优化算法的 PCNN 中药材显微图像分割[J/OL]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2023: 1-7. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/41.1107.N.20230925.1514.010.html>
- [16] 关红伟, 刘丽娟, 白牧可, 等. 多主体博弈下基于改进灰狼算法的综合能源服务商优化运行策略[J/OL]. 电力系统及其自动化学报, 2023: 1-7. <https://doi.org/10.19635/j.cnki.csu-epsa.001343>

-
- [17] Yuan, P., Guo, C., Ding, J., *et al.* (2017) Synthesis of Nonuniform Sparse Linear Array Antenna Using Whale Optimization Algorithm. 2017 *6th Asia-Pacific Conference on Antennas and Propagation (APCAP) IEEE*, Xi'an, 16-19 October 2017, 1-3. <https://doi.org/10.1109/APCAP.2017.8420873>
- [18] Zhang, C., Fu, X., Ligthart, L.P., *et al.* (2018) Synthesis of Broadside Linear Aperiodic Arrays with Sidelobe Suppression and Null Steering Using Whale Optimization Algorithm. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, **17**, 347-350. <https://doi.org/10.1109/LAWP.2018.2789919>
- [19] Gölcük, İ., Ozsoydan, F.B. and Durmaz, E.D. (2019) Analysis of Different Binarization Techniques within Whale Optimization Algorithm. 2019 *Innovations in Intelligent Systems and Applications Conference (ASYU) IEEE*, Izmir, 31 October-2 November 2019, 1-5. <https://doi.org/10.1109/ASYU48272.2019.8946368>
- [20] Yan, Z., Zhang, J., Zeng, J., *et al.* (2022) Three-Dimensional Path Planning for Autonomous Underwater Vehicles Based on a Whale Optimization Algorithm. *Ocean Engineering*, **250**, Article ID: 111070. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111070>
- [21] Kundu, K., Bera, R. and Pathak, N.N. (2022) Synthesis of Concentric Circular Antenna Array Using Whale Optimization Algorithm. *IETE Journal of Research*. <https://doi.org/10.1080/03772063.2022.2096703>
- [22] Kiehadrouinezhad, S., Noordin, N.K., Sali, A., *et al.* (2014) Optimization of an Antenna Array Using Genetic Algorithms. *The Astronomical Journal*, **147**, 147. <https://doi.org/10.1088/0004-6256/147/6/147>
- [23] 刘成汉, 何庆. 融合多策略的黄金正弦黑猩猩优化算法[J/OL]. *自动化学报*, 2023, 49(11): 2360-2373. <https://doi.org/10.16383/j.aas.c210313>
- [24] Cohanin, B.E., Hewitt, J.N. and De Weck, O. (2004) The Design of Radio Telescope Array Configurations Using Multiobjective Optimization: Imaging Performance versus Cable Length. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **154**, 705-719. <https://doi.org/10.1086/422356>